F 2557
R F 2557 G

1
TOMUL 36
ian. — febr.
1977

1977 JUL 04
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. CR. MATEESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. RADU PRIȘCU,
Dr. doc. V. VISARION,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacție.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM, Serviciul export-import carte: Serviciul export-import presă (pentru reviste), P.O.B. 2001, telex 011226, Calea Griviței nr. 64—66, București, oficiul poștal 12, România. În țară — abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, București

R F 2557

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1989

Tomul 36, 1977

INDEX ALFABETIC

ANASTASESCU, M. D., Contribuţii la calculul de conlucrare spaţială dintre suprastructură, fundaţie şi terenul de fundare 3 417
ANTONESCU, D. vezi CONSTANTINESCU, I. 1 129
ANTONESCU, N. Vezi MINOIU, I. 2 229
ATANASIU, N., Comportarea la deformare plastică a metalelor şi aliajelor în cîmp ultrasonic 4 579
AVRAM, C., R. FRIEDRICH, Cercetări teoretice şi experimentale privind grinzile pereţi din beton armat 5 687
BARONCEA, A., N. CRISTESCU, E. GLODEANU, Un model pentru descrierea deformării sării 1 31
BĂLĂŞESCU, A., vezi MINCU RODICA, ... 3 407
BĂNUŢ VALERIU, Calculul structurilor neliniar elastice 5 635
BĂRĂNESCU, G., C. SILVESTRU, Echilibrajul momentelor forţelor de inerţie la motorul în V cu cilindri intercalaţi 1 113
BERBENTE, C. vezi, CARAFOLI, E. 2 163
BRATOSIN, D., Un model elastic neliniar pentru pămînturi 4 551
BUCULEI, M., Contribuţii la analiza cinematică, prin metode matriceale, a multiplilor termocinematici 6 865
BUDA, C., ŞT. POPESCU, Algoritm şi program pentru dimensionarea hidraulică a camerelor spirale în beton 4 513
BUDA, C. ŞT. POPESCU, Stabilirea rezervei optime a unui sistem cu elemente în serie 6 803
BUZDUGAN, GH., I. MINCĂ, I. CONSTANTINESCU, Studiul răspunsului dinamic al principalelor tipuri de maşini vibratoare acţionate mecanic . . 3 369
CARAFOLI, E., C. BERBENTE, P. MARINESCU, Curgeri supersonice în jurul conului circular cu sau fără suflu prin suprafaţă 2 163
CATRINA, D., Erori ale pasului elicei piesei, provocate de bătaia radială a roţilor dinţate din lanţul cinematic de filetare 4 541
CĂTĂRIG, AL. vezi IONESCU, A. . . . . (notă) 1 151
CHEBELEU, P, vezi SUSEA, A 1 89
CHIRIACESCU, T. S., CONSTANTIN HUIU, DUMITRU MANGERON, Concepte ale „teoriei sistemelor" în studiul sistemelor mecanice liniare . . 3 335
CHIŞLEAG, R. vezi CUCUREZEANU, I. 1 145
CHIŞLEAG, R. vezi CUCUREZEANU, I. 4 591
CONSTANTINESCU, I., D. ANTONESCU, Unele aspecte experimentale ale cercetărilor privind biomecanica genunchiului şi antebraţului 1 129
CONSTANTINESCU, I., T. TACU, Algoritm şi limbaj pentru calculul tensiunilor în structuri izotrope, axial simetrice 2 193
CONSTANTINESCU, I., vezi BUZDUGAN, GH. 3 369
CONSTANTINESCU, N. V., S. GĂLETUŞE, Efecte inerţiale în filme lubrifiante 4 465
CRĂCIUN I. C., Relaţii între viteze şi debite pentru mişcarea stratificată în conducte geometric asemenea 1 9
CRĂCIUN. I. C., Calculul debitelor pentru curgerea a două lichide vîscoase, separate diametral în conducta circulară 3 303
CRISTESCU, N. vezi BARONCEA, A. 1 31
CUCUREZEANU, I., R. CHIŞLEAG, P. SUCIU, Asupra interpretării franjelor în interferometria holografică 1 145

CUCUREZEANU, I., P. SUCIU, R. CHIŞLEAG, Studiul deformaţiilor mecanice şi termice prin interferometrie holografică 4 591
DIMOIU, I, vezi MATEESCU, D. 1 41
DODOC, P. Contribuţii la calculul dispozitivelor pentru iluminarea critică la microscoape 2 277
DRANGA, M., vezi MANOLESCU, N.I. 1 51
DRĂGHICI, S. vezi PATRAULEA, N.N. 1 3
DRĂGOI, V. vezi DUMITRESCU, H. 5 623
DUMITRESCU, H., V. DRĂGOI, Determinarea undei de şoc generate printr-o injecţie vectorială într-o curgere supersonică 5 623
DUMITRESCU, I. Simularea sistemelor fizice cu ajutorul calculatoarelor cu structură hibridă 4 597
DUCA CEZAR, vezi SIMIONESCU, I. 6 855
ENACHE, C, vezi SUSEA, A. 1 89
FLOREA JULIETA, V. PANAITESCU, Studiu prin similitudine al curgerilor cu suprafaţă liberă cu pat mobil pe model distorsionat 4 485
FRĂSINEANU GEORGETA, vezi ROCO, M. 3 311
FRIEDERICH, R. vezi AVRAM C. 5 687
GĂLETUŞE, S. vezi CONSTANTINESCU, N. V. 4 465
GEORGESCU EUG., DAN MUCICHESCU, Asupra ciocnirii dintre un pod rulant şi structura portantă 3 395
GLIGOR, T., IVAN ORGOVICI, Studiul nivelului vibraţiilor laterale ale locomotivei Diesel-electrice 060—DA 2 253
GLODEANU. E. V., vezi BARONCEA, A. 1 31
GYENGE CSABA, Studiul tehnologiei prelucrării suprafeţelor elicoidale cu ajutorul versorilor triedrului lui Frenet 2 245
HUIDU, T., Asupra unui model matematic şi experimental al fotoviscoelasticităţii liniare 2 181
HUIDU, T., Asupra unei metode de calcul în fotomecanica bidimensională . . . 5 675
HUIU, C. Vezi CHIRIACESCU, T.S. 3 335
IONESCU, A., CĂTĂRIG, AL., Grinzi reticulate din beton armat şi precomprimat 1 151
IONESCU D., vezi PELECUDI, CHR. 3 531
IONESCU, V., AL. TURTĂ, I. TUTUNEA, Dezlocuirea fluidelor din zăcămintele de ţiţei prin injecţia unui amestec bifazic 1 73
IORDACHE, GH., Asupra presiunii în maşinile de extrudere cu disc, tip con-placă 2 205
IVANCENCO, S., Utilizarea teoriei „lagărului foarte scurt" în proiectarea lagărelor hidrodinamice radiale 3 451
IVANCENCO, S., Calculul hidrodinamic al lagărului radial de alunecare, echipat cu cuzinet poros şi rezervor circular deschis 4 493
JELEV, I. vezi ZAREA ŞT. 4 503
JELEV I. vezi POPESCU, M. 6 819
MANGERON, D. vezi CHIRIACESCU, T. S., ... 3 335
MANOLESCU, I.N., M. DRANGA, Analiza răspunsului dinamic al mecanismelor cu ajutorul sistemelor automate de prelucrarea datelor 1 51
MANOLESCU, I.N. vezi NIŢESCU, N.P. 3 351
MARCU, A. vezi MINCU RODICA 3 407
MARCU, V. vezi RIPIANU A. 6 879
MARINESCU, P. vezi CARAFOLI, E. 2 163
MASALAR, L. vezi OPREAN, A. 3 455
MATEESCU D., I. DIMOIU, Influenţa tensiunilor reziduale din sudare asupra fenomenului de oboseală a elementelor din oţel. 1 41
MINCĂ I., vezi BUZDUGAN GH. 3 369
MINCU RODICA, A. BĂLĂŞESCU, A. MARCU, Unele rezultate ale utilizării corelaţiilor multiple în probleme de mecanica pămînturilor 3 407
MINOIU, I., N. POSEA, N. ANTONESCU, N. TATU, Contribuţii la cercetarea la oboseală a lanţurilor de transmisie simple şi multiple, avînd zalele executate cu asamblări cu strîngere elastică 2 229
MITRACHE M., Posibilităţile de reproducere în laborator a solicitărilor reale din exploatare în transmisia autoturismului Dacia 1300. . . . . 6 889

MLADINESCU, T., Aspecte noi în cercetarea capacității portante a roților dințate cilindrice cu dantura dreaptă, executate din poliamidă cu adaos de bisulfură de molibden, ... 3 429
MUCICHESCU, D. vezi GEORGESCU EUG. 3 395
MUNTEANU, I., ANA NEGRU, Rigiditatea barei drepte în statica, stabilitatea și dinamica structurilor 5 665
MUNTEANU, M., Asupra comportării îmbinării bolț-ochi la încărcări care depășesc limita de elasticitate. 6 905
NEDELCU, ȘT., Metodă de rezolvare numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul II, întîlnite în mecanica fluidelor 6 773
NEGRU, ANA, vezi MUNTEANU, I. 5 665
NICA, AL., Tribologia nucleară 3 441
NIȚESCU, N. P., NICOLAE I., MANOLESCU, Asupra sintezei cinematice a mecanismelor spațiale cu cinci axe 3 351
ONU G., Calculul radierilor elastice pe coloane 5 701
ONU, G., Calculul diafragmelor cu buiandrugi subțiri prin metoda elementelor finite 6 837
OPREAN, A., LIVIU MASALAR, CONSTANTIN TÎRCOLEA, Modificări în cinematica pompelor și motoarelor hidrostatice în scopul ameliorării performanțelor dinamice. 3 455
OPRESCU GABRIELA, Ecuațiile Euler generalizate pentru mișcarea perturbată 6 781
ORGOVICI, I. vezi GLIGOR, T. 2 253
PANAITESCU, V., vezi, FLOREA JULIETA 4 485
PANAITESCU, V., Transferul turbulent de căldură și de masă în conducte netede . 6 811
PANDREA, N., Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul teoriei vectorilor duali . . 6 789
PASCOVICI, M., Întinderea filmului continuu de lubrefiant între două suprafețe inelare plane paralele în rotație 5 761
PATRAULEA, N.N., S. DRĂGHICI, Studiul influenței discretizării consumului de propelant asupra optimizării zborului vertical al rachetei 1 3
PAVEL, A. Parametrii funcționării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcție de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. II. 2 263
PAVEL, A., Parametrii funcționării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcție de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. III. 3 381
PELECUDI, CHR., DAN IONESCU, Analiza structural-geometrică a mecanismelor singulare 4C—5C. 4 531
POCIOIANU, FL. Rezolvarea numerică a ecuației diferențiale a presiunii din lagărele hidrodinamice cilindrice pentru lubrefiant bifazic 6 925
POPESCU, M., Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice și stațiilor automate. 4 521
POPESCU, M. vezi ZAREA, ȘT.,. 4 503
POPESCU, M., I. JELEV., Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice concepute pe scheme complexe 6 819
POPESCU, ȘT., vezi BUDA, C. 4 513
POPESCU, ȘT., vezi BUDA, C. 6 803
POSEA, N., vezi MINOIU, I. 2 229
POȘCHINĂ, I., Curgerea în regim laminar prin rezistențe hidraulice variabile . . 1 19
RIPIANU, A. Considerații asupra calculului contragreutăților afectate arborilor cotiți 5 731
RIPIANU, A., VASILE MARCU, Considerații asupra calculului momentului de inerție mecanic axial al unui cot plus echipajele mobile aferente acestuia aparținînd unui arbore cotit 6 879
ROCO, M., Cercetări experimentale asupra vitezei critice în conductele pentru transportul hidraulic al solidelor 1 101
ROCO, M., GEORGETA FRĂSINEANU, Metodă de calcul al caracteristicilor de curgere ale fluidelor bifazate lichid-solid prin conducte și canale 3 311
SAFTA VOICU, Contribuții la cercetarea deformării plastice în condițiile stării spațiale de solicitare 5 755
SILVESTRU, C, vezi BĂRĂNESCU, G. 1 113
SIMIONESCU, I., CEZAR DUCA, Sinteza mecanismelor pentru realizarea poziților asociate cu ajutorul operatorilor matriceali 6 855
STAN, AL., Asupra noțiunii de permeabilitate a unei fisuri deschise într-un zăcămînt petrolifer 3 325

STERE, D. M., Metode numerice de analiză structurală 5 647
STOICESCU, P.A., Contribuţii privind metodele de înlăturare a tangajului automobilului la demarare sau frînare 2 213
SUCIU, P., vezi CUCUREZEANU, I. 1 145
SUCIU, P. vezi CUCUREZEANU, I. 4 591
SUSEA, A., P. CHEBELEU, C. ENACHE, O nouă metodă de determinare a parametrilor curbei de depresiune reale în cazul puţurilor 1 89
TACU, T., vezi CONSTANTINESCU, I. 2 193
TATU, N., vezi MINOIU, I. 2 229
TEODORESCU, M., Influenţa stării structurale şi a caracteristicilor mecanice ale oţelului OLC 45 asupra prelucrabilităţii prin aşchiere. 5 747
TÎRCOLEA, C., vezi OPREAN, A. 3 455
TRUICĂ, N., Un model matematic al sistemului oscilant format de suspensia şi transmisia unui automobil aflat în regim de funcţionare tranzitoriu. 5 715
TUDOR, A., Distribuţia fluxului termic de frecare în elementele cuplei de tip roţi dinţate 1 6
TURTĂ, AL., vezi IONESCU, V. 1 7
TUTUNEA, I. vezi IONESCU, V. 1 7
ŢOPA, N., Un algoritm de calcul al plăcilor plane cu rezemare elastică prin metoda elementelor finite 4 56
VLAD, I. V., Interpretarea informaţiei în interferometria holografică 1 13
VLAD, I. V., Anemometrie cu laser, ... 2 291
ZAREA, ŞT., M. POPESCU, I. JELEV, Calculul rezervoarelor de aer din sistemele hidraulice sub presiune, în ipoteza mişcării lent variabile 4 503
ZIDARU, GH., Proprietăţi geometrice ale profilelor NACA 5 741

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 36, nr. 1 ianuarie-februarie 1977

SUMAR

STUDII

N. N. PATRAULEA, S. DRĂGHICI, Studiul influenţei discretizării consumului de propelant asupra optimizării zborului vertical al rachetei 3

CORNELIU I. CRĂCIUN, Relaţii între viteze şi debite pentru mişcarea stratificată în conducte geometric asemenea 9

ION POŞCHINĂ, Curgerea în regim laminar prin rezistenţe hidraulice variabile . . . 19

A. BARONCEA, N. CRISTESCU, E. GLODEANU, Un model pentru descrierea deformării sării 31

DAN MATEESCU, IULIU DIMOIU, Influenţa tensiunilor reziduale din sudare asupra fenomenului de oboseală a elementelor din oţel 41

N.I. MANOLESCU, M. DRANGA, Analiza răspunsului dinamic al mecanismelor cu ajutorul sistemelor automate de prelucrare a datelor 51

ANDREI TUDOR, Distribuţia fluxului termic de frecare în elementele cuplei de tip roţi dinţate 61

V. IONESCU, AL. TURTĂ, I. TUTUNEA, Dezlocuirea fluidelor din zăcămintele de ţiţei prin injecţia unui amestec bifazic 73

A. SUSEA, P. CHEBELEU, C. ENACHE, O nouă metodă de determinare a parametrilor curbei de depresiune reale în cazul puţurilor 89

MIHAIL ROCO, Cercetări experimentale asupra vitezei critice în conductele pentru transportul hidraulic al solidelor 101

GEORGE BĂRĂNESCU, CONSTANTIN SILVESTRU, Echilibrajul momentelor forţelor de inerţie la motorul în V cu cilindri intercalaţi 113

I. CONSTANTINESCU, D. ANTONESCU, Unele aspecte experimentale ale cercetărilor privind biomecanica genunchiului şi antebraţului 129

V.I. VLAD, Interpretarea informaţiei în interferometria holografică 137

I. CUCUREZEANU, R. CHIŞLEAG, P. SUCIU, Asupra interpretării franjelor în interferometria holografică 145

NOTE

A. IONESCU, AL. CĂTĂRIG, Grinzi reticulate din beton armat şi precomprimat 151

RECENZII

155

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratolvasó
435/1978

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

STUDIUL INFLUENȚEI DISCRETIZĂRII CONSUMULUI DE PROPELANT ASUPRA OPTIMIZĂRII ZBORULUI VERTICAL AL RACHETEI

de N. N. PATRAULEA și D. DRĂGHICI
Institutul de mecanică a fluidelor și construcții aerospațiale

Prezentăm aici o metodă de aplicare a programării dinamice [1] în scopul optimizării altitudinii maxime a unei rachete sondă. Aplicăm apoi metoda la studiul influenței discretizării consumului de combustibil și al variației altitudinii optimizate cu anumiți parametrii importanți ai rachetei ca viteza de ejecție a gazelor și coeficientul de rezistență aerodinamică.

1. Considerînd zborul ascendent al rachetei pe verticală și luînd ca variabilă independentă altitudinea z, iar ca variabilă dependentă viteza v, ecuația de mișcare se poate scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -V\,v\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln\frac{m}{m_0}\right) - g - \frac{R(v,z)}{m}, \qquad (1)$$

unde prin m s-a însemnat masa curentă, prin m_0 masa inițială, prin g, accelerația gravitației, prin $R\ (v,z)$ forța de rezistență aerodinamică și prin V viteza de ejecție a gazelor motorului. Pentru densitate se consideră atmosfera standard.

În vederea simplificării calculelor de optimizare facem ipotezele: 1) propelantul se consumă discret, corespunzător împărțirii propelantului într-un număr finit de rații (egale sau neegale). 2) Presupunem mai departe că, în vederea soluționării ecuației de mișcare (1), nu se comit erori apreciabile dacă se consideră că fiecare rație de propelant arde instantaneu producînd un salt corespunzător al vitezei rachetei. 3) În vederea calculelor numerice, împărțim axa Oz într-un număr de intervale (Z_{i+1}, Z_i), suficient de mici și admitem că pe fiecare interval are loc un zbor liber (fără motor) urmat în z_{i+1} de un salt de viteză corespunzător arderii propelantului $m_{j(i)} - m_{j(i+1)}$, unde indicele j corespunde stărilor masice ale rachetei.

În virtutea acestor ipoteze de calcul variația masei rachetei (programul de ardere) poate fi reprezentat printr-un graf ca cel din figura 1. În fiecare

punct (i, j) există $j - 1$ variante de consum dintre care trebuie aleasă cea optimă.

Este necesar să mai facem observaţia că, avînd în vedere ipoteza 3), calculele se apropie cu atît mai bine de realitate cu cît raţiile de consum sînt mai mici.

2. Pentru optimizare avem de rezolvat următoarea ecuaţia funcţională :

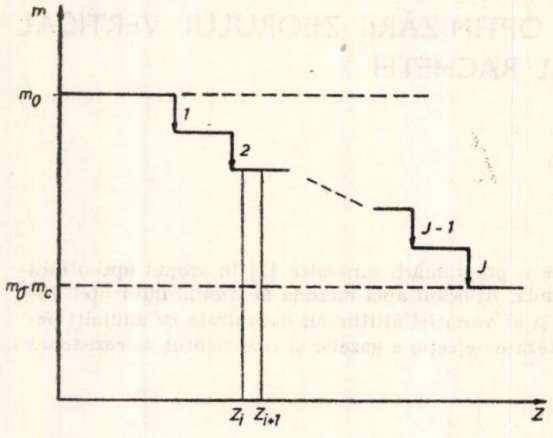


Fig. 1

$$v(z_i, m_j) = \max_{(j' \leqslant j)} \{f(V(z_{i-1}, m_{j'}), z_i) + w(m_{j'}, m_j)\}, \quad (2)$$

unde prin f s-a însemnat viteza cu care ajunge racheta în z_i, după parcurgerea arcului de traiectorie (z_i, z_{i-1}) fără motor, cu masa $m_{j'}$ şi viteza iniţială $v(z_{i-1}, m_{j1})$. Prin $w(m_{j'}, m_j)$ s-a notat saltul de viteză produs de arderea unei cantităţi de propelant $m_{j'} - m_j$. Datorită restricţiilor $j' \leqslant j$; $j', j \subset J$, unde J este mulţimea indicilor valorilor discrete ale masei rachetei, valorile $w(j', j)$ alcătuiesc o matrice triunghiulară invariabilă care se calculează o singură dată şi se memorează în calculator :

$$w(j', j) = V \ln \frac{m_{j'}}{m_j}.$$

În urma rezolvării ecuaţiei (2) prin recurenţă rezultă la fiecare altitudine z_i şi la fiecare stare m_j indicele precedent $j'(j, i-1)$ corespunzător variantei de consum, care, dintre $j - 1$ variante la z_i şi la masa restantă m_j, generează viteza $v(z_i, m_j)$ cea mai mare. Vor exista atîtea traiectorii de luat în consideraţie cîte mase discrete au fost luate. Dintre acestea se va alege cea mai bună din punctul de vedere al altitudinii maxime. Rezultă că traiectoria optimă se poate determina începînd de la starea finală $v(J, I) = 0$, I fiind la altitudinea maximă şi mergînd regresiv prin transformările $j\,(I)_{max}, \ldots 2, 1$, transformări consemnate în calculator.

3. Vom remarca faptul că metoda se poate aplica şi la o rachetă cu mai multe trepte fără nici o schimbare esenţială.

Pe de altă parte, ecuaţia funcţională (2) poate să fie însoţită şi de alte restricţii. De pildă, dacă se ţine seama de viteza reală de ardere a propelantului, atunci vom adopta restricţia suplimentară :

$$m_{j'} - m_j \leqslant q \cdot \Delta t\,(j', i),$$

unde Δt este durata zborului liber pe intervalul respectiv cu $m_j = \text{const.}$, iar q debitul maxim admis al propelantului pentru motorul rachetei.

4. Calculele și diagramele au fost făcute pentru o rachetă cu o masă inițială de 8 kg, avînd un vîrf conic cu semideschiderea de 8° și un corp cilindric cu o svelteță $1/d = 33$.

Diagramele din figura 2 reprezintă cîteva traiectorii optime, obținute pentru diferite discretizări ($J = 1$, $J = 2$, $J = 10$). Se observă

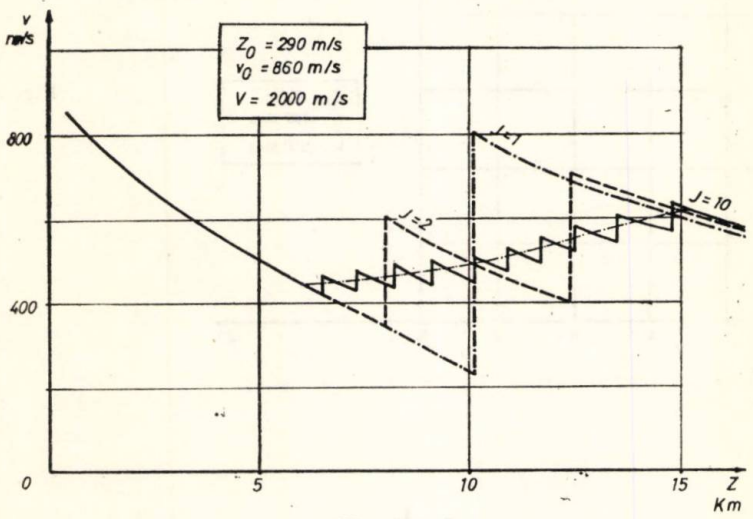


Fig. 2

că în toate cazurile viteza rachetei oscilează în jurul unei viteze medii corespunzătoare arderii continue a propelantului.

În figura 3 este arătată influența indicelui de discretizare J, numărul de porții de propelant, asupra altitudinii maxime a rachetei. De remarcat că 96% din creșterea înălțimii se obține prin arderea propelantului în două rații, iar 85% prin arderea într-o singură rație. Acest fapt ilustrează posibilitatea aplicării metodei prezente de discretizare a consumului de propelant fără a introduce erori notabile față de arderea ideală continuă.

Aplicarea optimizării consumului prin discretizare aduce avantaje cu atît mai importante cît cît viteza de ejecție a gazelor motorului este mai mare (vezi fig. 4). În aceeași figură este arătată și dependența performanței rachetei de raportul dintre masa de propelant m_c și masa totală în momentul inițial, m_0.

Programul permite și studiul variației altitudinii maxime cu rezistența aerodinamică a rachetei. În figura 5 se remarcă faptul că optimizarea produce o creștere relativă cu atît mai mare cu cît C'_x, coeficientul de rezistență al unei rachete virtuale de referință, este mai mare. Pentru C'_x foarte mic această creștere relativă cît și cea absolută tind spre zero, semnificația fiind aceea că înălțimea maximă neoptimizată de

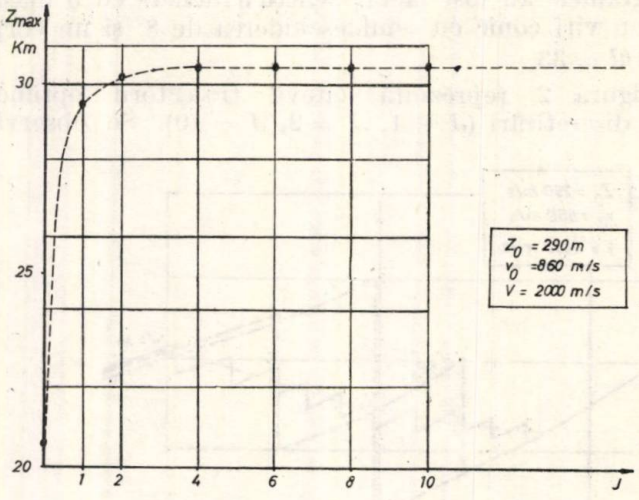

Z_{max}
Km
30
25
20
1
2
4
6
8
10
J
Z_0 = 290 m
v_0 = 860 m/s
V = 2000 m/s

Fig. 3

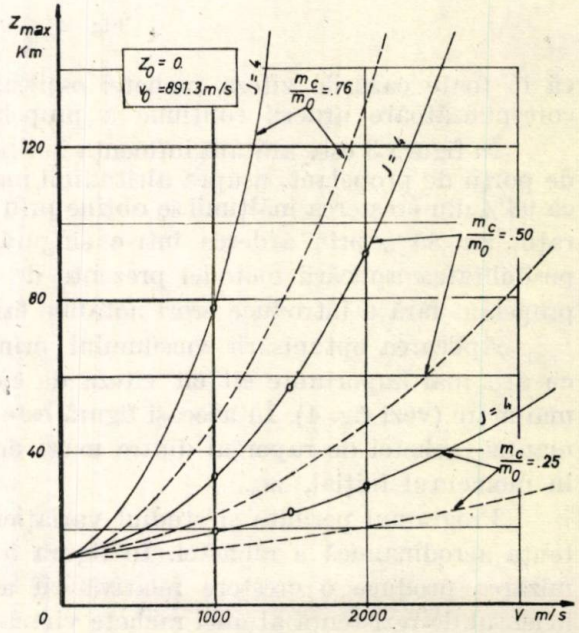

Z_{max}
Km
Z_0 = 0
v_0 = 891.3 m/s
J = 4
$\frac{m_c}{m_0}$ = .76
J = 4
120
$\frac{m_c}{m_0}$ = .50
80
J = 4
$\frac{m_c}{m_0}$ = .25
40
0
1000
2000
V m/s

Fig. 4

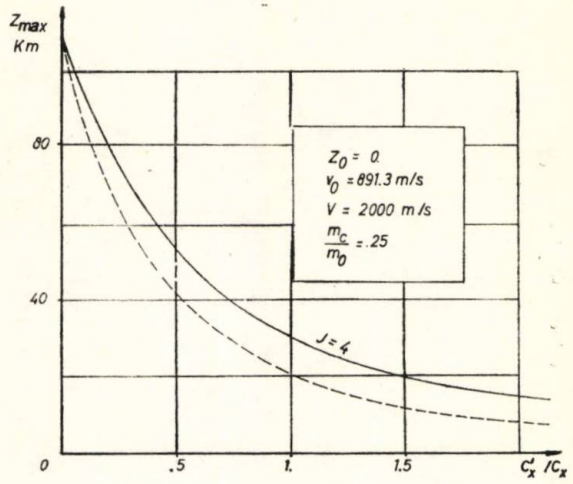


Fig. 5

referință (curba trasată cu linie întreruptă) a fost considerată aceea care corespunde arderii inițiale a întregului propelant, ceea ce coincide cu optimizarea în vid.

Primită la redacție la 26 ianuarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. R. E. Bellman, S. E. Dreyfus, *Programarea dinamică aplicată*, București, Edit. tehnică, 1976.

RELAȚII ÎNTRE VITEZE ȘI DEBITE PENTRU MIȘCAREA STRATIFICATĂ ÎN CONDUCTE GEOMETRIC ASEMENEA

de CORNELIU I. CRĂCIUN

Institutul politehnic București

Se consideră curgerea stratificată a acelorași două lichide vîscoase în două conducte cu configurații geometric asemenea (contur și stratificări). Dacă se realizează același gradient de presiune, atunci raportul vitezelor din puncte omoloage ale celor două conducte este egal cu pătratul raportului de asemănare. Raportul debitelor fiecărui lichid din cele două conducte este egal cu puterea a patra a raportului de asemănare.

I. FORMULAREA PROBLEMEI

Mișcarea laminară a unui fluid vîscos în conducte de diferite secțiuni a fost tratată de numeroși autori [1]. Mai recent a fost abordată curgerea a două fluide stratificate sub același gradient de presiune [2], [3], [4]. Pentru conducta de secțiune dreptunghiulară a fost posibilă o tratare analitică completă. Aplicații numerice au pus în evidență o creștere apreciabilă a capacității de transport (debitul transportat sub același gradient de presiune) ca urmare a injecției [5]. Pentru conducta circulară de rază R tratarea problemei este mult mai dificilă. Un prim pas în simplificarea ei, fără a-i micșora generalitatea, este reducerea la conducta de rază unitate. Vom arăta că rezolvarea problemei pentru cercul unitar, adică determinarea vitezelor și debitelor, permite scrierea lor imediată pentru conducta de rază R. În cele ce urmează vom stabili relații de trecere pentru conducte de secțiuni oarecari, asemenea geometric. Relațiile pentru conducte circulare vor apare ca un caz particular.

II. CURGEREA UNUI FLUID ÎN CONDUCTE GEOMETRIC ASEMENEA

Să considerăm o conductă de secțiune oarecare și să alegem axele astfel încît Oz să fie dirijată în lungul curgerii, iar Ox și Oy în secțiunea normală. Curba C, urma conturului conductei în planul xOy, limitează domeniul D (fig. 1 *a*). Viteza $v(x, y)$ este soluție a problemei la limită [1]:

$$\Delta v(x, y) = -K \quad \text{în } D, \tag{1}$$

$$v(x, y) = 0 \qquad \text{pe } C. \tag{2}$$

Cînd curgerea are loc sub acțiunea unui gradient de presiune, constanta K are expresia

$$K = -\frac{1}{\mu} P. \tag{3}$$

Numim conducta de secțiune D conductă de referință. Fie o a doua conductă de secțiune $\mathcal{D}$, geometric asemenea cu D (fig. 1 *b*) și notăm cu a valoarea raportului de asemănare.

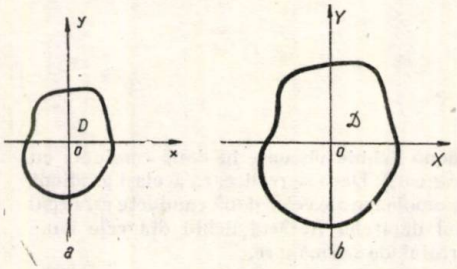


Fig. 1

Presupunem că în amîndouă conductele curge același lichid (ρ și μ) și se realizează același gradient de presiune P (aceeași variație de presiune Δp pe aceeași distanță Δl în lungul axei Oz). Cu aceste ipoteze constanta K din ecuația vitezei (1) este aceeași în ambele curgeri.

Ne propunem să stabilim o relație între viteza $v(x, y)$, funcție supraarmonică în D și viteza V în a doua conductă. Totodată ne propunem să stabilim legătura între debite.

Viteze

Schimbarea de variabile,

$$X = ax, \quad Y = ay, \tag{4}$$

transformă domeniul D din planul xOy într-un domeniu $\mathcal{D}$ geometric asemenea în planul XOY, cu raportul de asemănare a.

Prin această schimbare de variabile funcția $v(x, y)$ devine o funcție de X și Y, astfel că în puncte corespondente

$$v(x, y) = v\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right) = V(X, Y). \tag{5}$$

Din (4) și (5) avem

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = a \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = a \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \tag{7}$$

și de aici

$$\Delta_{x,y} v(x, y) = a^2 \Delta_{X,Y} V(X, Y). \tag{8}$$

Cu (8), ecuația (1) se scrie

$$a^2 \Delta V(X, Y) = -K \text{ în } \mathcal{D}, \tag{9}$$

la care se adaugă condiția pe contur dedusă din (2) și (5):

$$V(X, Y) = 0 \quad \text{pe } \mathscr{C}. \tag{10}$$

Vom face acum schimbarea de funcție

$$\mathscr{V}(X, Y) = a^2 V(X, Y), \tag{11}$$

cu care (9) și (10) se scriu

$$\Delta \mathscr{V}(X, Y) = -K \text{ în } \mathscr{D}, \tag{12}$$

$$\mathscr{V}(X, Y) = 0 \quad \text{pe } \mathscr{C}. \tag{13}$$

Aceasta este o problemă la limită pentru domeniul $\mathscr{D}$ analoagă problemei (1), (2) pentru domeniul D, deci $\mathscr{V}(X, Y)$ reprezintă viteza în curgerea de tip Poiseuille în noua conductă în condiții similare (viscozitate și gradient de presiune).

În baza egalităților (5) și (11) putem scrie

$$\mathscr{V}(X, Y) = a^2 v(x, y). \tag{14}$$

TEOREMA 1. *Pentru mișcarea de tip Poiseuille a aceluiași lichid în două conducte geometric asemenea, sub același gradient de presiune, raportul vitezelor în puncte omoloage este egal cu pătratul raportului de asemănare.*

Tot în baza egalităților (5) și (11) mai putem scrie

$$\mathscr{V}(X, Y) = a^2 v\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right). \tag{15}$$

Să considerăm planele xOy și XOY suprapuse.

TEOREMA 2. *Viteza în mișcarea Poiseuille într-o conductă $\mathscr{D}$ sub gradient de presiune P se obține din viteza sub același gradient de presiune într-o conductă D, de secțiune geometric asemenea în raportul de asemănare „a", înlocuind variabilele cu rapoartele $\frac{X}{a}$, respectiv $\frac{Y}{a}$ și amplificînd funcția cu a^2.*

Aplicație. Pentru conducte circulare se alege drept conductă de referință cea cu secțiunea cerc de rază unitate. Viteza, soluție a problemei (1), (2), este

$$v(x, y) = \frac{K}{4}(1 - x^2 - y^2). \tag{16}$$

Conform teoremei 2, viteza în conducta de rază R (raport de asemănare $a = \frac{R}{1} = R$) se obține din (16):

$$v(x, y) = R^2 \frac{K}{4}\left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right] = \frac{K}{4}[R^2 - x^2 - y^2],$$

repartiție bine cunoscută.

Debite

Debitul în conducta de referință se calculează ca integrală a vitezei pe domeniul D.

$$Q = \iint_D v(x, y)\, dx\, dy. \tag{17}$$

Debitul în conducta de secțiune $\mathcal{D}$ se calculează cu o formulă analoagă

$$\mathcal{Q} = \iint_{\mathcal{D}} \mathcal{V}(X, Y)\, dX\, dY. \tag{18}$$

Dacă facem în ultima integrală schimbarea de variabile (4) și ținem seama de (14), avem

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathcal{V}(X, Y)\, dX\, dY = \iint_D a^2 v(x, y) \cdot a dx \cdot a dy = a^4 \iint_D v(x, y)\, dx\, dy \tag{19}$$

sau

$$\mathcal{Q} = a^4 Q \tag{20}$$

Debitul în conducta $\mathcal{D}$ se obține înmulțind debitul din conducta de referință cu puterea a patra a raportului de asemănare.

TEOREMA 3. *Raportul debitelor din mișcarea Poiseuille în două conducte geometric asemenea în care se realizează același gradient de presiune este egal cu puterea a patra a raportului de asemănare.*

Aplicație. Pentru conducta circulară de rază unitate, debitul calculat cu ajutorul vitezei (16) este

$$Q = \frac{K\pi}{8}$$

Conform teoremei 3, debitul în conducta de rază R este

$$\mathcal{Q} = \frac{K\pi}{8} R^4,$$

formulă cunoscută sub numele de legea Hagen-Poiseuille.

III. CURGEREA A DOUĂ LICHIDE STRATIFICATE ÎN CONDUCTĂ

Să considerăm o conductă de secţiune D în care curg stratificate, sub acelaşi gradient de presiune P, două lichide, de viscozităţi μ_1, respectiv μ_2. Alegînd în secţiunea normală axele ca în figura 2*a*, problema la limită pentru viteze în cele două domenii ocupate de fluide se scrie [2]:

$$\Delta v_1(x, y) = -K_1 \quad \text{în } D_1, \tag{21}$$

$$\Delta v_2(x, y) = -K_2 \quad \text{în } D_2, \tag{22}$$

$$v_1(x, y) = 0 \quad \text{pe } C_1, \tag{23}$$

$$v_2(x, y) = 0 \quad \text{pe } C_2, \tag{24}$$

$$v_1(x, y) = v_2(x, y) \quad \text{pe } C_0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = m \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} \quad \text{pe } C_0. \tag{26}$$

S-a notat aici

$$-\frac{1}{\mu_1} P = K_1, \quad -\frac{1}{\mu_2} P = K_2, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = m. \tag{27}$$

Să facem aceeaşi schimbare de variabile (4). În planul XOY obţinem un domeniu $\mathcal{D}$ format din reuniunea domeniilor $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ (figura 2*b*). Figurile sînt geometric asemenea în raportul de asemănare a.

Viteze

Prin schimbarea de variabile (4), funcţiile $v_1(x, y)$ şi $v_2(x, y)$ devin funcţii de X şi Y,

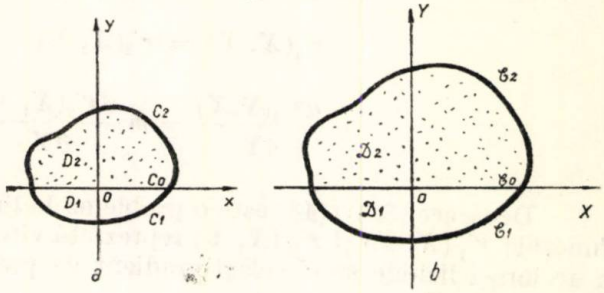


Fig. 2

$$v_1(x, y) = v_1\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right) = V_1(X, Y), \tag{28}$$

$$v_2(x, y) = v_2\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right) = V_2(X, Y). \tag{29}$$

Ecuaţiile de tip Poisson (21) şi (22) se transformă în conformitate cu (8):

$$a^2 \Delta V_1(X, Y) = -K_1 \quad \text{în } \mathcal{D}_1, \tag{30}$$

$$a^2 \Delta V_2(X, Y) = -K_2 \quad \text{în } \mathcal{D}_2. \tag{31}$$

În baza egalităţilor (28) şi (29) condiţiile la limită (23), (24) şi (25) se scriu imediat

$$V_1(X, Y) = 0 \qquad \text{pe } \mathscr{C}_1, \tag{32}$$

$$V_2(X, Y) = 0 \qquad \text{pe } \mathscr{C}_2, \tag{33}$$

$$V_1(X, Y) = V_2(X, Y) \qquad \text{pe } \mathscr{C}_0. \tag{34}$$

Dacă ţinem seama de (6) şi (7) condiţia (26) pe interfaţă devine

$$\frac{\partial V_1(X, Y)}{\partial Y} = m \frac{\partial V_2(X, Y)}{\partial Y} \quad \text{pe } \mathscr{C}_0. \tag{35}$$

Vom face acum schimbările de funcţii

$$\mathscr{V}_1(X, Y) = a^2 V_1(X, Y), \tag{36}$$

$$\mathscr{V}_2(X, Y) = a^2 V_2(X, Y). \tag{37}$$

Noile funcţii satisfac problema la limită

$$\Delta \mathscr{V}_1(X, Y) = -K_1 \qquad \text{în } \mathscr{D}_1, \tag{38}$$

$$\Delta \mathscr{V}_2(X, Y) = -K_2 \qquad \text{în } \mathscr{D}_2, \tag{39}$$

$$\mathscr{V}_1(X, Y) = 0 \qquad \text{pe } \mathscr{C}_1, \tag{40}$$

$$\mathscr{V}_2(X, Y) = 0 \qquad \text{pe } \mathscr{C}_2, \tag{41}$$

$$\mathscr{V}_1(X, Y) = \mathscr{V}_2(X, Y) \qquad \text{pe } \mathscr{C}_0, \tag{42}$$

$$\frac{\partial \mathscr{V}_1(\mathrm{V}, X)}{\partial Y} = m \frac{\partial \mathscr{V}_2(X, Y)}{\partial Y} \quad \text{pe } \mathscr{C}_0. \tag{43}$$

Deoarece (38)—(43) este o problemă la limită identică cu (21)—(26), funcţiile $\mathscr{V}_1(X, Y)$ şi $\mathscr{V}_2(X, Y)$ reprezintă vitezele în curgerea stratificată a aceloraşi lichide sub acelaşi gradient de presiune P în noua conductă de secţiune $\mathscr{D}$.

Din (36), (37) şi (28), (29) avem :

$$\mathscr{V}_1(X, Y) = a^2 v_1(x, y), \tag{44}$$

$$\mathscr{V}_2(X, Y) = a^2 v_2(x, y) \tag{45}$$

sau

$$\mathscr{V}_1(X, Y) = a^2 v_1\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right), \tag{46}$$

$$\mathscr{V}_2(X, Y) = a^2 v_2\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right). \tag{47}$$

S-a demonstrat astfel că în curgerea a două fluide stratificate se păstrează aceleași relații de tip (14), (15) ca în curgerea unui singur lichid în întreaga conductă. Teoremele 1 și 2 își păstrează valabilitatea.

TEOREMA I. *Pentru curgerea a două lichide stratificate în două conducte geometric asemenea, sub același gradient de presiune, raportul vitezelor în puncte omoloage este egal cu pătratul raportului de asemănare.*

TEOREMA II. *În curgerea stratificată a două lichide viscoase sub gradient de presiune P, viteza fluidului i ($i = 1$ sau 2) în conducta $\mathscr{D}$ se obține din viteza lui sub același gradient de presiune în conducta D, geometric asemenea în raportul „a" și cu stratificare asemenea, înlocuind variabilele cu rapoartele $\frac{X}{a}$, respectiv $\frac{Y}{a}$ și amplificînd funcția cu pătratul raportului de asemănare.*

Debite

Debitul lichidului de viscozitate μ_1 prin D_1 este

$$Q_1 = \iint_{D_1} v_1(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{48}$$

În a doua conductă, debitul aceluiași lichid prin $\mathscr{D}_1$ se calculează cu formula

$$\mathscr{Q}_1 = \iint_{D_1} \mathscr{V}_1(X, Y)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y. \tag{49}$$

În această integrală vom face schimbarea de variabile (4) și vom ține seama de (44)

$$\iint_{\mathscr{D}_1} \mathscr{V}_1(X, Y)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y = \iint_{\mathscr{D}_1} a^2 v_1(x, y)\, a\mathrm{d}x \cdot a\mathrm{d}y = a^4 \iint_{D_1} v_1(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{50}$$

Rezultă

$$\mathscr{Q}_1 = a^4 Q_1. \tag{51}$$

În mod analog, pentru lichidul de vîscozitate μ_2,

$$\mathscr{Q}_2 = a^4 Q_2. \tag{52}$$

TEOREMA III. *Pentru curgerea stratificată a două lichide viscoase sub același gradient de presiune în două conducte geometric asemenea cu stratificare asemenea, raportul debitelor transportate din același lichid este egal cu puterea a patra a raportului de asemănare.*

Aplicație. Vom ilustra rezultatele de mai sus pe un caz concret tratat în lucrarea [5].

Fie conducta de secţiune pătrată de latură $2a$, în care lichidul de viscozitate μ_1 ocupă stratul inferior de grosime b_1, iar cel de viscozitate μ_2 stratul de grosime b_2 (fig. 3*b*) cu $b_1 + b_2 = 2a$.

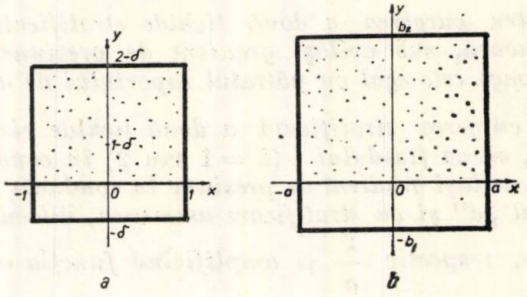


Fig. 3

Stratificarea poate fi caracterizată de parametrul $\delta = \frac{b_1}{a}$, cînd $b_1 = a\delta$, iar $b_2 = a(2 - \delta)$.

Conducta geometric asemenea cu stratificare asemenea, aleasă drept conductă de referinţă, are latura pătratului egală cu 2 (fig. 3*a*). Dacă ne referim la domeniul D_2 de exemplu, viteza se scrie [5]:

$$v_2(x, y) = K_2 \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh} Ny}{\operatorname{sh} N(2-\delta)} - \mathscr{A}_n \left[\operatorname{ch} Ny - \frac{\operatorname{ch} N(2-\delta)}{\operatorname{sh} N(2-\delta)} \operatorname{sh} Ny \right] \right\} \cos Nx, \tag{53}$$

unde

$$N = \frac{(2n+1)\pi}{2} \tag{54}$$

şi

$$\mathscr{A}_n = \frac{m\,[\operatorname{sh} N\delta + \operatorname{sh} N(2-\delta)] - (m-1)\operatorname{ch} N\delta \cdot \operatorname{sh} N(2-\delta)}{\operatorname{ch} N\delta \cdot \operatorname{sh} N(2-\delta) + m \cdot \operatorname{ch} N(2-\delta) \cdot \operatorname{sh} N\delta}. \tag{55}$$

Coeficienţii $\mathscr{A}_n$ depind de parametrul de stratificare δ şi de raportul vîscozităţilor m dar nu depind de latura conductei.

Debitul prin D_2 are expresia

$$Q_2 = K_2 \frac{128}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2-\delta}{2} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1+\mathscr{A}_n}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}\left(N \frac{2-\delta}{2} \right) \right]. \tag{56}$$

Pentru conducta pătrată de latura $2a$, viteza se obţine din (53) conform teoremei II,

$$v_2(x, y) = K_2 a^2 \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh} N\frac{y}{a}}{\operatorname{sh} N(2-\delta)} - \mathscr{A}_n \left[\operatorname{ch} N\frac{y}{a} - \frac{\operatorname{ch} N(2-\delta)}{\operatorname{sh} N(2-\delta)} \operatorname{sh} N\frac{y}{a} \right] \right\} \cos N\frac{x}{a}. \tag{57}$$

Debitul se obține din (56) în baza teoremei III,

$$Q_2 = K_2 a^4 \frac{128}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2-\delta}{2} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1+\mathscr{A}_n}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}\left(N \frac{2-\delta}{2}\right) \right]. \tag{58}$$

Să ne referim acum la cazul deosebit de important din punct de vedere practic, acela al curgerii stratificate în conducta circulară de rază R. Fie h_1 grosimea maximă a lichidului care ocupă zona inferioară. Să luăm ca parametru de stratificare mărimea adimensională $\delta = \frac{h_1}{R}$. Conducta circulară de rază unitate în care grosimea maximă a stratului lichid inferior este δ poate servi drept conductă de referință. Într-adevăr, conductele sînt asemenea cu raportul de asemănare $a = R$ și stratificarea este asemenea.

Dacă se rezolvă problema curgerii stratificate sub același gradient de presiune în conducta de rază unitate, adică dacă se determină vitezele $v_1(x, y)$ și $v_2(x, y)$ și apoi debitele Q_1 și Q_2, atunci, pe baza teoremelor I, II, III, problema este rezolvată pentru orice conductă de rază R.

CONCLUZII

Teoremele privind raportul vitezelor și debitelor în curgerile de tip Poiseuille în două conducte geometric asemenea reduc studiul acestor mișcări la cîte un domeniu reprezentativ pentru fiecare clasă de domenii geometric asemenea. Teoremele sînt valabile și pentru curgeri stratificate. În baza lor studiul mișcărilor stratificate în conducte circulare, problemă la limită de tip (21)—(26), se reduce la cazul conductei de rază unitate.

Această problemă va fi tratată într-o lucrare viitoare.

Primită la redacție la 7 aprilie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Ratip Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik Band VIII, 2, Strömungsmechanik **II** (1963), Springer Verlag.
2. Cr. Stănescu, L. Dumitrescu, *Mișcarea unidimensională a două fluide viscoase grele separate printr-o suprafață plană*, St. cerc. mec. apl., **VII**, *4*, 891, (1956).
3. Michael Bentwich, *Two — phase viscous axial flow in a pipe*, Journal of Basic Engineering Transactions of the A.S.M.E., dec., p. 669, (1964).
4. Corneliu Crăciun, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor viscoase. Mișcări fluide stratificate și cu suprafață liberă*. Teză de doctorat (1970), Institutul politehnic București.
5. Corneliu Crăciun, *Creșterea capacității de transport a conductei dreptunghiulare prin injecția unui al doilea fluid de viscozitate mai mică*, St. cerc. mec. apl., XXXV, *1*, 27, (1976).

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR BUDAPEST 1848

CURGEREA ÎN REGIM LAMINAR PRIN REZISTENȚE HIDRAULICE VARIABILE

de ION POȘCHINĂ

Întreprinderea de utilaj petrolier Tîrgoviște

Curgerea în regim laminar prin rezistențe hidraulice are aplicabilitate practică, la nivel industrial, în cazul robinetelor de reglare.
Pe baza datelor bibliografice și a unor cercetări ample efectuate, se evidențiază datele necesare la elaborarea unei noi metodologii de măsurare a coeficientului de debit K_v precum și o nouă metodă de dimensionare pentru robinetele de reglare cu ventil prin care curgerea se situează în regim laminar.
Rezultatele cercetărilor permit de asemenea întregirea datelor tehnice referitoare la curgerea prin rezistențele hidraulice locale.

Studiul curgerii prin rezistențe hidraulice locale a constituit și constituie una din direcțiile cercetării în domeniul hidraulicii, menită să contribuie la determinarea a cît mai multe elemente privind valorile coeficienților de pierdere locală ζ, respectiv a pierderilor de presiune locală Δp.

Cercetarea curgerii în regim laminar prin rezistențe hidraulice locale, prin aplicabilitatea practică redusă, nu a fost abordată ca o preocupare de anvergură decît în ultimul timp, cînd diversitatea proceselor tehnologice și gradul înalt de automatizare au determinat ca în practică să se întîlnească numeroase astfel de cazuri.

Așa se explică faptul că pînă în prezent nu sînt cunoscute lucrări date publicității și nici date privind modul de variație al coeficienților ζ cu numărul Re.

Cazul cel mai general de rezistență hidraulică locală este robinetul de reglare cu ventil parabolic masiv, profilat (fig. 1).

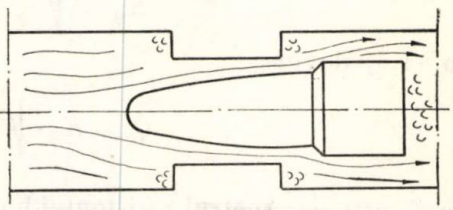


Fig. 1. — Schema simplificată a curgerii printr-un robinet de reglare cu ventil cu un scaun.

El reprezintă o rezistență hidraulică locală variabilă de complexitate maximă (avînd în vedere forma orificiului de trecere), care în caz particular devine o rezistență hidraulică locală fixă.

ST.CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 1, 1977, P. 19–29

Funcționarea lor în domeniul : 0 ... debit max, poate crea condiții pentru trecerea de la regimul de curgere turbulent la cel laminar și invers.

De calculul și alegerea corectă a acestor robinete depinde funcționarea corespunzătoare a sistemului de reglare automată și, în consecință, a procesului tehnologic propriu-zis.

Din cele de mai sus, rezultă că sînt argumente teoretice și practice atît de natură tehnică, cît și economică, ca cercetările în domeniul rezistențelor hidraulice locale să fie îndreptate în primul rînd spre robinetele de reglare.

De aceea în cele ce urmează ne vom ocupa de curgerea în regim laminar prin rezistențele hidraulice în general, cercetările efectuîndu-se pe robinetele de reglare, rezultatele teoretice și experimentale putînd fi extinse într-o etapă viitoare asupra altor tipuri de rezistențe hidraulice.

1. EXPRESIA DEBITULUI CE TRECE PRINTR-O REZISTENȚĂ HIDRAULICĂ

Proprietățile hidraulice ale elementelor circuitelor hidraulice considerate ca rezistențe hidraulice locale sînt date de coeficienții ζ și căderile de presiune Δp, în legătură cu care se cunoaște că :

$$\zeta = \zeta(\mathcal{R}e) \tag{1.1}$$

și

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2} \cdot \zeta, \tag{1.2}$$

Funcție de acestea se determină debitul Q, cu relația

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \cdot F \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \tag{1.3}$$

unde F este aria secțiunii libere de trecere a fluidului, iar ρ masa specifică.

Dacă notăm

$$K_Q = \sqrt{\frac{2}{\zeta}} \cdot F, \tag{1.4}$$

relația (1.3) devine

$$Q = K_Q \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \tag{1.5}$$

în care K_Q este parametrul rezistenței hidraulice locale, similar cu modulul de debit pentru conducte [1].

Se scrie ecuația (1.4) pentru regim turbulent :

$$K_{Q_T} = \sqrt{\frac{2}{\zeta_T}} \cdot F, \tag{1.6}$$

iar din raportarea celor două expresii rezultă

$$K_Q = K_{Q_T} \cdot \zeta_T^{1/2} \cdot \zeta^{-1/2}, \tag{1.7}$$

în care indicele T corespunde regimului turbulent de curgere.

Din relațiile (1.5) și (1.7) rezultă

$$Q = K_{Q_T} \cdot \sqrt{\frac{\zeta_T}{\zeta}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \tag{1.8}$$

sau

$$Q = K_{Q_T} \cdot \frac{1}{\psi(\mathcal{R}e)} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \tag{1.9}$$

în care

$$\psi(\mathcal{R}e) = \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_T}} \tag{1.10}$$

reprezintă corecția la neturbulență (corecția de laminaritate).

Funcție de ψ se definește și gradul de neturbulență n cu expresia

$$n = \psi - \frac{1}{\psi}. \tag{1.11}$$

După cum se cunoaște, pentru exprimarea performanțelor hidraulice ale principalelor rezistențe locale (armături în special), a fost introdus coeficientul K_v exprimat cu ajutorul relației [2]:

$$K_v = \frac{1}{\sqrt{\zeta_T}} \cdot F \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p_E}{\rho_E}}, \tag{1.12}$$

în care indicele E se referă la condițiile etalon de definire a lui K_v și anume: „debitul de apă exprimat în m^3/h, care trece prin rezistența hidraulică producînd $\Delta p = 1$ bar, în intervalul de temperatură $+5 \ldots +30°C$".

Avantajul principal al introducerii acestui coeficient se face simțit în principal la rezistențele hidraulice variabile, la care atît ζ_T, cît și F sînt variabile funcție de gradul de deschidere.

Pentru utilitate, în cele ce urmează se va renunța la coeficienții ζ, F și K_Q, folosind în exclusivitate coeficientul K_v.

Din raportarea ecuației (1.3) la (1.12), rezultă

$$Q = K_v \cdot \psi^{-1}(\mathcal{R}e) \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho} \cdot \frac{\rho_E}{\Delta p_E}}. \tag{1.13}$$

Scriind ecuația (1.13) de două ori, odată pentru condiții oarecare și a doua oară pentru condițiile etalon și raportînd cele două rezultate se obține :

$$Q = K_v \frac{\psi(\mathcal{R}e_E)}{\psi(\mathcal{R}e)} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho} \cdot \frac{\rho_E}{\Delta p_E}} \cdot \tag{1.14}$$

Din relațiile (1.9) și (1.13), rezultă că modulul de debit Kq_T coincide cu coeficientul K_v numai în condițiile în care curgerea prin rezistența hidraulică se menține în regim turbulent, condițiile de încercare fiind cele etalon.

2. CERCETAREA CURGERII LICHIDELOR PRIN REZISTENȚE HIDRAULICE LOCALE, ÎN REGIM LAMINAR

Pentru a elucida principalele probleme legate de curgerea lichidelor prin rezistențe hidraulice locale în regim laminar, se impune cel puțin lămurirea următoarelor probleme :

— stabilirea condițiilor corecte de măsurarea coeficientului K_v ;

— stabilirea numărului $\mathcal{R}e$ care delimitează cele două regimuri de curgere ($\mathcal{R}e$ critic) ;

— determinarea corecției de laminaritate ψ și dependența acesteia de numărul $\mathcal{R}e$.

2.1. STABILIREA CONDIȚIILOR CORECTE DE MĂSURARE A COEFICIENTULUI K_v

Condițiile corecte privind măsurarea coeficientului K_v se pot stabili numai pe cale experimentală, funcție de tipul și forma fiecărui fel de rezistență hidraulică.

Avînd în vedere, experiența existentă în acest domeniu [2], [3], [4] se pot totuși prezenta cerințele general valabile ce trebuie respectate.

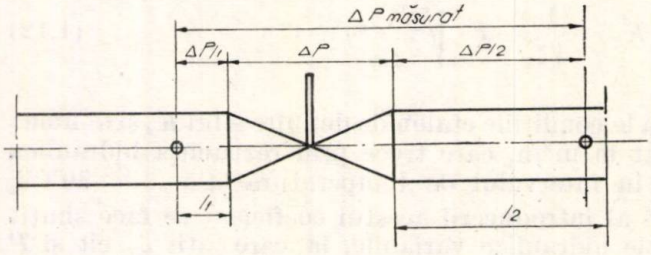


Fig. 2. — Schema simplificată de montare a unei rezistențe hidraulice în instalația de măsurare a coeficientului K_v.

Utilizînd schema simplificată de montare a rezistenței hidraulice într-o instalație de măcurare a coeficientului K_v (fig, 2), se pot preciza următoarele condiții :

— punctele în care se stabilescu prizele de presiune, în amonte și aval de rezistența hidraulică, pentru măsurarea căderii de presiune Δp, se vor determina astfel încît măsurătorile să nu fie influențate nici de efectul rezistențelor locale de pe linie, dar nici de cele ale rezistenței hidraulice ce se cercetează ;

— în calcule să se țină seama de valorile pierderilor de presiune pe porțiunile l_1 și l_2, adică Δp_{l_1} și Δp_{l_2};

— pentru menținerea temperaturii în domeniul invariabilității viscozității apei și înlăturarea surselor de trepidații și zgomote, este necesar ca instalația să se amenajeze într-o încăpere specială;

— pentru măsurarea debitului se pot utiliza diafragme al căror domeniu de măsurare se va completa la debite mici cu metoda volumetrică (sau gravimetrică);

— măsurarea căderii de presiune Δp se poate face cu manometre diferențiale cu mercur, al căror domeniu de măsurare la valori mici se poate completa cu manometre diferențiale cu un lichid a cărui greutate specifică este mai mică decît a mercurului și mai mare decît a apei, funcție de gradul de finețe dorit.

2.2. STABILIREA NUMĂRULUI REYNOLDS CRITIC

2.2.1. *Stabilirea relației de definiție.* Din figura 3 rezultă că suprafața curentă de trecerea fluidului prin robinetul de reglare cu ventil, la valoarea h a cursei este aria laterală a trunchiului de con care are baza mare egală cu aria transversală a ventilului la cota y, cotă determinată prin ducerea unei perpendiculare de pe muchia scaunului pe tangenta la suprafața profilată a ventilului.

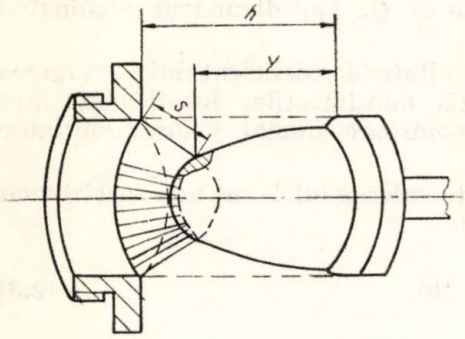


Fig. 3. — Suprafața de trecere ventil-scaun.

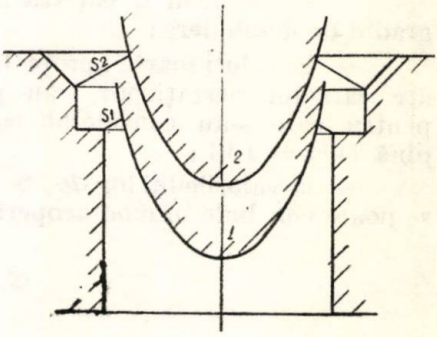


Fig. 4. — Schimbarea punctului de reglare 1 și 2 sînt poziții succesive ale ventilului în timpul deschiderii.

Pentru asemenea cazuri, expresia numărului $\mathcal{R}e$ este [5]

$$\mathcal{R}e = \frac{V_m \cdot 2S}{\nu}. \tag{2.1}$$

Deoarece forma conturului ventilului este experimental determinată, rezultă că valoarea lui S nu poate fi calculată ci numai determinată prin măsurători care în practică s-au dovedit foarte greoaie.

Dacă se merge mai departe cu analiza, se constată că de fapt muchia scaunului de pe care se duce perpendiculara pe suprafața ventilului se schimbă în timpul funcționării, așa cum rezultă din figura 4.

Cele de mai sus sînt argumente care arată că utilizarea formulei (2.1) este foarte greoaie.

Pe lîngă deficienţele arătate, utilizarea lui S în expresia numărului $\mathcal{R}e$, nu făcea posibil ca rezultatele cercetărilor să poată fi extinse la calculul de alegere a robinetelor de reglare care este legat nemijlocit de diametrul scaunului, fapt care ar fi diminuat foarte mult utilitatea datelor obţinute.

A fost astfel adoptată [6] expresia (2.2) :

$$\mathcal{R}e_e = 0{,}353 \frac{Q}{\nu d_s} \tag{2.2}$$

în care : Q — debitul, în m^3/h ; ν — viscozitatea cinematică, în m^2/s; d_s — diametrul scaunului, în mm.

2.2.2. *Rezultatele cercetărilor experimentale.* În vederea atingerii obiectivului propus, s-au executat o serie de măsurători în cadrul laboratorului de tehnica curgerii din cadrul I.U.P. Tîrgovişte [2], [7].

Rezultatele cercetărilor efectuate, au fost centralizate pentru fiecare robinet, ca în tabelul 1.

Din aceste date experimentale, pe baza unor simple observaţii, se pot trage deja unele concluzii şi anume :

— în cazul curgerii turbulente coeficientul n este nul, coeficientul ψ are valoarea unitară, iar K_{QT} este identic cu K_v;

— coeficientul ψ variază funcţie de Q, Δp, diametrul nominal şi gradul de deschidere ;

— la valori foarte apropiate de unitate ale coeficientului ψ, curgerea are caracter nestaţionar, sau precizia măsurătorilor insuficientă fapt pentru care s-au considerat corespunzătoare numai valorile obţinute pînă la $\psi = 1{,}01$;

— la valorile lui $\log \mathcal{R}e_e \geqslant 5$ toate valorile lui ψ sînt nule, astfel încît se poate conchide în mod acoperitor că

$$\mathcal{R}e_{zcr} = 10^5. \tag{2.3}$$

2.3. STABILIREA CORECŢIEI DE LAMINARITATE ψ ŞI DEPENDENŢA ACESTEIA DE NUMĂRUL $\mathcal{R}e_e$

Pentru un număr mare de robinete, rezultatele cercetărilor centralizate ca în tabelul 1, au fost transpuse în diagrama $\log \psi = f(\log \mathcal{R}e_e)$, ca în figura 5.

Din analiza acestor diagrame, rezultă cîteva observaţii cu caracter general şi anume :

— pentru diferitele grade de deschidere, diagramele sînt drepte paralele care se deformează puţin la valori mari ale lui $\log \mathcal{R}e_e$;

— pe măsură ce debitul creşte, familia de drepte devine mai grupată, se micşorează amplitudinea (înălţimea), îşi măreşte înclinaţia faţă de abscisă şi se deplasează spre $\mathcal{R}e_e = 10^5$.

Rezultatele experimentale pentru un robinet Pn 40, Dn 25 (d_s 15). K_{vs} 6

Caracteristicile robinetului

Fişa cu datele măsurate şi calculate Pn 40 Dn 25 ds 15 Kvs 6 cursa 30 caracteristica Im. seria 2-5347

Cursa %	Δp daN/cm²	Volumul L	Timp s	Debit (Q) m³/h	$K_v = Q\sqrt{\frac{\Delta f}{\Delta p}}$	$K_{Q\,T}$	φ	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{\varphi}{\varphi}$	Re_e	$\log. Re_e$	$\log. \varphi$	Obs.
5	0,12315	10	108,1	0,333	0,95	1,06	1,13	0,885	0,245	8200	3,912	0,053	Debitul măsurat cu diafragma
	0,2463	10	73,8	0,487	0,965		1,10	0,910	0,190	12000	4,078	0,042	
	0,4926	10	50,0	0,72	1,025		1,035	0,965	0,070	17700	4,248	0,015	
	0,739	20	82,6	0,87	1,03		1,030	0,972	0,068	21400	4,33	0,012	
	1,000	20	68,9	1,04	1,04		1,02	0,980	0,040	25600	4,408	0,008	
	1,123	20	63,5	1,13	1,06		1,0	1	0	27800	4,444	0	
10	0,12315	10	79,4	0,455	1,295	1,38	1,065	0,94	0,125	11200	4,05	0,027	
	0,2463	10	52,9	0,68	1,32		1,045	0,955	0,090	16700	4,222	0,019	
	0,4926	20	73,2	0,98	1,36		1,015	0,985	0,030	24400	4,387	0,007	
	0,739	20	60,1	1,2	1,395		1,010	0,990	0,020	29500	4,469	0,002	
	1,000	20	52,3	1,37	1,37		1,008	0,992	0,016	34100	4,532	0,0015	
	1,123	20	48,5	1,48	1,38		1,0	1	0	36400	4,560	1	
20	0,12315	10	33,5	0,612	1,92	1,97	1,025	0,975	0,050	16500	4,217	0,011	
	0,2463	20	76,5	0,94	1,93		1,020	0,980	0,040	23200	4,364	0,008	
	0,4926	20	53,3	1,35	1,84		1,015	0,985	0,030	33300	4,522	0,006	
	0,739	20	42,8	1,68	1,95		1,010	0,990	0,020	41500	4,618	0,002	
	1,000	30	91,8	1,96	1,96		1,005	0,995	0,016	48200	4,683	0,001	
	1,123	30	84,4	2,19	1,97		1,0	1	0	52300	4,722	0	
30	0,12315	20	86,1	0,832	2,37	2,48	1,04	0,96	0,080	20500	4,311	0,017	
	0,2463	20	60,8	1,15	2,4		1,03	0,97	0,060	28100	4,448	0,012	
	0,4926	50	104,0	1,73	2,45		1,012	0,988	0,024	42700	4,630	0,005	
	0,739	50	84,0	2,14	2,47		1,004	0,988	0,006	52600	4,720	0,001	
	1,000	50	72,2	2,48	2,48		1	1	0	61200	4,785	0	
	1,123	50	68,5	2,62	2,48		1	1	0	64700	4,810	0	
40	0,12315	20	71,2	1,01	2,86	3,02	1,05	0,955	0,095	24600	4,391	0,019	
	0,2463	20	50,4	1,43	2,89		1,045	0,965	0,070	35200	4,546	0,018	
	0,4926	50	85,9	2,1	2,99		1,015	0,985	0,030	51700	4,713	0,007	
	0,739	50	70,2	2,56	3,00		1,005	0,995	0,010	63300	4,800	0,001	
	1,000	50	59,8	3,02	3,02		1	1	0	74800	4,873	0	
	1,123	50	56,0	3,21	3,02		1	1	0	79200	4,898	0	
50	0,12315	20	62,4	1,15	3,28	3,48	1,06	0,950	0,110	28300	4,451	0,025	
	0,2463	20	43,3	1,66	3,34		1,04	0,965	0,075	41000	4,613	0,017	
	0,4926	50	74,8	2,4	3,41		1,02	0,980	0,040	59200	4,771	0,009	
	0,739	50	60,2	2,98	3,47		1,002	0,999	0,003	73500	4,866	0,0008	
	1,000	50	51,6	3,48	3,48		1	1	0	86000	4,934	0	
	1,123	50	48,5	3,71	3,48		1	1	0	91300	4,961	0	
60	0,12315			1,35	3,84	3,97	1,035	0,965	0,070	33300	4,522	0,014	
	0,2463			1,98	3,96		1,005	0,999	0,006	49000	4,69	0,002	
	0,4926			2,8	3,965		1	1	0	69000	4,838	0	
	0,739			3,11	3,97		1	1	0	84000	4	0	
	1,000			3,97	3,97		1	1	0	95000	4	0	
	1,123			4,22	3,87		1	1	0	104000	5	0	
70	0,12315			1,55	4,4	4,45	1,01	0,990	0,002	38200	4,582	0,004	
	0,2463			2,2	4,43		1,001	0,999	0,0029	54200	4,733	0,0018	
	0,4926			3,12	4,44		1	1	0	77000	4	0	
	0,739			3,85	4,45		1	1	0	95000	4	0	
	1,000			4,45	4,45		1	1	0	110000	5	0	
	1,123			4,72	4,45		1	1	0	116000	5	0	
80	0,12315			1,7	4,84	4,9	1,008	0,999	0	42000	4	0,003	
	0,2463			2,41	4,85		1	1	0	59300	4	0	
	0,4926			3,4	4,87		1	1	0	84000	4	0	
	0,739			4,22	4,89		1	1	0	104000	5	0	
	1,000			4,9	4,9		1	1	0	120000	5	0	
	1,123			5,2	4,9		1	1	0	128000	5	0	
90	0,12315			1,9	5,39	5,4	1	1	0				
	0,2463			2,67	5,4		1	1	0				
	0,4926			3,79	5,4		1	1	0				
	0,739			4,62	5,4		1	1	0				
	1,000			5,4	5,4		1	1	0				
	1,123			5,72	5,4		1	1	0				
100	0,12315			2,08	5,93	5,93	1	1	0				
	0,2463			2,93	5,93		1	1	0				
	0,4926			4,18	5,93		1	1	0				
	0,739			5,11	5,93		1	1	0				
	1,000			5,93	5,93		1	1	0				
	1,123			6,3	5,93		1	1	0				

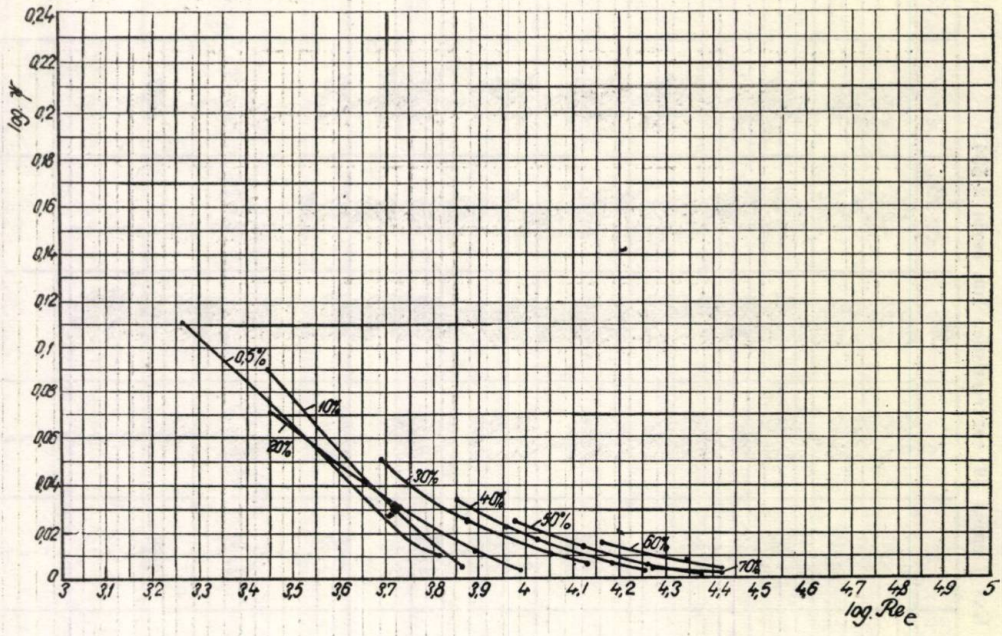


Fig. 5. — Variația corecției de laminaritate funcție de numărul $\mathcal{R}e_e$.

După un studiu amănunțit a tuturor datelor experimentale rezultă că indiferent de robinet și grad de deschidere, ecuațiile dreptelor sînt identice sau sensibil comparabil, la aceeași valoare a lui $\mathcal{R}e_e$.

Se notează ecuația dreptelor astfel :

$$y + A_i x = B_i. \tag{2.4}$$

Pentru o parte din măsurătorile efectuate se prezintă în tabelul 2 valorile rezultate pentru coeficienții A_i și B_i grupați pe intervale ale numărului $\mathcal{R}e_e$.

Din acestea rezultă că domeniul numărului $\mathcal{R}e_e$ corespunzător curgerii laminare poate fi explorat, în sensul determinării corecției de laminaritate cu ajutorul mai multor drepte pe mai multe intervale.

Pentru calculele inginerești, cu abateri acceptabile necesităților practice, pe baza calculului mediilor [2], [9] se consideră suficiente următoarele domenii :

$$\begin{gathered} \log \mathcal{R}e_e \leqslant 3{,}35, \\ 3{,}35 < \log \mathcal{R}e_e \leqslant 3{,}85, \\ 3{,}85 < \log \mathcal{R}e_e \leqslant 5, \end{gathered} \tag{2.5}$$

pentru care s-au calculat coeficienții A_i și B_i, rezultînd următoarele formule de calcul :

a) domeniul $\mathcal{R}e_e \leqslant 2440$, sau $\log \mathcal{R}e_e \leqslant 3{,}35$:

$$\log \psi + 0{,}3489 \log \mathcal{R}e_e = 1{,}105 \tag{2.6}$$

Tabelul 2

Coeficienții numerici ai dreptelor ce exprimă variația corecției de laminaritate funcție de $\mathcal{R}e_e$

A_i	B_i	$\log \mathcal{R}e_e$	Diagr.
0,358	1,080		
0,420	1,275		
0,343	1,075		D_I
0,300	1,010		
0,378	1,190	$\leqslant 3{,}35$	
0,368	1,160		D_{II}
0,310	1,030		
0,362	1,070		D_{IV}
0,320	1,060		
0,330	1,100		D_V
0,218	0,780		
0,145	0,580		D_I
0,164	0,680		
0,250	0,920		
0,200	0,720		D_{II}
0,200	0,730		
0,164	0,570		
0,216	0,650	$\leqslant 3{,}85$	
0,220	0,800		
0,218	0,810		D_{III}
0,168	0,630		
0,140	0,570		
0,200	0,710		D_{IV}
0,140	0,530		
0,150	0,60		D_V
0,167	0,655		
0,210	0,810		D_{VII}
0,100	0,450		D_I
0,065	0,270		D_{II}
0,100	0,410		
0,080	0,350		D_{IV}
0,030	0,130	$> 3{,}85$	
0,120	0,480	si	
0,070	0,290	< 5	D_V
0,120	0,480		
0,090	0,380		D_{VII}
0,085	0,380		
0,052	0,230		
0,060	0,270		
0,060	0,280		D_{VIII}
0,050	0,250		

sau

$$\psi = \frac{21{,}4}{\mathcal{R}e_e^{0{,}3489}}, \tag{2.7}$$

abaterea medie pătratică maximă, fiind $S^* = 0{,}076$,

b) domeniul $2240 < \mathcal{R}e_e \leqslant 7100$ sau $3{,}35 < \log \mathcal{R}e_e \leqslant 3{,}85$:

$$\log \psi + 0{,}1865 \log \mathcal{R}e_e = 0{,}689, \tag{2.8}$$

sau

$$\psi = \frac{4{,}9}{\mathcal{R}e_e^{0{,}1865}}, \tag{2.9}$$

abaterea medie pătratică maximă fiind $S^* = 0{,}106$,

c) domeniul $10^5 > \mathcal{R}e_e > 7100$ sau $5 \geqslant \log \mathcal{R}e_e > 3{,}85$:

$$\log \psi + 0{,}0773 \log \mathcal{R}e_e = 0{,}32 \tag{2.10}$$

sau

$$\psi = \frac{2{,}1}{\mathcal{R}e_e^{0{,}0773}}, \tag{2.11}$$

abaterea medie pătratică maximă fiind $S^* = 0{,}102$,

d) domeniul $\mathcal{R}e_e > 10^5$ sau $\log \mathcal{R}e_e > 5$:

$$\psi = \frac{1}{\mathcal{R}e_e^0}. \tag{2.12}$$

Dacă revenim la coeficientul ζ, din relațiile (1.12), (2.7), (2.9), (2.11), rezultă

$$\zeta = 455\ \zeta_T \frac{1}{\mathcal{R}e_e^{0{,}7}} \text{ în domeniul a),}$$

$$\zeta = 24\ \zeta_T \frac{1}{\mathcal{R}e_e^{0{,}36}} \text{ în domeniul b),}$$

$$\zeta = 4{,}4\ \zeta_T \frac{1}{\mathcal{R}e_e^{0{,}16}} \text{ în domeniul c),}$$

$$\zeta = \zeta_T \qquad \text{în domeniul d)}$$

sau, generalizînd,

$$\zeta = N \cdot \zeta_T \frac{1}{\mathcal{R}e_e^x}, \tag{2.13}$$

în care N și x sînt coeficienți numerici ce scad pe măsura scăderii laminarității.

3. CONCLUZII

Cercetările efectuate au permis de pe o parte așa cum rezultă din relația (2.13) întregirea datelor tehnice referitoare la curgerea prin rezistențele hidraulice locale, iar pe de altă parte s-au pus bazele unei metode generale corectă și rapidă privind calculul de alegere a mărimii robinetelor de reglare cu ventil, indiferent de regimul de curgere [2].

Aspectul dimensionării robinetelor de reglare funcție de debit poate fi ușor pus în evidență dacă în formula (1.13) se înlocuiește ψ cu expresiile (2.7), (2.9.),(2.11) sau (2.12) funcție de valoarea lui $\mathcal{R}e_e$ calculată cu relația (2.2) în care d_s se aproximează, urmînd a fi corectat în final.

Pentru robinetele de reglare cu ventil cu $d_s \leqslant 10$ mm, din cauza situării curgerii în regim laminar la diverse grade de deschidere, nu a fost elaborată pînă în prezent o metodologie privind măsurarea caracteristicii intrinseci de debit.

Cercetările efectuate au permis obținerea datelor necesare la elaborarea unei metodologii de măsurare a coeficientului K_v la robinete cu diametrul scaunului sub 10 mm precum și corectarea actualei metodologii pentru domeniul $d_s = 10 \ldots 15$ mm.

Primită la redacție la 26 aprilie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Hidraulica și transportul produselor petroliere*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1966.
2. I. Poșchină, *Contribuții privind studiul curgerii prin robinetele de reglare*, IPG Ploiești, teză de doctorat, 1975.
3. P.E. Quintes, *Kleine Strömungslehre für Meß- u. Regeltehniker*, Ludwigshafen, 1970.
4. F. Piwinger, G. Münz, *Strömungstechnische Eigenschaften von Stellklapenn*, Regelungstechnik **18**, *5* (1970).
5. W. Bohl, *Technische Strömungslehre*, Würzburg, Vogel-Verlag, 1971.
6. P. Popescu, P. Mihordea, *Măsurarea debitului în tehnică*, București, Edit. tehnică, 1969.
7. * * * *Cercetări în domeniul robinetelor de reglare* (teme de cercetare efectuate de IUP Tîrgoviște, IPCUP București și IPG Ploiești), Tîrgoviște, 1971—1975.
8. I. Crețu ș.a., *Probleme de hidraulică*, București, Edit. tehnică, 1972.
9. L.Z. Rumsiski, Prelucrarea matematică a datelor experimentale București, Edit. tehnică, 1974.
10. V.G. Patrikeev, *Rasciotu ghidravliceskih țepei soderjaiuscih reguliruiușcei organ*, Priborî i sredstva avtomatizații, *10* (1973).
11. V. Marinoiu, I. Poșchină, *Robinete de reglare*, București, Edit. tehnică, 1972.
12. F. Ullmann, *Messung strömungstechnischer Kenngrössen bei Armaturen*, MSR, *11* (1970).
13. L.R. Driskell, *Practical quide to Control Valve Sizing, Instrumentation Technology*, 1967.

UN MODEL PENTRU DESCRIEREA DEFORMĂRII SĂRII*

de A. BARONCEA, N. CRISTESCU, E. GLODEANU

Întreprinderea geologică de prospecțiuni pentru substanțe minerale solide

1. INTRODUCERE

Lucrarea prezintă un model matematic pentru sare gemă, propus pe bază de date experimentale de laborator, obținute atît din încercări standard, cît și din încercări de fluaj și relaxare.
Intenția autorilor a fost de a propune un model cît mai simplu, dar care în același timp să descrie cît mai exact răspunsul sării la solicitări similare, pentru a putea fi aplicat curent în practica de proiectare minieră.
Pînă la anumite verificări practice, modelul propus trebuie considerat deocamdată a avea caracter preliminar.

Este din ce în ce mai evident atît pentru cercetători, cît și pentru proiectanți, că la dimensionarea elementelor de rezistență din minele de sare, trebuie să se țină seama și de parametrii reologici ai rocilor, respectiv modificarea în timp a proprietăților inițiale de rezistență. Din punctul de vedere al proiectării, cunoașterea legilor care să descrie modificarea în timp a caracteristicilor rocilor, este necesară atît pentru a evita o degradare prematură a lucrărilor miniere, cît și pentru a preîntîmpina supradimensionări exagerate.

În ambele situații există pericolul de a compromite definitiv, importante rezerve de substanță utilă.

Cercetări experimentale privind proprietățile mecanice ale stării au fost făcute de mulți experimentatori. Punctele de vedere și obiectivele urmărite au fost destul de variate : descrierea mișcării sării în intervale de timp de ordinul epocilor geologice (1), sau descrierea comportării ei în încercări de laborator care durează uneori doar cîteva minute, iar alteori cîteva săptămîni sau cel mult luni (2), sau, în sfîrșit, comportarea ei dinamică, propagarea undelor în sare (3) etc. Din toate punctele de vedere s-a stabilit că sarea este o rocă cu proprietăți mecanice oarecum diferite de proprietățile altor roci.

În vederea găsirii unui model este în primul rînd necesar să se stabilească precis obiectivele urmărite și limitele de aplicabilitate ale modelului. În cele ce urmează ne propunem să formulăm un model unidimensional pentru sare, pornind de la experiențe de laborator care au stabilit comportarea sării în încercări standard de obținere a curbelor caracteristice la compresiune și de la experiențe de asemenea de compresiune, ce pun în evidență proprietăți de fluaj și de relaxare pentru sare. Prin urmare

* Lucrare prezentată la cea de a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

s-a urmărit să se stabilească un model pentru sare care să poată fi utilizat în lucrări curente de exploatare minieră și care să descrie răspunsul sării la încercări efectuate în intervale de timp mergînd de la cîteva minute pînă la cîțiva ani. Modelul urmărește să descrie și comportarea diferită pe care o are sarea la viteze de încărcare diferite, în experiențe cvasistatice sau în perioada de încărcare din cadrul experiențelor de fluaj.

2. DATE EXPERIMENTALE

În vederea stabilirii modelului au fost necesare în primul rînd experiențe de stabilire cu diverse viteze de deformare, a curbelor caracteristice. Deoarece modelul căutat urmează să fie utilizat pentru descrierea deformării sării într-un interval de timp de mai mulți ani, comportarea sării obținută cu aparatele tradiționale pentru încercări „momentane" va fi considerată comportarea ei „rapidă". În figura 1 sînt date trei curbe caracteristice (linii subțiri) obținute la compresiune pentru sarea de la Slătioarele. Vitezele de deformare corespunzătoare sînt aproximativ egale cu 0,9 %/min., 0,3 %/min. și 0,1 %/min. Ultimul punct indicat pe fiecare curbă printr-un cerculeț marchează starea de tensiune și deformare în momentul ruperii. Din figura 1 se poate constata că viteza de deformare influențează foarte mult întreaga curbă caracteristică. Deoarece viteze de deformare mai mari de 1 %/min nu sînt de așteptat în aplicarea modelului, răspunsul sării la încărcări de ordinul 1 %/min vor fi considerate a fi un răspuns „cvasiinstantaneu". Cu alte cuvinte curba caracteristică corespunzătoare va fi considerată în contextul modelului căutat, a fi cel mai rapid răspuns cu putință, pentru sarea de Slătioarele. Dacă modelul ar fi utilizat pentru unele încărcări mult mai rapide, propagări de unde etc., atunci ar fi fost necesare experiențe mult mai rapide pentru a pune în evidență răspunsul „instantaneu" al sării.

Pentru a pune în evidență valoarea statică a modulului de elasticitate au fost făcute experiențe de descărcare, pornind de la diverse stări de tensiune (vezi fig. 2). Puncte intermediare pe curba de descărcare sau pe cea de reîncărcare nu au fost determinate, astfel încît valoarea lui E a fost dedusă din punctele de la începutul și sfîrșitul etapei procesului de încărcare și, respectiv, reîncărcare. S-au determinat astfel pentru E valorile indicate în tabelul 1. Valoarea medie pentru E este 160.000 kgf/cm^2 = 163.000 dN/cm^2.

Un al treilea grup de experiențe necesare pentru stabilirea modelului sînt experiențele de fluaj cu diverse tensiuni inițiale. S-au făcut experiențe de fluaj, comprimînd epruvete cilindrice de 10 cm. înălțime și 5 cm. diametrul. Șapte curbe de fluaj, obținute cu tensiuni inițiale din ce în ce mai mari sînt reprezentate în figura 3. Tensiunile constante aplicate în diversele experiențe sînt indicate în tabelul 2. Timpul necesar pentru efectuarea acestor încărcări este de asemenea indicat. În timpul încărcării se obține o deformație a epruvetei ce este destul de mare. Deformația inițială astfel obținută este dată în tabelul 2. S-a observat că această deformație depinde de rapiditatea încărcării. Vom mai observa că toate curbele de fluaj în afară de prima, nu conduc la o stare stabilă, adică defor-

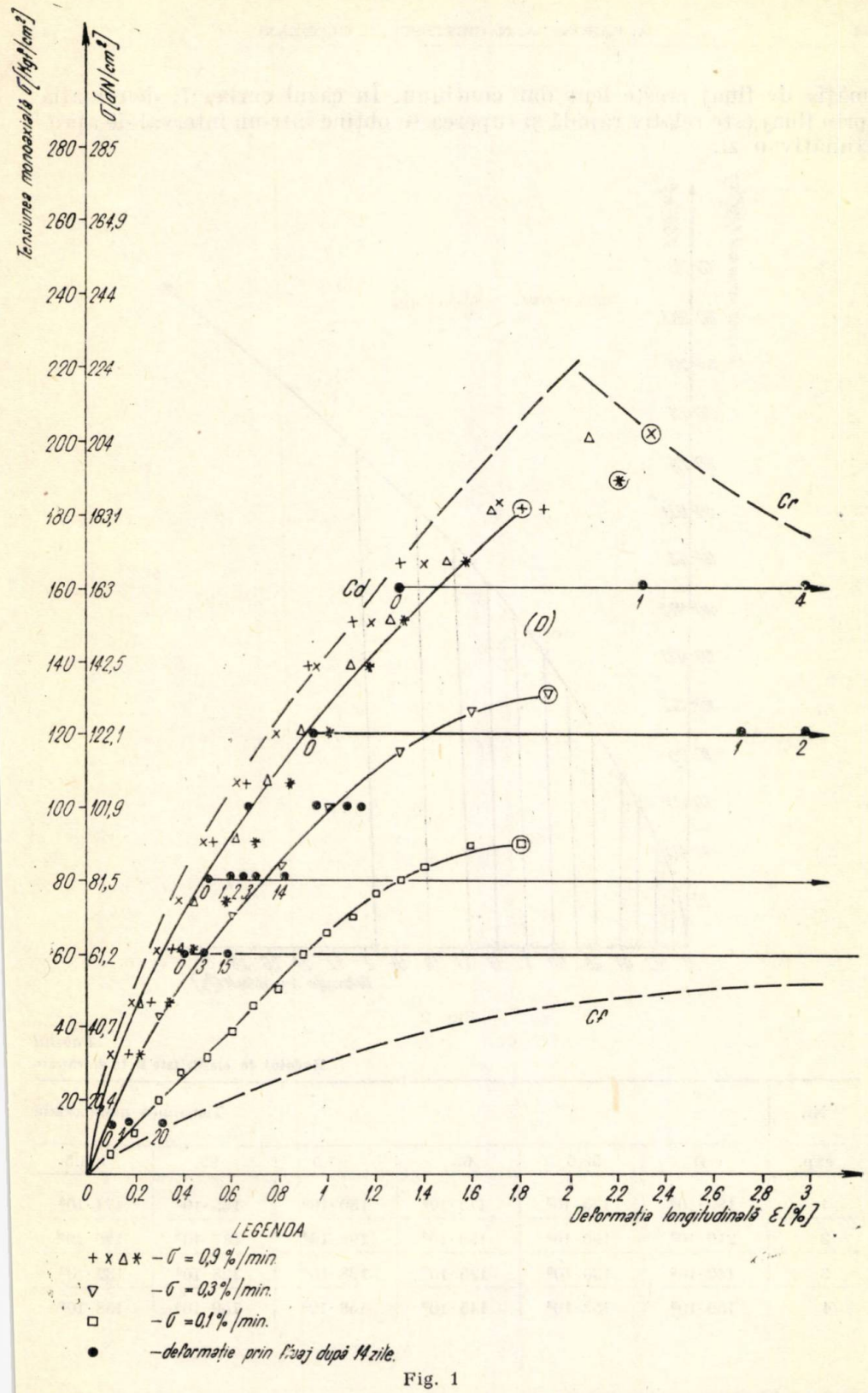

Tensiunea monoaxială σ [kgf/cm²]
σ [dN/cm²]
280
285
260
264,9
240
244
220
224
200
204
180
183,1
160
163
140
142,5
120
122,1
100
101,9
80
81,5
60
61,2
40
40,7
20
20,4
Cr
Cd
(D)
0
1
4
0
1
2
0
1,2,3,14
0
3
15
0
1
20
Cr
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
2,6
2,8
3
Deformația longitudinală ε [%]
LEGENDA
+ x Δ * – σ = 0,9 %/min.
▽ – σ = 0,3 %/min.
□ – σ = 0,1 %/min.
● – deformație prin fluaj după 14 zile.

Fig. 1

mația de fluaj crește lent dar continuu. În cazul curbei 7, deformația prin fluaj este relativ rapidă și ruperea se obține într-un interval de aproximativ o zi.

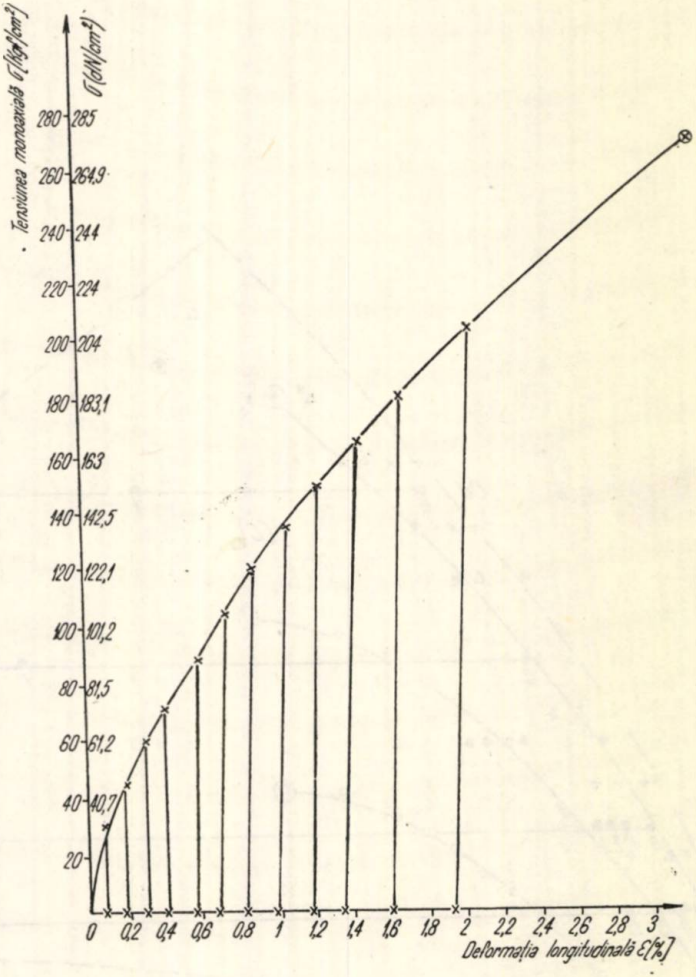


Fig. 2

Tabelul

Modulul de elasticitate E la descărcare

Nr.	Tensiunea monoaxială					
exp.	31	56,6	62	77,5	93	108,5
1	$180 \cdot 10^3$	$175 \cdot 10^3$	$175 \cdot 10^3$	$150 \cdot 10^3$	$165 \cdot 10^3$	$174 \cdot 10^3$
2	$210 \cdot 10^3$	$190 \cdot 10^3$	$189 \cdot 10^3$	$195 \cdot 10^3$	$187 \cdot 10^3$	$190 \cdot 10^3$
3	$140 \cdot 10^3$	$130 \cdot 10^3$	$125 \cdot 10^3$	$138 \cdot 10^3$	$128 \cdot 10^3$	$132 \cdot 10^3$
4	$150 \cdot 10^3$	$153 \cdot 10^3$	$145 \cdot 10^3$	$158 \cdot 10^3$	$150 \cdot 10^3$	$158 \cdot 10^3$

Pentru a examina natura deformației inițiale, au fost făcute și experiențe de fluaj invers (descărcare). Trei asemenea curbe sînt reprezentate în figura 4. Tensiunile constante aplicate cît și intervalul de timp necesar pentru aplicarea acestor încărcări sînt date în tabelul 3. Din aceste curbe

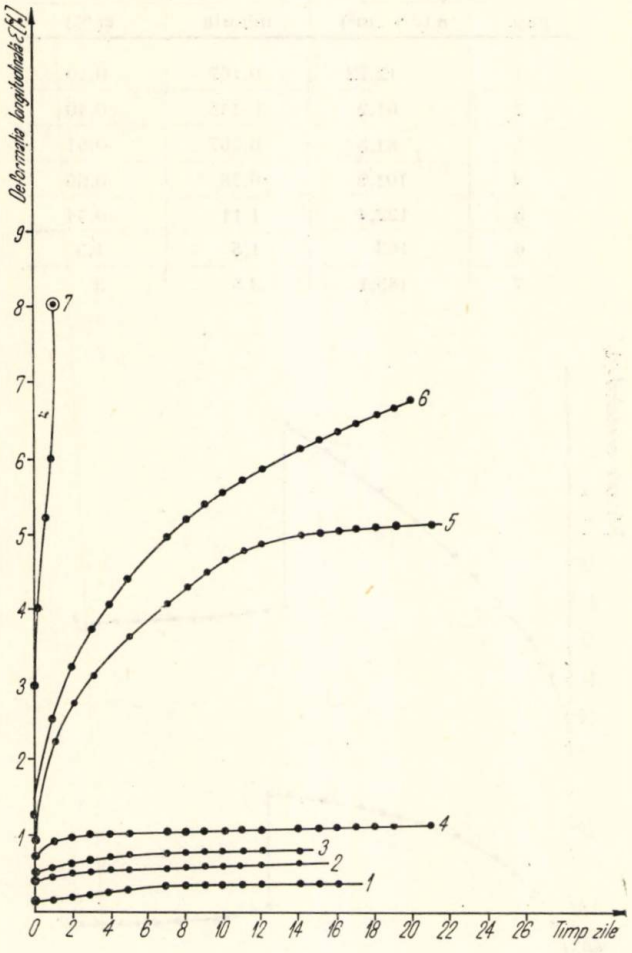


Fig. 3

1
determinat experimental

dN/cm²						Modul val. medie
124	139,5	155	170	186	207	E[dN/cm²]
180·10³	154·10³	150·10³	150·10³	162·10³	153·10³	164·000
200·10³	184·10³	190·10³	197·10³	200·10³	—	193·181
135·10³	132·10³	129·10³	130·10³	—	—	131·900
150·10³	159·10³	160·10³	149·10³	150·10³	—	153·818

Tabelul nr. 2

Nr.	Tensiunea constantă	Timp de efectuare a încărcării	deform. inițială.
exp.	σ (dN/cm^2)	minute	ε(%)
1	12,92	0,167	0,10
2	61,2	0,445	0,40
3	81,5	0,567	0,51
4	101,9	0,78	0,66
5	122,4	1,11	0,94
6	163	1,5	1,3
7	183,1	3,5	3

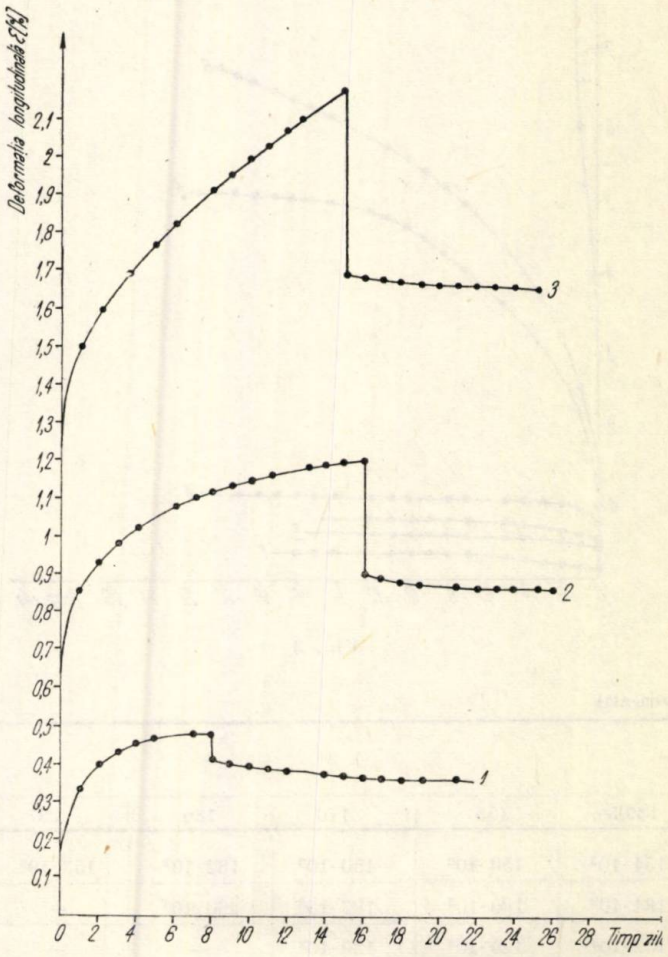


Fig. 4

Tabelul 3

Nr.	Tensiunea constantă	Timp de încărcare	Def. inițială	Def. elastică	Def. reversib.	Def. ireversib.
exp.	σ (dN/cm^2)	minute	ε%	ε_e%	ε_r%	ε_i%
1	52	0,19	0,175	0,40	0,125	0,36
2	80	0,67	0,6	0,301	0,336	0,865
2	120	1,085	0,975	0,49	0,53	1,65

și din tabelul 3 se poate vedea că deformația inițială este mult mai mare decît deformația elastică (instantaneu reversibilă). Deci o bună parte din deformația obținută chiar în timpul aplicării încărcării este ireversibilă. Pe de altă parte, cea mai mare parte a deformației reversibile este elastică. Deformația vîscoelastică (reversibilă în timp) este neglijabilă în comparație cu deformația ireversibilă și de cele mai multe ori (la tensiuni inițiale mai mari) chiar în comparație cu cea elastică. Pentru a menține proba de sare cît mai apropiată de umiditatea naturală din locul de recoltare, la prelevarea probelor ele au fost parafinate (2 straturi) și apoi după confecționarea epruvetelor ele au fost din nou izolate de mediul înconjurător printr-o peliculă de material plastic. Influența altor factori (presiune, temperatură etc.) nu au fost deocamdată considerate.

3. MODELUL ELASTOVISCOPLASTIC

Ținînd seama de rezultatele experimentale menționate mai sus, pentru descrierea comportării sării la fluaj dar și în timpul aplicării încărcării, s-a utilizat o ecuație constitutivă de tip elastoviscoplastic [4]

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}\sigma + \Phi(\sigma, \varepsilon)\,\dot{\sigma} + \psi(\sigma, \varepsilon). \tag{1}$$

În (1) $\Phi(\sigma, \varepsilon)$ descrie comportarea „rapidă" a sării, iar $\psi(\sigma, \varepsilon)$ proprietățile „lente" (fluaj, relaxare). $\Phi(\sigma, \varepsilon)$ se poate determina din încărcările rapide efectuate asupra sării. Astfel, aproximînd răspunsul rapid al sării printr-o curbă de forma

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\beta}, \tag{2}$$

se poate deduce pentru $E = 130.000$ kgf/cm^2: $\alpha = 1611$ și $\beta = 1{,}76$. Pentru $E = 160.000$ kgf/cm^2 se obține $\alpha = 1485$, iar $\beta = 1{,}71$. Aceasta determină coeficientul Φ. În figura 1, curba (2) obținută cu ultima variantă de valori ale constantelor, a fost reprezentată prin C_d.

Coeficientul $\psi(\sigma, \varepsilon)$ este obținut experimental ca o curbă de stabilitate pentru fluaj. Cu alte cuvinte, făcîndu-se o succesiune de experiențe

cu tensiuni inițiale din ce în ce mai mari, se determină pentru fiecare tensiune inițială deformația ce corespunde stabilizării curbei de fluaj. S-a arătat experimental că tensiuni inițiale mai mari de 60 kgf/cm² conduc la procese de fluaj nestabilizat. Deci $\sigma = \sigma_a = 60$ kgf/cm² este o asimptotă pentru curba de stabilitate a fluajului (curba C_f din fig. 1). Această curbă a fost aproximată prin

$$\sigma = a[1 - \exp(-b\varepsilon)], \tag{3}$$

iar valorile constantelor sînt $a = 60$ kgf/cm² și $b = 75$. După determinarea acestei frontiere, coeficientul ψ poate fi determinat sub mai multe forme, de exemplu

$$\psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{k}{E}\{\sigma - a[1 - \exp(-b\varepsilon)]\}, \tag{4}$$

$$\psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{k}{E}[1 - \exp\{\sigma - a[1 - \exp(-b\varepsilon)]\}] \tag{5}$$

sau prin alte expresii.

Astfel s-a determinat un model matematic pentru descrierea comportării sării, de forma

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \alpha\beta\left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\beta-1}\right)\dot{\sigma} + \frac{k}{E}\{\sigma - a[1 - \exp(-b\varepsilon)]\}. \tag{6}$$

Acest model trebuie să fie considerat un model preliminar, ce ar putea fi îmbunătățit odată cu efectuarea mai multor experiențe diagnostic. În (6) k^{-1} este un „coeficient de viscozitate". Determinarea acestui coeficient s-a făcut utilizînd rezultatele experimentale de fluaj, după cum urmează.

Să notăm cu σ_0 tensiunea constantă aplicată și cu ε_0 deformația obținută la timpul t_0 — sfîrșitul perioadei de aplicare a încărcării —. Atunci, conform modelului (6), fluajul va fi descris de

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\sigma_0 - a[1 - \exp(-b\varepsilon)]} = \int_{t_0}^{t} k\, dt. \tag{7}$$

De aici se obține

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{1}{b}\ln\frac{\sigma_0 - a + a\exp(-b\varepsilon)}{\sigma_0 - a + a\exp(-b\varepsilon_0)} = \frac{k}{E}(\sigma_0 - a)(t - t_0). \tag{8}$$

Această formulă va descrie procesul de fluaj, dacă coeficientul k este cunoscut. Noi vom folosi această formulă pentru a-l determina pe k pornind de la datele experimentale din figura 3. În general, k este variabil.

Pentru scopul urmărit, modelul este suficient de general dacă se presupune $k(\sigma)$ și se consideră o valoare medie pentru k, adică pentru fiecare curbă de fluaj în parte. Se poate vedea imediat că k crește cu σ. Pentru tensiuni inițiale uzuale, ce sînt în general relativ mici, k poate fi considerat chiar constant. De exemplu, pentru 12,5 kgf/cm$^2 \leqslant \sigma_0 \leqslant 100$ kgf/cm^2 se obține $0{,}55\ d^{-1} \leqslant k \leqslant 0{,}67\ d^{-1}$, unitățile fiind (zile)$^{-1}$. Prin urmare, pentru tensiuni mici, valoarea constantă pentru k este $k = 0{,}62\ d^{-1}$. Pentru σ_0 mari se obțin valori mult mai mari pentru k. Astfel, pentru $\sigma_0 = 120$ kgf/cm^2 se obține drept valoare medie pentru k valoarea $k = 4{,}64\ d^{-1}$, iar pentru $\sigma_0 = 180$ kgf/cm^2 se obține $k = 64{,}9\ d^{-1}$.

Pentru scopuri practice, cînd tensiunile aplicate nu sînt prea mari ($\sigma_0 < 100$ kgf/cm^2), valoarea cea mai importantă pentru k este cea corespunzătoare perioadei de fluaj staționar. Această valoare determinată, de exemplu, pentru $t > 5\ d$, este aproape riguros constantă

$$k = 0{,}20\ d^{-1}. \tag{9}$$

Vom preciza acum domeniul D de aplicabilitate al modelului. Acest domeniu este cel delimitat de curbele C_d, C_f și C_r din figura 1. Curba C_d este definită de (2), iar stările de tensiune și deformație de pe această curbă sînt stări posibile. Curba C_f este definită de (3), stările de tensiune și deformație de pe această curbă nu sînt stări posibile căci această curbă a fost definită astfel încît să fie necesar un timp infinit pentru atingerea acestei curbe prin procese de deformare prin fluaj. Aceasta rezultă imediat și din (8). Curba C_f poate fi considerată și ca o frontieră de relaxare. Dacă la $t = t_0$ starea de tensiune și deformație este $(\sigma_0, \varepsilon_0) \in D$, atunci relaxarea va fi descrisă de

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{1 + \alpha\beta E \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\beta-1}}{k\{\sigma - a\,[1 - \exp(-b\,\varepsilon_0)]\}}\,\mathrm{d}\sigma = t - t_0\,. \tag{10}$$

Au fost făcute mai multe experiențe care au arătat că la sare fenomenul de relaxare este foarte important. Aceste experiențe nu vor fi descrise aici. În orice caz modelul (6) descrie calitativ și acest fenomen.

În sfîrșit, domeniul D mai este delimitat și de curba C_r care este o *frontieră de rupere* prin fluaj, și care trebuie găsită experimental. Deoarece nu am avut la dispoziție decît puține puncte experimentale, această frontieră a fost doar schițată în figura 1. În orice caz C_f tinde către asimptota $\sigma = \sigma_a$ cînd $t \to +\infty$, iar C_r probabil intersectează această asimptotă.

Din punctul de vedere al deformării prin fluaj, domeniul D este divizat în două de asimptota $\sigma = \sigma_a$. Stările inițiale $(\sigma_0, \varepsilon_0) \in D$ cu $\sigma_0 < \sigma_a$ sînt stări „stabile" în sensul că procesul de deformare prin fluaj devine stabil, adică pentru orice t avem $\varepsilon(t) < \varepsilon(C_f)$, unde $\varepsilon(C)$ se obține din (3) pentru $\sigma = \sigma_0$. Stările inițiale $(\sigma_0, \varepsilon_0) \in D$ cu $\sigma_0 \geqslant \sigma_a$ sînt stări instabile, în sensul că deformația prin fluaj conduce la rupere. Observăm însă că tensiuni aplicate σ_0 ceva mai mari decît σ_a sînt totuși posibile în practică deoarece timpul de rupere (ce s-ar putea obține exact din (8) dacă C_r

ar fi determinat) este foarte mare dacă σ_0 nu depășește cu mult pe σ_a. În general, dacă (de exemplu printr-un accident) starea inițială $(\sigma_0, \varepsilon_0) \in D$ este cu $\sigma > \sigma_0$, modelul (6) poate fi utilizat pentru estimarea intervalului de timp și a istoriei variației tensiunii și deformației (eventuale adăugări de stîlpi de susținere) astfel încît traiectoria de variație a tensiunii și deformației să conducă la stări stabile.

4. CONCLUZII

Modelul prezentat mai sus a fost formulat pentru a descrie fenomenele de fluaj la sare cît și deformarea obținută în timpul aplicării încărcării. Intenția a fost de a stabili un model cît mai simplu cu putință, dar care să descrie rezonabil de exact aceste fenomene. Descărcare, adică situații cu $\dot{\varepsilon} < 0$ nu au fost considerate. Ținînd seama că numărul de experiențe ce a stat la baza formulării modelului a fost relativ redus, acest model trebuie considerat a fi un model preliminar.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Nadai, *Theory of flow and fracture of solids*, vol. II, § 17—5, McGraw Hill Book Comp., 1963.

2. N.M. Proskuriakov, R.S. Permiakov, A.K. Cernikov, *Fiziko-Mehaniceskie svoistva solianih porod*, Nedra, 1973.

3. M.P. Volarovici, E.I. Baiuk, A. I. Levîkin, I.S. Tomașevskaia, *Fiziko-Mehaniceskie svoistva gornih porod i mineralov pri visokih davleniah i temperaturah*, Nauka, 1974.

4. N. Cristescu, *Dynamic Plasticity*, North Holland, 1967.

INFLUENȚA TENSIUNILOR REZIDUALE DIN SUDARE ASUPRA FENOMENULUI DE OBOSEALĂ A ELEMENTELOR DIN OȚEL

de DAN MATEESCU, IULIU DIMOIU
Institutul politehnic „Traian Vuia" Timișoara

Lucrarea prezintă încercările experimentale efectuate la Catedra de construcții metalice a I.P.T.V.T. privind determinarea efectului tensiunilor remanente introduse în timpul procesului de sudare asupra fenomenului de oboseală. În legătură cu aceasta sînt ilustrate materialul epruvetelor, mașina de încercări la oboseală, probe fotoelastice și concluzii asupra conlucrării celor două feluri de tensiune.

Sistemul tensiunilor în echilibru existente într-un element de construcție din oțel, atunci cînd acesta nu este solicitat din exterior, constituie ansamblul tensiunilor remanente. Aceste tensiuni se nasc ori de cîte ori elementul suferă deformații plastice neuniforme.

Una din principalele surse de tensiune remanente îl constituie variația de temperatură. Dacă temperatura se distribuie uniform sau liniar, aceasta nu conduce la tensiuni reziduale. În caz contrar în piesă iau naștere tensiuni provizorii care pot depăși limita de curgere a materialului ducînd la deformații remanente și, respectiv, la tensiuni remanente.

Procesul sudării concentrează în volume mici o mare cantitate de căldură cu un gradient de încălzire ca și de răcire foarte înalt. În funcție de procedeul și regimul de sudare, variază lățimea zonei influențată termic. Rigiditatea pieselor care se îmbină împiedică dilatarea liberă a pieselor și a materialului depus, astfel că metalul în stare plastică consumă local deformațiile cauzate de temperatură, care la răcire nu mai pot fi eliberate. Tendința de revenire la forma inițială se concretizează în tensiuni remanente echilibrate pe secțiunea ansamblului sudat.

Epura tensiunilor remanente în elemente sudate este specifică fiecărui tip de îmbinare.

În cadrul programului experimental de încercări la oboseală a Catedrei de construcții metalice a Facultății de construcții din I.P.T.V. Timișoara s-a realizat un set de epruvete din OL-37-2K cu configurația din figura 1. Fiecare epruvetă se compune dintr-o placă de secțiune variabilă, întărită cu două nervuri sudate pe ambele fețe. Procesul de sudare induce în epruvetă tensiuni remanente.

Folosind procedeul similitudinii, epruveta a fost reprodusă la scara 1 : 4 din araldit în două variante : una cu nervurile sudate cu electrozi din

araldit cu aer cald la 100—120°C, epruveta de tip B, figura 2, iar cealaltă cu nervurile lipite, epruveta de tip A, figura 3.

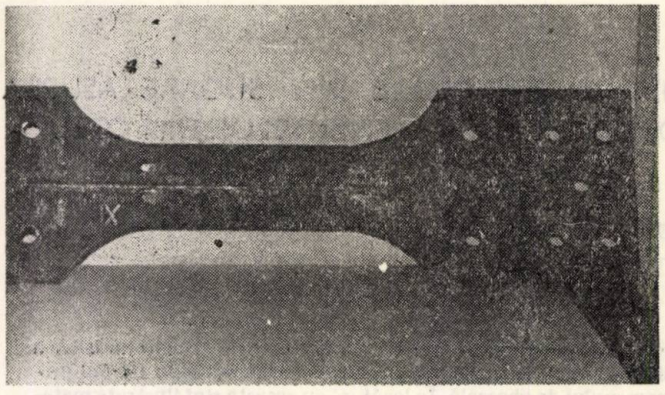


Fig. 1. — Epruvetă pentru încercări la oboseală OL—37—2K.

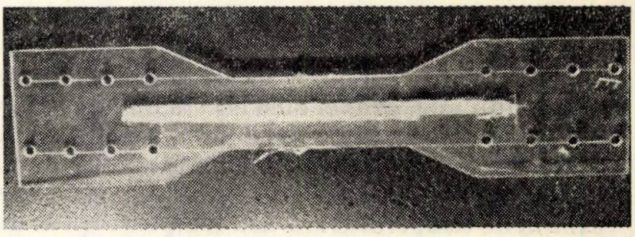


Fig. 2. — Model din araldit cu nervurile sudate.

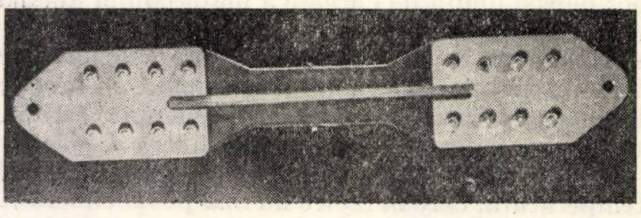


Fig. 3. — Model din araldit cu nervurile lipite.

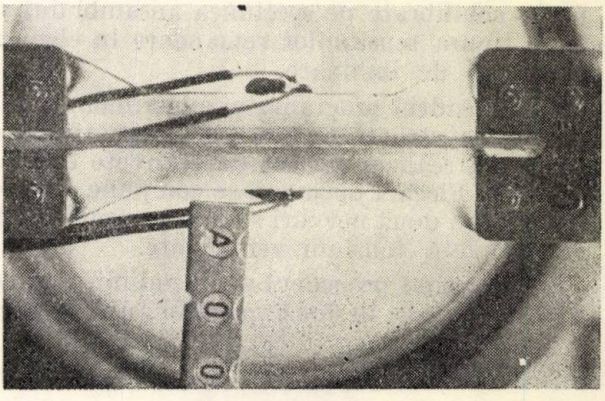


Fig. 4. — Absența izocromaticelor în stare de neîncărcare la epruveta cu nervuri lipite.

Aceste epruvete se introduc în cîmpul de lumină polarizată a fotoelasticimetrului. În stare de nesolicitare exterioară, la epruveta cu nervurile lipite, imaginea nu conţine izocromatice, figura 4, pe cînd la epruveta cu nervurile sudate imaginea prezintă izocromatice indicînd tensiuni interioare în absenţa solicitării, figura 5.

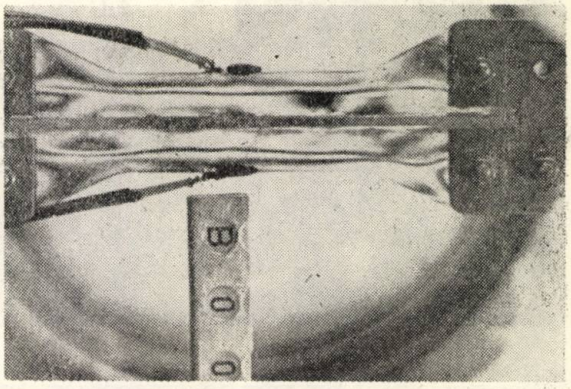


Fig. 5. — Izocromatice la epruveta cu nervuri sudate în stare de neîncărcare.

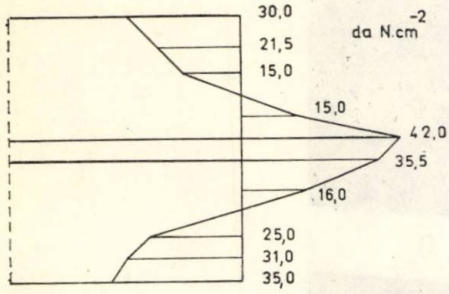


Fig. 6. — Epura tensiunilor reziduale din sudare pentru modelul din araldit.

Epruveta de tip A se încarcă progresiv la efort axial, urmărind apariţia izocromaticelor de diferite ordine.

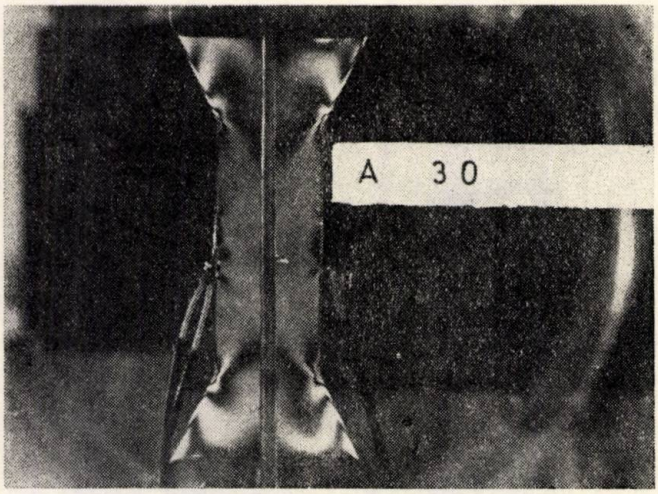
Pentru control, se urmăreşte mărimea efortului unitar în epruvetă pe cale tensometrică cu ajutorul celor doi senzori dispuşi periferic.

Cu ajutorul spectrului izocromaticelor astfel obţinut se identifică spectrul izocromaticelor de la epruveta de tip B neîncărcată. Pe această cale s-a stabilit diagrama tensiunilor remanente induse prin sudare pe modelul B şi evidenţiată în figura 6.

Figurile 7 şi 8 ilustrează spectrul izocromaticelor din epruvetele A şi B pentru o încărcare de 130 daN/cm^2.

Pentru determinarea efectivă a tensiunilor remanente induse prin sudare în epruveta de oţel s-a practicat o metodă distructivă. Pe o epruvetă netestată la oboseală s-au trasat pe toate feţele două şiruri de repere distanţate la circa 20 mm, ca în figura 9. Apoi s-a decupat eşantionul din epruvetă prin aşchiere fără răcire. S-a făcut citirea distanţei dintre perechile de repere cu o precizie de 10^{-3} mm. Diferenţa citirilor a permis calculul tensiunilor remanente de care a fost eliberat eşantionul prin decuparea lui din piesă.

Figura 10 reprezintă prismul tensiunilor remanente şi repartiţia acestor tensiuni pe fiecare faţă.



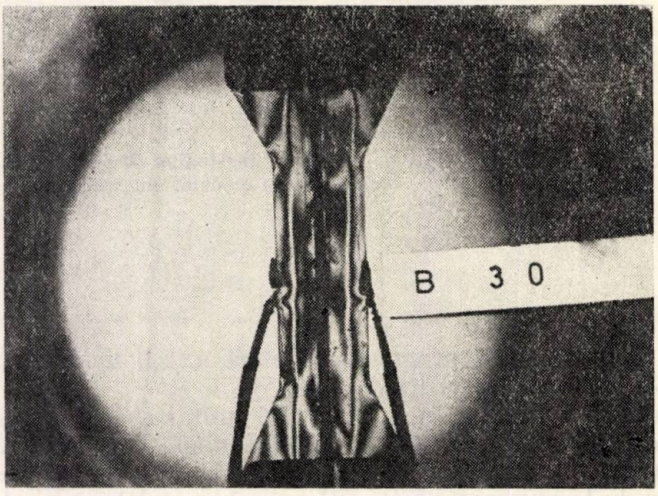


Fig. 7. și 8. — Izocromatice la epruvetele din araldit supuse la un efort unitar de întindere de 130 daN/cm².

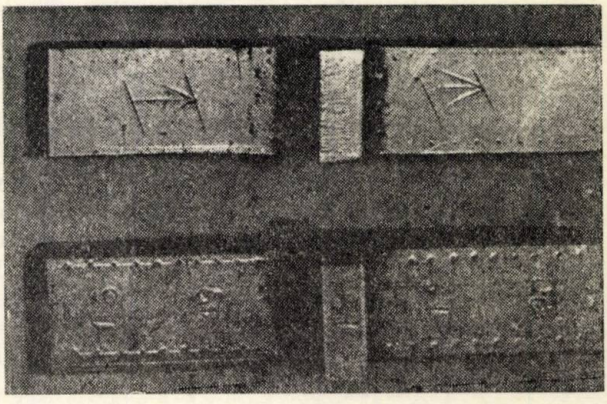


Fig. 9. — Eșantioane decupate prin așchiere.

Cîteva concluzii se desprind sinoptic:

— existența tensiunilor induse prin sudare este incontestabilă;

— epura tensiunilor remanente are alură diferită pe cele două fețe 1—1, 2—2, calitativ și cantitativ, datorită efectuării succesive a celor 4 cordoane de sudură de către același sudor. Introducerea unui cordon de sudură în cîmpul termic al unui alt cordon vecin în fază de execuție conduce la modificarea valorilor tensiunilor reziduale induse la executarea primului cordon.

Dintr-o epruvetă ruptă la oboseală prin efort axial s-a extras un eșantion similar cu cel de mai sus. În figura 11 s-a reprezentat prismul tensiunilor remanente de la acest eșantion. Se constată că încărcarea de serviciu cu caracter oscilant uniformizează tensiunile remanente în urma fenomenului indubitabil de curgere locală.

Pe mașina de încărcări la oboseală — figura 12 — sînt supuse la încercarea de oboseală, epruvetele din oțel așa cum se vede în panoul central al grinzii spațiale ce alcătuiește mașina din figura 12a. Epruveta suferă un efort axial sub un coeficient de asimetrie 0,3. După un anumit număr de repetări a sarcinii de serviciu, fisura de oboseală, care a nucleat în zona influențată termic sau în materialul depus al cordonului, devine vizibilă cu ochiul liber. În figurile 13—15 se arată o astfel de fisură care a reușit să parcurgă și o parte din materialul de bază.

Probe martor fără nervuri (deci fără tensiuni remanente din sudare) de secțiune transversală echivalentă supuse fenomenului de oboseală au avut o viață mai lungă, fisura de rupere plecînd de la una din margini, figura 13.

Concluzia este imediată și ea confirmă efectul de însumare algebrică a tensiunilor remanente induse prin sudare cu tensiunile de serviciu. Nucleerea și apariția fisurii în această zonă se confirmă odată mai mult avînd în vedere că probabilitatea de a întîlni în această zonă un defect de structură este mult mai mare.

Secțiunea transversală obținută în urma fenomenului de rupere la oboseală prezintă sub forma unor arce de cerc sau de elipsă liniile de propagare a fisurii, linii de retardare a acesteia în decursul perioadelor sale inegale de evoluție. Figurile 17—18 ilustrează aceste linii și originea lor — zona cordoanelor de sudură.

Curbele de oboseală pentru cele două tipuri de epruvete ilustrează durata de viață diferită a celor două tipuri de epruvete cu mențiunea diminuării vieții epruvetelor cu tensiuni remanente, figura 19.

În încheiere se poate spune că prin aceste încercări experimentale s-a confirmat încă odată existența tensiunilor remanente din sudare. Influența acestor tensiuni este de netăgăduit la acțiuni statice dar mai ales la cele dinamice.

Primită la redacție la 13 mai 1976

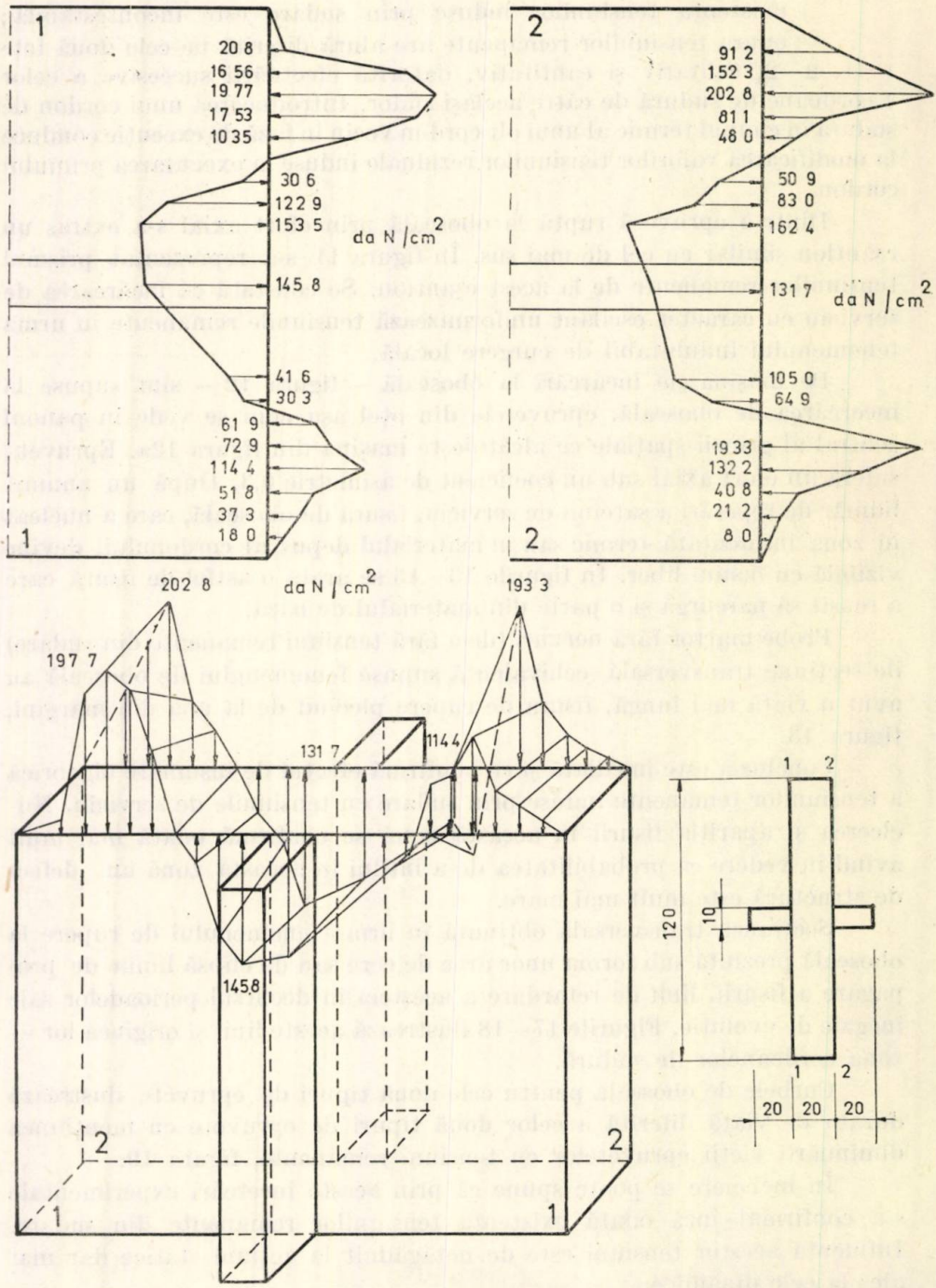


Fig. 10. — Tensiuni reziduale în epruveta nesolicitată de efortul de serviciu.

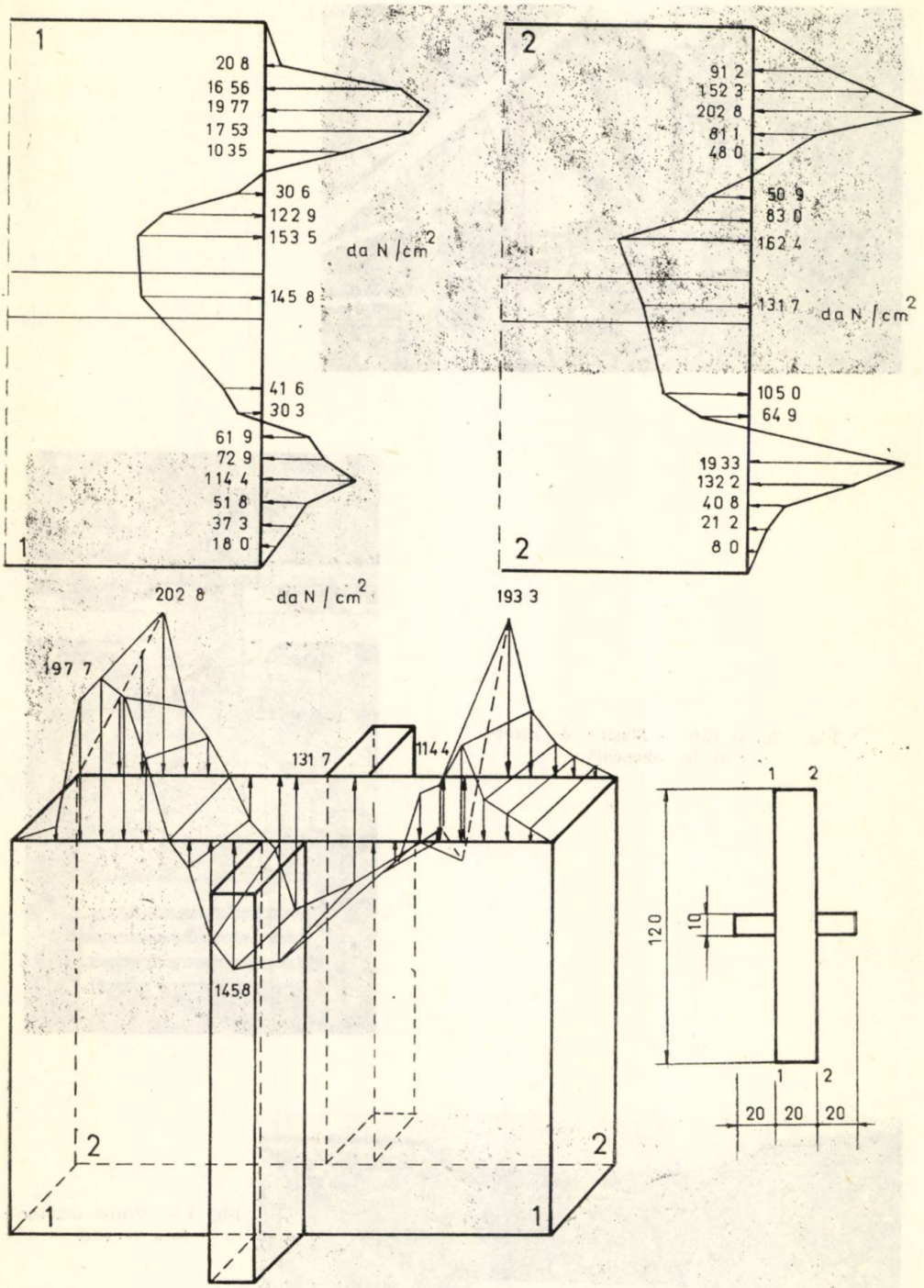
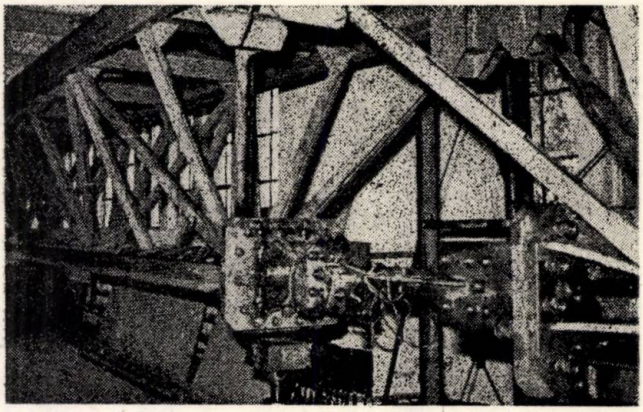


Fig. 11. — Tensiuni reziduale după ruperea prin oboseală.



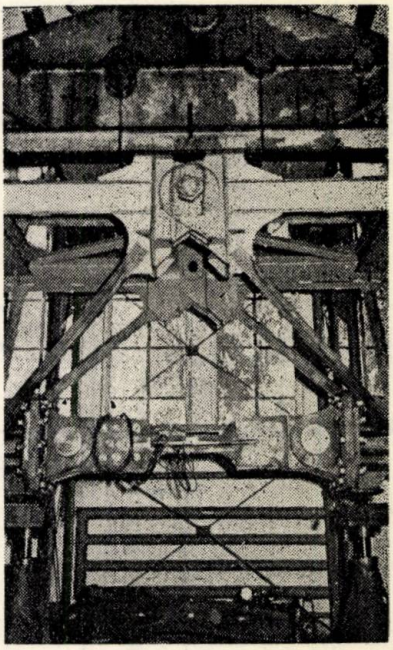


Fig. 12a. și 12b. — Mașina de încercări la oboseală.

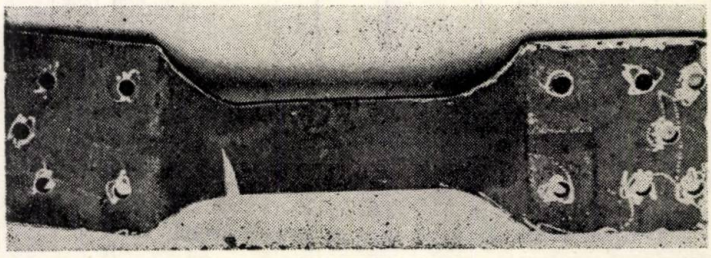


Fig. 13.—Probă martor fără nervuri

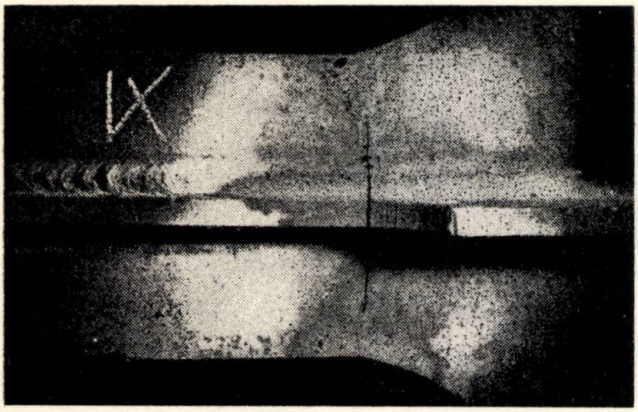
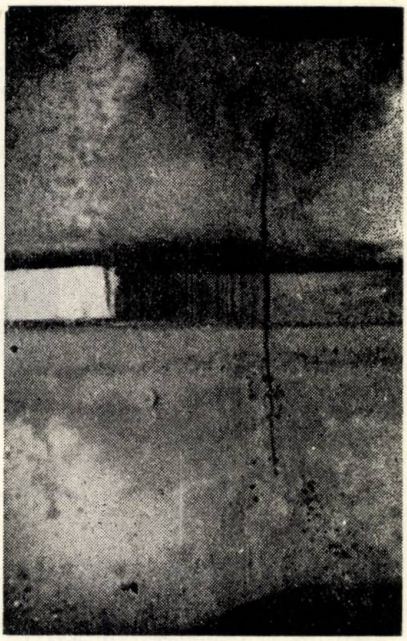


Fig. 14

Fig. 15



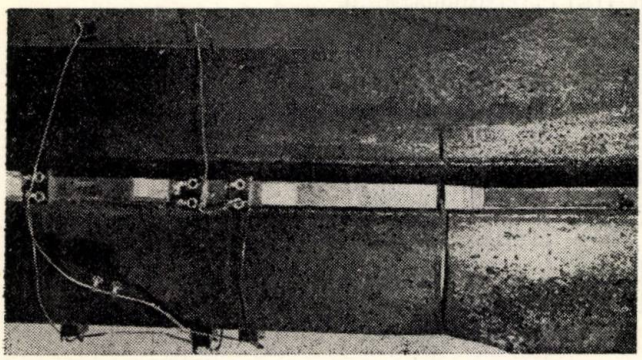


Fig. 14, 15, 16 — Propagarea fisurii de oboseală după diferite repetări a sarcinii.

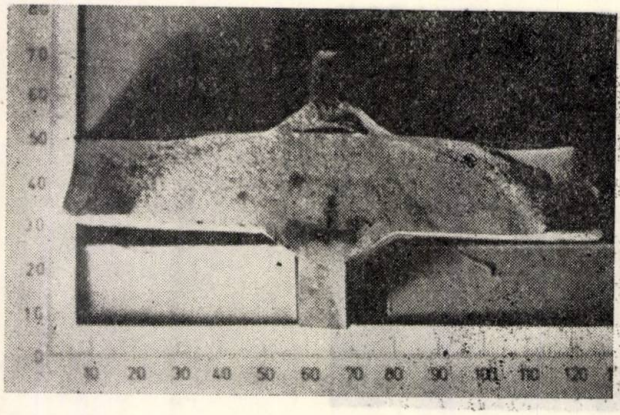


Fig. 17

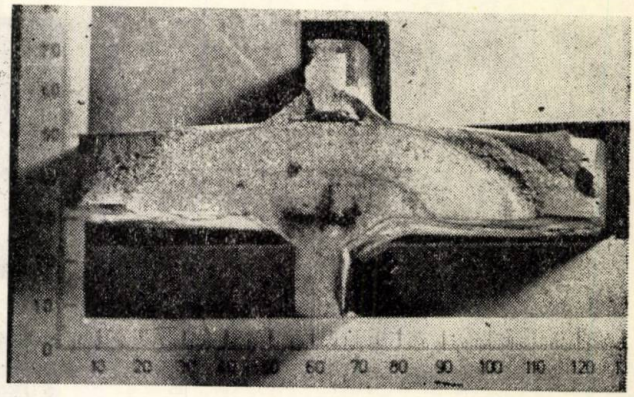


Fig. 17. și 18 — Secțiuni transversale rupte în urma fenomenului de oboseală.

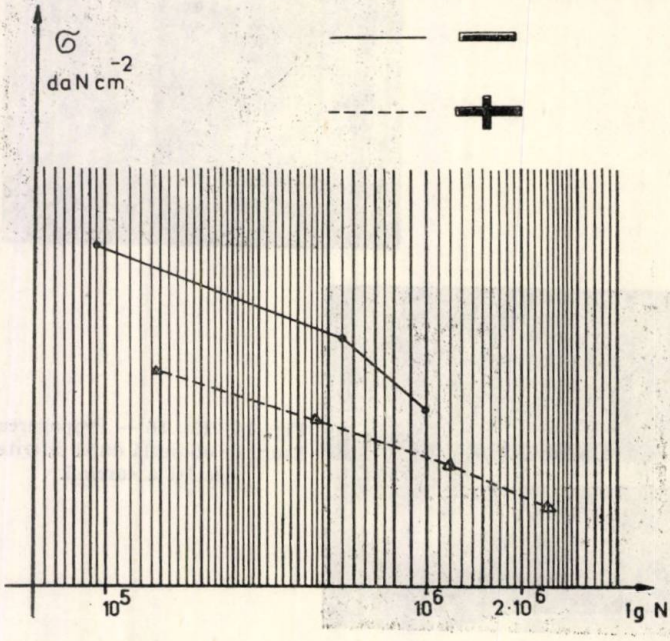


Fig. 19. — Curbe Wöhler.

ANALIZA RĂSPUNSULUI DINAMIC AL MECANISMELOR CU AJUTORUL SISTEMELOR AUTOMATE DE PRELUCRARE A DATELOR*)

de N. I. MANOLESCU, M. DRANGA
Institutul politehnic București

În prezenta lucrare se propune un algoritm, utilizînd calculul matriceal, pentru determinarea mișcării mecanismelor sub acțiunea unor forțe date (răspunsul dinamic). Prin programarea algoritmului respectiv, se poate obține răspunsul dinamic al mecanismului aplicînd o metodă corespunzătoare de integrare numerică a ecuației de mișcare.

1. INTRODUCERE

Ecuațiile care se deduc pentru descrierea mișcării mecanismelor cînd se cunosc forțele aplicate acestora, sînt de cele mai multe ori complicate; din această cauză, în prezent, pentru rezolvarea problemelor de mișcare se aplică cu precădere metode grafice. După cum se știe însă, metodele grafice sînt laborioase și nu permit decît rezolvarea unor cazuri particulare, în special cazul cînd forțele sînt funcții de poziția mecanismului; de aceea, pentru soluționarea problemei generale a răspunsului dinamic este necesară utilizarea metodelor numerice și a tehnicii automate de calcul.

Pe de altă parte, calculul cu matrice s-a dovedit foarte potrivit pentru folosirea calculatoarelor electronice; în acest sens, în prezenta lucrare se dă o formulare matriceală problemei răspunsului dinamic la mecanismele cu un grad de mobilitate.

2. PRECIZAREA UNOR NOȚIUNI ȘI REZULTATE CU PRIVIRE LA CALCULUL CU VECTORI *N*-DIMENSIONALI ȘI MATRICE

Prin vector n-dimensional (sau de ordinul n) se înțelege un sistem ordonat de n elemente, pe care îl vom nota

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

sau, prescurtat, $x = [x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

*) Lucrare prezentată la cea de a IV-a Conferință de mecanică, București, 18–20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 1, 1977, P. 51–60

În cele ce urmează, un vector n-dimensional se identifică cu o matrice unicoloană (de tipul $n \times 1$); ca urmare, prin transpusul x^T al vectorului x se înțelege același sistem de elemente, scris însă sub forma

$$x^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{2}$$

Utilizînd (2), produsul scalar a doi vectori de dimensiune n, x și y, se scrie sub forma

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y = y^T x. \tag{3}$$

O formă patratică în n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este un polinom omogen de gradul al doilea în aceste variabile:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j . \tag{4}$$

Această relație se poate scrie matriceal sub forma

$$Q = x^T A x,$$

unde A este matricea coeficienților ($A = [a_{ij}]\ i, j = 1,2 \ldots, n$). (5)

O formă pătratică se zice că este pozitiv definită dacă ea nu este niciodată negativă și singura dată cînd se anulează este cînd toate variabilele sînt zero.

Dacă în (5), elementele x_j ale vectorului x sînt funcții de o variabilă u, $x_j = x_j(u)$, și matricea A este simetrică ($A = A^T$), atunci derivata formei pătratice Q în raport cu variabila u este

$$\frac{dQ}{dx} = 2\, x^T A \frac{dx}{du}. \tag{6}$$

O matrice $A = [A_{ij}]\ i = 1, 2, 3, \ldots, m$ o vom numi matrice compusă dacă elementele A_{ij} sînt ele însele matrice.

Regula de transpunere a unei matrice compuse este

$$A^T = [A_{ij}]^T = [A_{ji}^T]. \tag{7}$$

3. VECTORII DE TRANSMITERE LA UN MECANISM

Fie un mecanism plan cu un grad de mobilitate (fig. 1), la care s-au notat

φ_1 — unghiul de poziție al elementului conducător (parametrul de intrare al mecanismului);

x_k, y_k — coordonatele centrului de greutate G_k al elementului curent k ($k = 1, 2, \ldots, n$) față de un sistem de axe fix xOy;

φ_k — unghiul, în sens direct, pe care elementul k îl face cu axa $0x$.

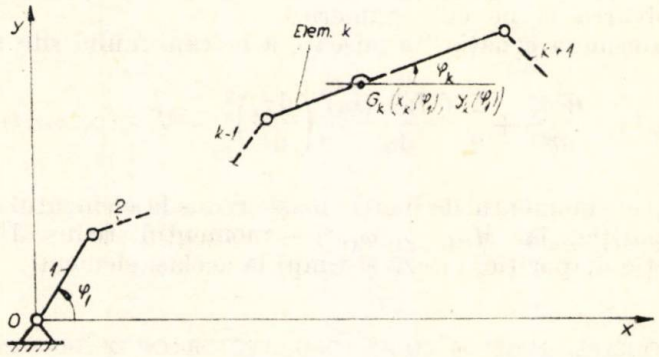


Fig. 1

Fiecărui element condus k i se atașează un vector de forma

$$T_k(\varphi_1) = \begin{bmatrix} x_k(\varphi_1) \\ y_k(\varphi_1) \\ \varphi_k(\varphi_1) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Evident, vectorul T_k definește poziția elementului respectiv pentru orice valoare a parametrului φ_1; de aceea vom numi acesta „vectorul de poziție" sau „vectorul de transmitere de ordinul zero" al elementului k. De asemenea, derivatele de ordinul unu și doi ale vectorului T_k:

$$\frac{\mathrm{d}T_k(\varphi_1)}{\mathrm{d}\varphi_1} = S_k(\varphi_1), \quad \frac{\mathrm{d}^2 T_k}{\mathrm{d}\varphi_1^2} = R_k(\varphi_1) \tag{9}$$

se vor numi *) „vectorul de transmitere de ordinul unu" și, respectiv, „vectorul de transmitere de ordinul doi" ai elementului k.

În continuare, să observăm că, notînd V_{kx} și V_{ky} proiecțiile vitezei V_k a punctului G_k pe axele de coordonate și ω_k, viteza unghiulară a elementului k, se poate scrie:

$$[V_{kx}, V_{ky}, \omega_k] = S_k^T \omega_1, \tag{10}$$

unde ω_1 este viteza unghiulară a elementului conducător ($\omega_1 = \mathrm{d}\varphi_1/\mathrm{d}t$).

*) Vectorii definiți mai sus s-au numit de „de transmitere" deoarece componentele acestora sînt funcții de transmitere de diferite ordine [12], [13].

4. ALGORITM PENTRU DETERMINAREA RĂSPUNSULUI DINAMIC AL MECANISMULUI

În cele ce urmează, vom utiliza vectorii de transmitere pentru construirea unui algoritm pentru determinarea răspunsului dinamic al mecanismului cu ajutorul calculatorului. Acest algoritm constă în principiu în scrierea ecuației de mișcare sub formă matriceală, programarea acesteia și apoi rezolvarea ei pe cale numerică.

Vom considera ecuația de mișcare a mecanismului sub forma

$$I_{red_1}(\varphi_1)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{d\,I_{red_1}(\varphi_1)}{d\varphi_1}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = M_{red_1}(\varphi_1, \omega_1, t), \tag{11}$$

unde $I_{red_1}(\varphi_1)$ ete momentul de inerție masic redus la elementul conducător (funcție de poziție), iar $M_{red_1}(\varphi_1, \omega_1, t)$ — momentul redus al forțelor (în general funcție de poziție, viteză și timp) la același element.

4.1. REDUCEREA MASELOR CU AJUTORUL VECTORILOR DE TRANSMITERE

Energia cinetică a unui element k (fig. 1), ținînd seama de (10), se poate scrie sub forma

$$E_k = \frac{1}{2} S_k^T M_k S_k \omega_1^2, \tag{12}$$

unde

$$M_k = \begin{bmatrix} m_k & & \\ & m_k & \\ & & I_k \end{bmatrix}, \tag{13}$$

m_k fiind masa elementului, iar I_k momentul său de inerție în raport cu centrul de greutate.

Mai departe, introducînd notația

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ . \\ . \\ S_n \end{bmatrix}, \tag{14}$$

energia cinetică a mecanismului capătă expresia

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k = \frac{1}{2} S^T M S \omega_1^2, \tag{15}$$

unde

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Din (15), conform definiției momentului de inerție redus, rezultă

$$I_{red_1} = S^T M S, \tag{17}$$

care este o formă pătratică pozitiv definită în raport cu componentele vectorilor S_k $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru derivarea momentului de inerție redus, scris sub forma (17), se aplică formula (6) (M este simetrică fiind o matrice diagonală). În acest mod se obține

$$\frac{\mathrm{d}I_{red_1}}{\mathrm{d}\varphi_1} = 2\, S^T M R, \tag{18}$$

unde

$$R = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi_1}. \tag{19}$$

4.2. REDUCEREA FORȚELOR CU AJUTORUL VECTORILOR DE TRANSMITERE

Forțele date pe fiecare element k se consideră reduse la un torsor, în centrul de greutate al elementului. Prin urmare, acestea se pot reprezenta printr-un vector de forma

$$U_k^T = [\mathcal{F}_{kx}, \mathcal{F}_{ky}, \mathcal{M}_k], \tag{20}$$

unde $\mathcal{F}_{kx}$ și $\mathcal{F}_{ky}$ sînt proiecțiile forței rezultante pe axele de coordonate, iar $\mathcal{M}_k$ — momentul forțelor respective față de punctul de reducere.

În continuare, se poate arăta că momentul redus al forțelor se poate scrie sub forma

$$\mathcal{M}_{red_1} = \sum_{k=1}^{n} < U_k S_k >, \tag{21}$$

care, ținînd seama de (3), se transcrie

$$\mathcal{M}_{red_1} = \sum_{k=1}^{n} S_k^T U_k = S^T U, \tag{22}$$

unde

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} \tag{23}$$

4.3. ECUAȚIA DE MIȘCARE SUB FORMĂ MATRICEALĂ

Înlocuind (17), (18) și (22) în (11) se obține ecuația de mișcare sub forma

$$S^T MS \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + S^T M R \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = S^T U. \tag{24}$$

Din (24) rezultă

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{S^T U - S^T MR \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2}{S^T MS} = \Phi\left(t, \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dt}\right), \tag{24'}$$

și cu aceasta se încheie prima parte a algoritmului. Urmează rezolvarea numerică a ecuației (24'); aceasta se poate face, de pildă, utilizînd o metodă de tip Runge-Kutta (pentru ecuații diferențiale de ordinul doi [4]). În acest mod se obțin $\varphi_1(t)$ și $\omega_1(t)$, după care se calculează

$$\varepsilon_1(t) = \Phi\,(t, \varphi_1(t), \omega_1(t)).$$

În figura 2 este arătată organigrama de principiu a algoritmului descris.

Notă

În cazul cînd forțele date sînt funcții numai de poziția mecanismului, mișcarea acestuia se poate studia comod aplicînd teorema energiei, care pe baza celor ce preced, se scrie

$$\frac{1}{2}\left(S^T MS\right)_{\varphi_1} \omega_1^2 - \frac{1}{2}\left(S^T MS\right)_{\varphi_{10}} \omega_{10}^2 = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} S^T U(\theta)\,d\theta, \tag{25}$$

unde φ_{10}, ω_{10} sînt unghiul de poziție și viteza unghiulară a elementului conducător la momentul inițial.

5. APLICAȚIE

Pentru exemplificarea modului de determinare a răspunsului dinamic prin metoda propusă, s-a considerat mecanismul din figura 3, cu următoarele date

$l_1 = 0{,}06$ m; $l_2 = 0{,}225$ m; $h_1 = 0{,}02$ m; $h_2 = 0{,}1$ m; $m_1 = 0{,}24$ kg; $m_2 = 0{,}9$ kg; $m_3 = 0{,}62$ kg; $I_1 = 0{,}04$ kgm^2; $I_2 = 0{,}06$ kgm^2.

Asupra mecanismului acționează numai forța $\mathcal{F}_3$ în lungul axei Ox, avînd legea

$$\mathcal{F}_3 = -120 \cos 50t.$$

În plus, s-a presupus că la momentul inițial, $t_0 = 0$, unghiul de poziție al manivelei $\varphi_{10} = 0$, iar viteza unghiulară $\omega_{10} = 100\ s^{-1}$.

În aceste condiții s-au determinat funcțiile de mișcare $\varphi_1(t)$, $\omega_1(t)$ și $\varepsilon_1(t)$ pe un interval de timp de 0,1 s, cu un pas de 0,001 s.

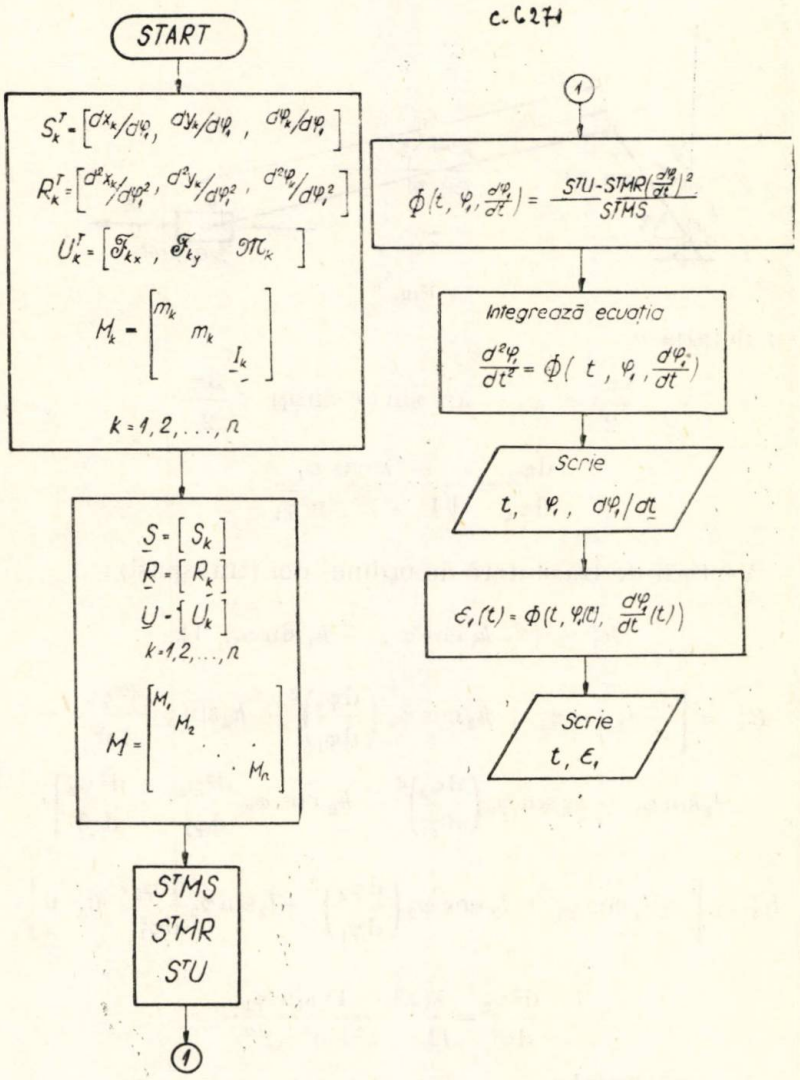


Fig. 2

Pentru început s-au scris vectorii de transmitere ai elementelor și vectorii forțelor, după cum urmează:

— Vectorii de transmitere de ordinul unu (transpuși):

$$S_1^T = [-h_1 \sin\varphi_1,\ h_1 \cos\varphi_1,\ 1],$$

$$S_2^T = \left[-l_1 \sin\varphi_1 + h_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},\ l_1 \cos\varphi_1 - h_2 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},\ \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right],$$

$$S_3^T = \left[-l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},\ 0,\ 0 \right],$$

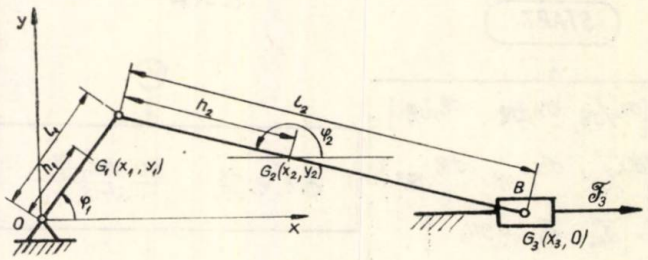


Fig. 3

unde, cu notația $\lambda = {}^{l_1}/_{l_2}$,

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_2 = \arcsin(\lambda \sin\varphi_1) < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{-\lambda \cos\varphi_1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi_1}};$$

— Vectorii de trasmitere de ordinul doi (transpuși) :

$$R_1^T = [-h_1 \cos\varphi_1,\ -h_1 \sin\varphi_1,\ 0],$$

$$R_2^T = \left[-l_1 \cos\varphi_1 + h_2 \cos\varphi_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 + h_2 \sin\varphi_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2},\ - \right.$$

$$\left. - l_1 \sin\varphi_1 + h_2 \sin\varphi_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 - h_2 \cos\varphi_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2},\ -\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \right],$$

$$R_3^T = \left[-l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 + l_2 \sin\varphi_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2},\ 0,\ 0 \right],$$

unde

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin\varphi_1}{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi_1)^{3/2}};$$

— Vectorii forțelor

$$U_1^T = U_2^T\ [0,\ 0,\ 0];\quad U_3^T = [\mathcal{F}_3,\ 0,\ 0].$$

Programul de calcul a fost scris în limbajul FORTRAN IV și a fost testat pe un calculator FELIX—256. Calculele s-au efectuat în dublă precizie. Pentru integrarea ecuației (24′) s-a utilizat metoda Runge-Kutta de ordinul patru.

Pe baza rezultatelor obținute, în figura 4 s-au trasat graficele de variație ale vitezei unghiulare și accelerației unghiulare ale elementului conducător în funcție de parametrul de intrare, precum și timpul de mișcare în raport cu același parametru.

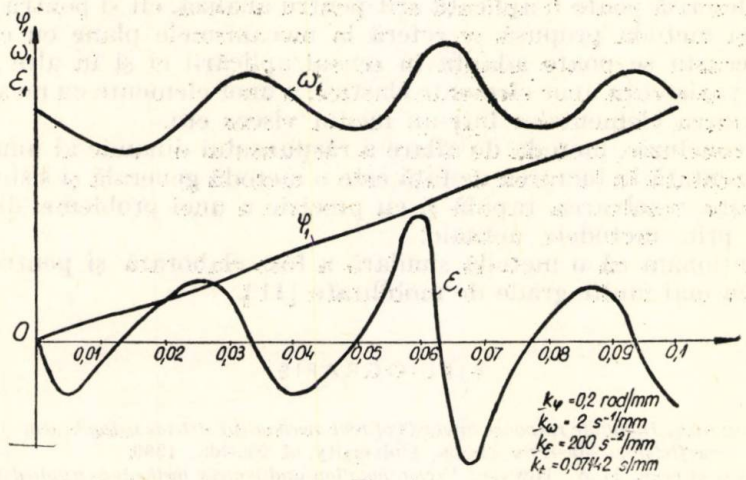


Fig. 4

În ceea ce privește precizia determinărilor, apreciem că aceasta este cît se poate de bună ; într-adevăr, repetînd calculele cu pasul pe jumătate, s-au obținut, pentru toate funcțiile de mai sus, diferențe de ordinul a 10^{-5} în valoare absolută.

6. CONCLUZII

Prezenta lucrare tratează o metodă exclusiv analitică pentru determinarea mișcării reale a unui mecanism sub acțiunea forțelor aplicate acestuia. În acest scop ecuația de mișcare este formulată matriceal, utilizînd funcțiile de transmitere de ordinul unu și doi.

Algoritmul elaborat permite scrierea unui program și soluționarea ecuației de mișcare printr-o metodă numerică adecvată.

Față de procedeele grafice, folosite astăzi aproape în exclusivitate, metoda propusă în lucrare este generală, fiind aplicabilă indiferent de legea de variație a forțelor. Totodată este de menționat ușurința cu care se obțin prin metoda respectivă oricare din funcțiile de mișcare : deplasare, viteză, accelerație ; prin metodele grafice, după cum se știe, fiecare din aceste funcții necesită construcții complicate.

Programul de calcul folosește un număr de subprograme standard, ceea ce reduce simțitor lucrările pregătitoare (programare, ajustarea programelor) și facilitează aplicarea metodei.

Prin programarea algoritmului prezentat, analiza răspunsului dinamic al mecanismului se poate face considerînd un mare număr de poziții, iar prin utilizarea unei metode corespunzătoare de intergrare a ecuației (24′) (se recomandă o metodă Runge-Kutta de ordinul patru) se asigură

o precizie a determinărilor deosebit de ridicată. În plus, programul de calcul fiind elaborat, acesta se poate aplica cu ușurință pentru diferite valori ale unor parametri, obținîndu-se astfel efectele variației parametrilor respectivi asupra răspunsului dinamic al mecanismului. Prin urmare, metoda descrisă poate fi aplicată atît pentru analiză, cît și pentru sinteză.

Deși metoda propusă se referă la mecanismele plane cu elemente rigide, aceasta se poate adapta în sensul aplicării ei și în alte situații, cum ar fi : existența unor elemente elastice, a unor elemente cu masă variabilă, mișcarea elementelor într-un mediu vîscos etc.

În concluzie, metoda de aflare a răspunsului dinamic al unui mecanism prezentată în lucrarea de față este o metodă generală și sistematică. Ea permite rezolvarea rapidă și cu precizie a unei probleme dificil de rezolvat prin metodele actuale.

Menționăm că o metodă similară a fost elaborată și pentru mecanismele cu mai multe grade de mobilitate [11].

BIBLIOGRAFIE

1. C.E. Benedict, *Dynamic response analysis of real mechanical sistems using kinematic influence coefficients*, Master's Thesis, University of Florida, 1969.
2. D.O. Blacketter, H.W. Townes, *Vector notation and matrix methods as applied to teaching dinamics of machines*, Bull. Mech. Engng. Educ., Anglia, **10**., *1* (1971).
3. R.C. Bogdan, N. Manafi, S. Cononovici, *Studiul mișcării reale a mecanismelor plane articulate prin metoda analizei armonice complexe*. Simpoz. internațional de mecanisme și metode de proiectare pe calculator, București, 7—13 iunie 1973, Vol. A.
4. L. Collatz, *The numerical treatment of differential equations*, Springer, Berlin, 1966.
5. O. Dinngerkus, *Die Ungleichförmigkeit des Antriebes periodisch übbersetzen der Getriebe*, Teză de doctorat, Aachen, 1960.
6. B. Dizioglu, *Getriebelehre*, Band 3 : Dynamick, Braunschweig, 1966.
7. M. Dranga, *Contribuții la analiza dinamică a mecanismelor cu unul și cu mai multe grade de mobilitate*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1975.
8. M. Dranga, N.I. Manolescu, *Rezolvarea numerică a ecuației de mișcare prin metoda delta*, Simpoz. internațional de mecanisme și metode de proiectare pe calculator, București, 7—13 iunie 1973.
9. N.V. Efimov, *Quadratic forms and matrices*, Academie Press, New York, 1964.
10. N.I. Manolescu, M. Dranga, *Eine Methode für die Bestimmung des Bewegungszustandes der Maschine unter der Wirkung der gegebenen äusseren Kräfte*, Conferința internațională de mecanisme și mașini, Varna-Bulgaria, **4** (1965).
11. N.I. Manolescu, M. Dranga, *La détermination matricielle des équations du mouvement d'un mécanisme avec plusieurs degrées de mobilité à l'aide des fonctions de transmission*, Al IV-lea Congres de teoria mecanismelor și mașinilor, Newcastle-Anglia, 8—13 Sept. 1975.
12. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, Ed. Acad. RSR, București, 1967.
13. I. Székely și V. Handra-Luca, *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu ajutorul funcțiilor de transmitere*. Studii și cercetări de mecanică agricolă, **II**, *2—3*, 1968.

DISTRIBUȚIA FLUXULUI TERMIC DE FRECARE ÎN ELEMENTELE CUPLEI DE TIP ROȚI DINȚATE*)

de ANDREI TUDOR
Institutul politehnic București

Se analizează distribuția fluxului termic cauzat de frecare, în elementele cuplei de tip roți dințate, contactul fiind mijlocit sau nemijlocit. Pentru faza normală de funcționare sînt deduse relațiile de calcul ale coeficientului de distribuție în pinion, în ipoteza existenței pe bandă hertziană de contact, a unor asperități distribuite aleatoriu pe lățimea de contact și identic pe lățimea dintelui. Pentru contactul mijlocit se consideră regimul de ungere E.H.D. Pe baza valorilor și variației coeficientului de distribuție se fac unele considerente asupra dependenței sarcinii de gripaj, de viteză și de lubrifiant.

În cuplele de frecare de tip roți dințate, sistemul de forțe se transmite de la un element al cuplei la celălalt, mijlocit sau nemijlocit, după cum în contact se găsește sau nu se găsește lubrifiant. Existența mișcării relative între flancurile angrenajelor conduce la frecare, care generează căldură ce trebuie disipată în elementele cuplei.

În studiul de față de analizează coeficientul de distribuție al acestui flux termic, în elementele cuplei de dimensiuni geometrice minime (pinion). Cunoașterea coeficientului de distribuție permite determinarea temperaturii instantanee pe flanc și deci de estimare a gripajului.

Se analizează faza de rodaj inițial a angrenajului, atunci cînd regimul de frecare este uscat sau limită și contactul dintre flancuri se face pe un număr redus de asperități de înălțime maximă. De asemenea, se analizează coeficientul de distribuție pe linia de angrenare în faza de funcționare normală, contactul între flancuri fiind nemijlocit și mijlocit.

Caracteristic fazei inițiale de rodaj, îi este un flux termic unidirecțional la care invariantul Péclet are valori reduse ($P_e = \frac{v_a l}{a} \leqslant \frac{4}{25}$; v_a — viteza de alunecare; l — lungimea de frecare caracteristică; $a = \lambda/\rho c$ — difuzivitatea termică; λ — conductibilitatea termică; ρ — densitatea; c — căldura specifică).

*) Lucrare prezentată la cea de a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

În ipoteza că temperaturile celor două elemente ale cuplei sînt egale în punctele de contact și asociind condiția la limită de spațiu, speța a treia (schimb de căldură dintre un corp solid și mediul fluid care-l înconjoară), Scedrov a rezolvat ecuația generală a lui Fourier aplicată unui mediu omogen, fără surse interioare de căldură [1].

Dacă se poate neglija schimbul de căldură cu mediul exterior, atunci coeficientul de distribuție al fluxului depinde numai de conductibilitățile termice ale cuplei (λ_1, λ_2)

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{1}$$

Dacă schimbul de căldură cu mediul extern nu mai poate fi neglijat, atunci β depinde atît de material, cît și de condițiile de funcționare,

$$\beta = 1 - \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\sqrt{\rho_1 c_1 v_a}}, \tag{2}$$

unde α este parametrul de convecție; v_a — viteza de alunecare corespunde unui anumit punct de pe linia de angrenare. Se observă că valoarea maximă a alunecării atrage după sine o valoare maximă a coeficientului de distribuție, fapt care coincide cu probabilitatea maximă de apariție a microsudurilor caracteristice începutului de gripaj.

Pentru cazul în care invariantul $P_e > \frac{4}{25}$ și elementele cuplei sînt în contact direct, ecuația Fourier are soluția dată de Blok [2], care determină temperatura într-un punct curent M (x, y, z),

$$T_{(x,\,y,\,z,\,t)} = \frac{q}{\rho c (4\pi a \Delta t)^{3/2}} \cdot e^{-(\Delta x^2 + y^2 + z^2)/4a\Delta t}, \tag{3}$$

unde t este timpul; Δt — perioada de timp în care a avut loc frecarea; Δx — deplasarea în direcția de mișcare; q — intensitatea sursei de căldură;

$$q_{(x,\,y,\,z)} = \mu \cdot p_{(x,\,y,\,z)} \cdot v_a, \tag{4}$$

μ — coeficientul de frecare; p — presiunea de contact de pe banda herteziană.

În figura 1 este ilustrată sursa de căldură și coordonatele punctului curent M, deplasarea făcîndu-se în direcția x.

Contactul dintre flancuri este hertzian, însă pe banda de contact există asperități ce modifică distribuția presiunii și, implicit, intensitatea sursei de căldură. Se presupune că μ și v_a sînt constante pe lățimea hertziană.

În ipoteza că punctul M se găsește pe suprafața de contact ($z = 0$) și că dimensiunea hertziană în lungul axei y este mult mai mare decît

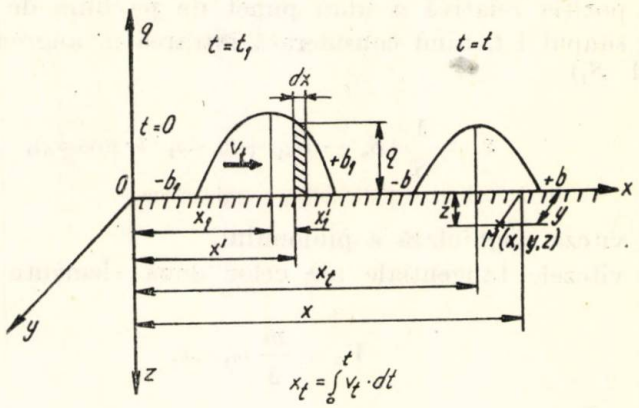


Fig. 1

cea de-a lungul axei x, temperatura ca urmare a deplasării centrului sursei din $x = 0$ ($t = 0$) la $x = x_t$ ($t = t$) va fi

$$T_{(x,\,t)} = \frac{1}{2\pi\rho ca}\int_0^t \frac{\mathrm{d}t_1}{t - t_1}\int_{x_t-b}^{x_t+b} q_{(x'-x_1,\,t_1)}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t_1)}}\,\mathrm{d}x'. \tag{5}$$

Dacă se fac notațiile: $\tau = \sqrt{t - t_1}$ și $x_r = \dfrac{x - x'}{\sqrt{4a}\cdot\tau}$, ecuația (5) devine

$$T_{(x,\,t)} = \frac{2}{\pi\rho c\sqrt{a}}\cdot\int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{d}\tau\int_{x_{r_i}}^{x_{r_f}} q_{(x-x_1-2x_r\cdot\tau\sqrt{a}\cdot t-\tau^2)}\cdot \mathrm{e}^{-x_r^2}\,\mathrm{d}x_r, \tag{6}$$

unde x_{r_i}, x_{r_f} sînt limitele de integrare; $x_{r_i} = \dfrac{x - x_t + b}{2\tau\sqrt{a}}$ și $x_{r_f}\dfrac{x - x_t - b}{2\tau\sqrt{a}}$,

Pentru rezolvarea ecuației (6) corespunzător celor două elemente ale cuplei de frecare, se definesc următoarele mărimi pe linia de angrenare:

— lungimea adimensională a segmentului teoretic de angrenare (S_a)

$$S_a = Z_1\,(1 + i)\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha_0, \tag{7}$$

unde Z_1 reprezintă numărul de dinți ai pinionului, i — raportul de transmitere; α — unghiul real de angrenare; α_0 = unghiul de divizare.

— lungimea adimensională a segmentului de angrenare caracteristic pinionului S_{a_1}, respectiv roții S_{a_2};

$$S_{a_1} = \sqrt{Z_1\sin^2\alpha_0 + 4\,f_1 Z_1 + 4f_1^2}, \tag{8}$$

$$S_{a_2} = \sqrt{i^2 Z_1^2\sin^2\alpha_0 + 4if_2 Z_1 + 4f_2^2}, \tag{9}$$

unde f_1, f_2 reprezintă coeficienții de înălțime ai capului dintelui pinionului, respectiv roții;

— poziția relativă a unui punct de pe linia de angrenare $(\bar{x})$, originea timpului t, fiind considerată intrarea în angrenare a pinionului (punctul S_1)

$$\bar{x} = \frac{1}{S_a}(S_a - S_{a1} + z_1 \cdot \omega_1 \cdot t \cdot \cos \alpha_0), \tag{10}$$

ω_1 fiind viteza unghiulară a pinionului,

— vitezele tangențiale ale celor două elemente ale cuplei (V_t)

$$V_{t_1} = \frac{m}{2} \omega_1 S_a \bar{x}, \tag{11}$$

$$V_{t_2} = \frac{m}{2i} \omega_1 S_a (1 - \bar{x}), \tag{12}$$

m fiind modulul angrenajului.

— viteza de alunecare pe flanc (V_a)

$$V_a = | V_{t_1} - V_{t_2} | = \frac{m}{2i} \omega_1 S_a | (1 + i)\bar{x} - 1 |, \tag{13}$$

— pozițiile punctului de angrenare pe flancuri se determină integrînd ecuațiile (11), (12) în raport cu timpul (X_t):

$$X_{t_1} = \frac{m}{2} \omega_1 t \left(S_a - S_{a_1} + \frac{Z_1 \omega_1}{2} \cdot t \cdot \cos \alpha_0 \right), \tag{14}$$

$$X_{t_2} = \frac{m}{2i} \omega_1 t \left(S_{a_1} - \frac{Z_1 \omega_1}{2} \cdot t \cdot \cos \alpha_0 \right). \tag{15}$$

— coeficientul de variație a sarcinii pe linia de angrenare (δ)

$$\delta(t) = \begin{cases} k + \dfrac{1 - 2k}{t_{E_1}} \cdot t \text{ pentru } t \in [0, t_{E_1}), \\ 1 \qquad\qquad \text{pentru } t \in [t_{E_1}, t_{E_2}], \\ \dfrac{2k - 1}{t_{s_2} - t_{E_1}} \cdot t - \dfrac{(2k - 1) \cdot t_{E_2}}{t_{s_2} - t_{E_1}} + 1 - k \text{ pentru } t \in (t_{E_2}, t_{s_2}), \end{cases} \tag{16}$$

unde k este un coeficient ce depinde de gradul real de acoperire [3]: t_{S_2}, t_{E_1} t_{E_2} — timpii corespunzători punctelor de ieșire din angrenare, respectiv de angrenare unipară, calculabili cu următoarele relații:

$$t_{S_2} = \frac{S_{a_1} + S_{a_2} - S_a}{Z_1 \omega_1 \cos \alpha_0}, \tag{17}$$

$$t_{E_1} = \frac{S_{a_1} + S_{a_2} - S_a - 2\pi \cos \alpha_0}{z_1 \omega_1 \cos \alpha_0}, \tag{18}$$

$$t_{E_2} = (z_1 \omega_1)^{-1} \cdot 2\pi, \tag{19}$$

— presiunea hertziană pe linia de angrenare (p_H)

$$P_H(x_1') = P_{H_0}(x_t) \cdot \sqrt{1 - (x_1'/b)^2}, \tag{20}$$

$$P_{H_0}(x_t) = 0{,}418 \cdot \sqrt{\delta(t)} \cdot \sqrt{\frac{2F_{n_1} \cdot E}{m S_a \bar{x}(1 - \bar{x})}}, \tag{21}$$

unde F_{n1} este sarcina normală pe unitatea de lățime a angrenajului,
E — modulul de elasticitate redus.
— Semilățimea benzii hertziene b:

$$b = 1{,}52 \cdot \sqrt{\delta(t)} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot F_{n_1} S_0 \cdot \bar{x}(1 - \bar{x})}{2E}}. \tag{22}$$

Se consideră că pe banda hertziană de contact se găsesc asperități dispuse identic pe lungime și aleatoriu pe lățime. În această ipoteză, se pot aplica relațiile lui Demkin [4] pentru calculul ariei reale de contact, care pentru un angrenaj au forma:

$$\eta_{(t)} = \left[\frac{2{,}35 \cdot b_0^{1/2\nu} \cdot r^{1/2} \cdot (1 - \mu_\rho^2) \cdot \delta_{(t)} \cdot F_{n1}}{2^{1/2\nu} \cdot K_2 \cdot h_{max}^{1/2} \cdot E \cdot b}\right]^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}$$ — pentru deformații elastice, (23)

unde b_0, ν reprezintă coeficienții curbei de portanță Abbott, determinabili din profilograma microsuprafeței flancului; r — raza de curbură a înălțimilor asperităților; μ_ρ — coeficientul lui POISSON, K_2 — coeficient de integrare ce depinde de ν; h_{max} — înălțimea maximă a asperităților.

$$\eta_{(t)} = \frac{\delta_{(t)} \cdot F_{n1}}{HB \cdot b}$$ — pentru deformații plastice, (24)

HB fiind duritatea Brinell a flancului.

$$\eta(t) = \Delta + \frac{b_0^{1/\nu} \cdot \nu \cdot \varepsilon_k}{2} \cdot \Delta^{\frac{\nu-1}{\nu}} \text{ — pentru deformații elasto-plastice,} \quad (25)$$

unde $\Delta = \delta_{(t)} \cdot F_{n1}/b \cdot \sigma_c$; σ_c — efortul unitar mediu de curgere al materialului mai moale; $\varepsilon_k = a_k/h_{\max}$; a_k — deformația critică de trecere de la elasticitate la plasticitate.

$$a_k = 48{,}15 \cdot r \cdot (1 - \mu_p^2)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_c}{E}\right)^2, \quad (26)$$

Caracterul deformației se poate determina cu ajutorul indicelui de plasticitate a lui Williamson [5]:

Cu aceste considerente presiunea reală pe banda de contact se poate determina cu relația:

$$P(x_1') = \begin{cases} P_H(x_1'), \dfrac{1 + \eta(t)}{\eta(t)} & \text{— pentru zonele cu asperități;} \\ P_H(x_1') \cdot \dfrac{-\eta(t) + 1}{\eta(t)} & \text{— pentru zonele dintre asperități} \end{cases} \quad (27)$$

Contactul dintre suprafețe fiind nemijlocit, temperaturile vor fi egale ($T_1 = T_2$) condiție din care se determină coeficientul de disipare a fluxului termic (β).

$$\beta(x_{r_1}, \tau) = \beta(x_1', t) = \frac{\rho_1 c_1 \sqrt{a_1} I_2}{\rho_2 c_2 \sqrt{a_2} I_1 + \rho_1 c_1 \sqrt{a_1} I_2}, \quad (28)$$

unde

$$I_{1,2} = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{(1+\eta)\,|(1+i)\,\bar{x} - 1|}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{\delta(\tau)}{\bar{x}(1-\bar{x})}} \cdot \mathrm{d}\tau \int_{x_{r_{i1,2}}}^{x_{r_{f1,2}}} \sqrt{1 - (x'_{11,2/b})^2} \cdot$$

$$\cdot \mathrm{e}^{-x_{r1,2}^2} \cdot \mathrm{d}x_{r1,2}, \quad (29)$$

$$\text{iar } x'_{11,2} = x_{11,2} - x_{i1,2} + x_{r1,2} \cdot \tau \cdot \sqrt{4a_{1,2}}. \quad (30)$$

Valoarea medie a lui β, pe banda hertziană se poate determina cu relația

$$\beta_m(t) = \frac{\int_{-b}^{b} \beta(x'_{1,t}) \cdot q \cdot dx'_1}{\int_{-b}^{b} q \cdot \mathrm{d}\, x'_1}. \quad (31)$$

Dacă în relația (29) se particularizează la cazul $t = 0$ și independent de cinematica și microgeometria cuplei de frecare ($I_1 = I_2 = 1$), rezultă legea Charron — Vernotte de disipare a fluxului termic.

$$\beta = \frac{\rho_1 c_1 \sqrt{a_1}}{\rho_1 c_1 \sqrt{a_1} + \rho_2 c_2 \sqrt{a_2}}, \tag{32}$$

iar dacă β este constant pe banda hertziană de contact și independent de încărcare ($I_1 = \sqrt{V_{t_2}}$, $I_2 = \sqrt{V_{t_1}}$) rezultă relația utilizată de Blok pentru calculul temperaturii instantanee,

$$\beta = \frac{\rho_1 c_1 \sqrt{a_1 \cdot V_{t_1}}}{\rho_1 c_1 \sqrt{a_1 \cdot V_{t_1}} + \rho_2 c_2 \sqrt{a_2 \cdot V_{t_2}}}. \tag{33}$$

Dacă banda de contact nu are asperități ($\eta = 1$), atunci rezultă relația utilizată de Toshimi [6] pentru corijarea angrenajelor din punctul de vedere al temperaturii.

Rezolvarea ecuației (29) se face prin metode numerice, dezvoltînd exponențială și radicalul în serii de puteri cu 4 termeni, integrarea făcîndu-se cu formula aproximativă a lui Gauss.

În figura 2, se prezintă variația lui β în punctele S_1, E_1, P, E_2, S_2 pentru flancul unui angrenaj ce are geometria corespunzătoare cuplei A DIN 51354, iar microgeometria cu caracteristicile $b_{0_1} = 0{,}9$; $b_{0_2} = 0{,}7$; $\nu_1 = 1{,}1$; $\nu_2 = 1{,}2$; $h_{\max_1} = 4{,}2$ μm ; $h_{\max_2} = 3{,}4$ μm, în ipoteza deformației elastice, pînă în zona de inflexiune din curba Abbott. Materialul elementelor cuplei este 41 MoC11.

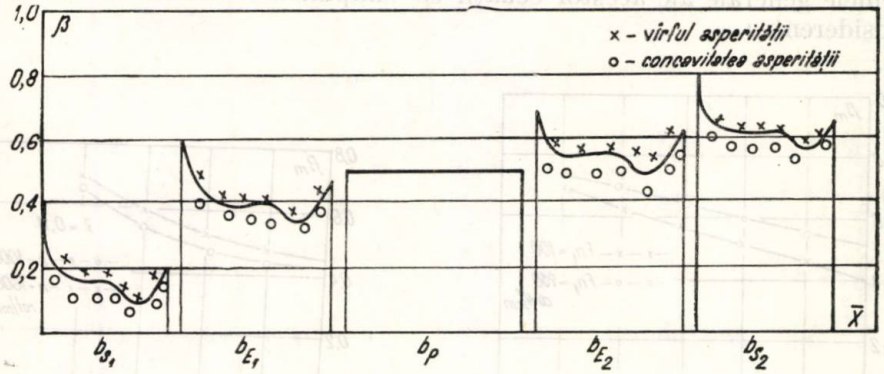


Fig. 2

Se observă din figură, o disipare maximă în pinion la intrarea în zona de contact, urmînd apoi o scădere lentă pînă la o valoare critică dependentă de proprietățile materialelor, urmînd apoi o creștere neînsemnată către ieșirea din zonă. Această observație coincide cu variația relativ bruscă a coeficientului de frecare în momentele de intrare în contact al cuplelor, indicator obiectiv al începutului uzurii de gripaj.

Din figura 3 se poate remarca că la intrarea în angrenare (punctul S_1), gradientul lui $P_m(\mathrm{d}\beta_m/\mathrm{d}\bar{x})$ este maxim, urmînd apoi o valoare constantă pentru ca în punctul de ieșire din angrenare S_2, să crească din nou însă cu valori mai mici decît în S_1.

Regimul cinematic modifică distribuția fluxului, în sensul că se intensifică disiparea în pinion la intrarea și ieșirea din angrenare cu ponderea de 1,45, la o creștere a turației de trei ori (fig. 4). O variație similară prezintă cu sarcina, ponderea fiind de 1,60 la 3 (fig. 5).

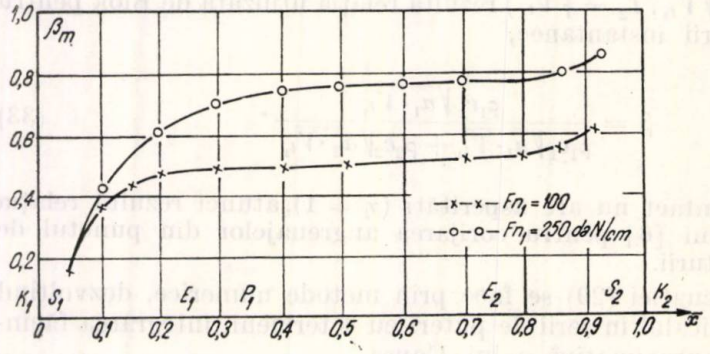


Fig. 3

Dacă fluxul de forță se transmite la de un element al cuplei la celălalt prin intermediul lubrifiantului (caracteristic unor puncte de pe linia de angrenare), atunci disiparea căldurii de frecare se modifică. La baza analizei complete a coeficientului de distribuție stau ecuațiile energiei, curgerii fluide și elasticității suprafeței. Pentru cuplele cu roți dințate, formele generale ale acestor ecuații se simplifică datorită următoarelor considerente:

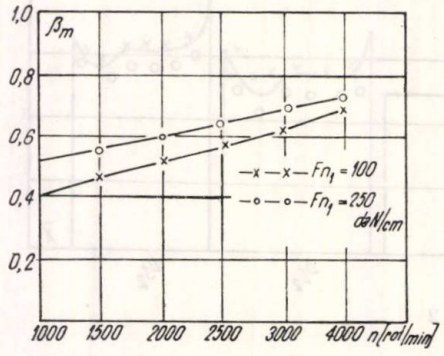


Fig. 4

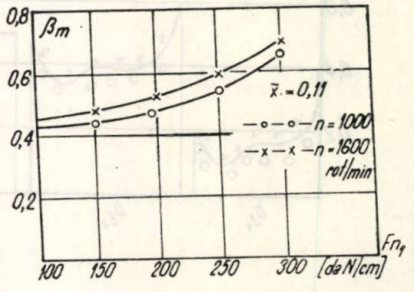


Fig. 5

— lățimea benzii hertziene de contact este mult mai mică decît lungimea, fapt pentru care viteza fluidului pe lungime se poate neglija ($V_y = 0$);

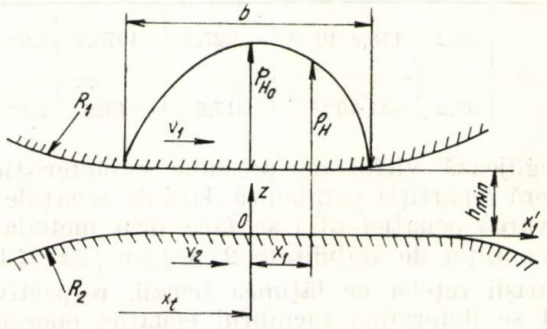
— grosimea filmului de lubrifiant este suficient de mică încît să poată fi neglijată deplasarea fluidului de la un element al cuplei la celălalt ($V_z = 0$);

— viteza de alunecare este mult mai mare decît variația vitezei pe

lățimea de contact $(\partial v_{x_1'}/\partial x_1' \ll \partial v_{x_1'}/\partial z)$;

— fluidul se consideră incompresibil pe lățimea benzii de contact. Cu aceste ipoteze, ecuația energiei în regim de lucru staționar are expresia [7]:

Fig. 6



$$\rho c v_{x_1'} \frac{\partial T}{\partial x_1'} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 2\eta_u \cdot \left(\frac{\partial v_{x_1'}}{\partial z} \right)^2, \tag{34}$$

unde η_u reprezintă viscozitatea dinamică a lubrifiantului; x_1', y, z — coordonatele punctului curent (fig. 6); $v_{x_1'}$ — viteza corespunzătoare punctului curent de pe banda hertziană.

Se consideră regimul de ungere E.H.D., caracteristic unor puncte de pe linia de angrenare a roților dințate [8], grosimea minimă a filmului de lubrifiant fiind determinată cu relația lui Dowson și Higginson, care în aceste condiții are forma

$$h(t) = 1{,}6 \cdot E^{0{,}03} \cdot \alpha_p^{0{,}6} \cdot \left(\frac{mS_a}{2} \right)^{1{,}13} \cdot \left[\eta_{ut} \cdot \frac{\omega_1}{i} |(1+i)\bar{x} - 1| \right]^{0{,}7} \cdot$$

$$\cdot [\bar{x}(1-\bar{x})]^{0{,}43} \cdot [\delta(t) \cdot F_{n_1}]^{-0{,}13}, \tag{35}$$

unde α_p este parametru de variație a viscozității cu presiunea;

η_{ut} — viscozitatea dinamică dependentă numai de temperatură.

Viscozitatea reală se determină cu formula utilizată de Cheng și Arrhenius [9];

$$\eta_u = \eta_{0u} \cdot e^{\left[\alpha_p \cdot p + (\beta_p + \gamma_p \cdot p) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]}. \tag{36}$$

Pentru uleiurile M30 și M50 STAS 871—68 sînt date în tabelul 1, valorile acestor constante prin similitudine cu uleiuri străine, iar în relația (37) variația lui η_{ut}.

$$\eta_{ut} = K_u \cdot e^{\frac{A}{T+95}} \tag{37}$$

Tabelul 1

Constante / Uleiuri	T_0 °C	η_{0u} $\frac{N \cdot S}{m^2}$	α_p $\frac{m^2}{N}$	β_p °C	γ_p $\frac{m^2 °C}{N}$	K_u $\frac{N \cdot S}{m^2}$	A °C
M30	37,2	$118{,}8 \cdot 10^{-3}$	227,2	1073,5	$1{,}69 \cdot 10^{-5}$	$7{,}416 \cdot 10^{-5}$	986,1
M50	37,2	$324 \cdot 10^{-3}$	317,5	1326	$2{,}10 \cdot 10^{-5}$	$4{,}692 \cdot 10^{-5}$	1137,3

Se neglijează vîrful de presiune caracteristic regimului E.H.D. și se consideră repartiția parabolică dată de ecuațiile (20) și (21) .

Rezolvarea ecuației (34) se face prin metoda diferențelor finite, respectînd condiția de stabilitate $2\lambda\Delta x / \rho c v_{x_1'} \Delta z^2 \leqslant 1$, unde Δx și Δz reprezintă pașii rețelei pe lățimea benzii, respectiv grosimea filmului.

Inițial se determină membrul ecuației energiei ce caracterizează disiparea fluxului termic, considerînd, presiunea punctului curent și temperatura punctului anterior, în ipoteza că disiparea în direcția z predomină pe cea în direcția x_1'.

Într-un element (i, j) al rețelei, variația temperaturii va fi dată de ecuația

$$\rho \cdot c \cdot v_{x_{1j}'} \cdot \frac{\Delta T_{i,j}}{\Delta x} = \eta_{ui,j} \left(\frac{\Delta v_{x_{1,j}'}}{\Delta z} \right)^3 \tag{38}$$

și ținînd cont de legea frecării fluide a lui Newton, se determină gradientul vitezei :

$$\frac{\Delta v_{x_{1j}'}}{\Delta z} = \frac{V_a}{\eta_{ui,j} \cdot \Delta z} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\eta_{ui,j}}} \cdot \tag{39}$$

Temperatura într-un element al rețelei $(i, j + 1)$ se determină din condiția de transmitere a fluxului termic din elementul (i, j) către elementele cuplei de frecare :

$$\rho c v_{x_{1j}'} = \frac{2\lambda}{\Delta z^2} \left(\frac{T_{j+1} + T_{j-1}}{2} - T_j \right). \tag{40}$$

Pe suprafața de separație metal-lubrifiant, fenomenul de transmitere a căldurii este guvernat de ecuația de difuzie :

$$v_{x_{11,2}'} \frac{\Delta T_{mj1,2}}{\Delta x} = \frac{1}{\rho_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot \Delta z_{1,2}^2} \cdot \left[\frac{T_{u1,n} - T_{mj1,2}}{\frac{\Delta z_u}{2\lambda_u} + \frac{\Delta z_{1,2}}{2\lambda_{1,2}}} + \frac{T_{mj-1\ 1,2} - T_{mj}}{\frac{\Delta z_{1,2}}{\lambda_{1,2}}} \right], \tag{41}$$

unde m — indicele metalului ; u — ulei, ; 1,2 — cele două elemente ale cuplei de frecare.

Ținînd cont de acestea și de definiția intensității fluxului termic $\left(q = \lambda \frac{dT}{dz} \right)$ se poate deduce ecuația coeficientului de distribuție a

fluxului (β). Dacă pasul rețelei pe direcția z este constant, atunci β va avea expresia :

$$\beta_i = \frac{a_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 \cdot (T_{ui,1} - T_{mi,1})}{a_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 \cdot (T_{ui,1} - T_{mi,1}) + a_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 \cdot (T_{ui,n} - T_{mi,2})}, \quad (42)$$

unde T_{u_1} — temperatura uleiului din primul strat, aderent elementului cuplei 1 ; T_{un} — temperatura uleiului din stratul n, aderent elementului cuplei 2 ; $T_{m1,2}$ — temperatura metalului elementului 1,2, în primul său strat din contactul cu lubrifiantul.

După cum se observă, coeficientul de disipare a fluxului termic depinde atît de caracteristicile metalului, cît și de cele ale lubrifiantului, pentru o aceeași poziție, pe banda hertziană. În punctele de pe linia de angrenare, unde ungerea este E.H.D., valoarea medie a lui $\beta(\beta_m)$ poate fi determinată cu relația

$$\beta_m = \int_{-b}^{b} \beta_i dx_1'/b \cdot 2. \quad (43)$$

În figura 7, se prezintă variația coeficientului β, într-un punct de pe linia de angrenare caracterizat prin $\bar{x} = 0{,}425$, unde ungerea este E.H.D. ai cărei parametri sînt determinați pe un calculator FELIX C—256.

Pentru cupla de frecare tip A DIN 51354, în acele condiții funcționale care asigură o ungere E.H.D. În punctul S_1, variația lui β_m cu turația (fig. 8) este similară cu variația inversului sarcinii de gripaj dedusă experimetal de Lechner [10]. Variația cu sarcina a distribuției fluxului (fig. 9) arată o ușoară creștere pentru același ulei și o scădere însemnată cu creșterea viscozității lubrifiantului, ceea ce demonstrează o legătură intrinsecă cu procesul de gripaj, care are o aceeași dependență calitativă.

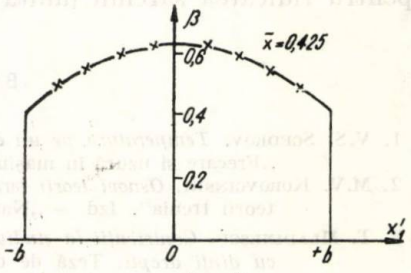


Fig. 7

Din analiza variației coeficientului de distribuție a fluxului termic (β) în elementul cuplei de dimensiuni minime (pinion), reiese că valoarea lui β, precum și gradientul său cu timpul sau cu distanța, reprezintă un indicator calitativ sau chiar cantitativ al uzurii de gripaj. În punctele cu regim de ungere uscat sau mixt, nu este caracteristică mărimea coeficientului de distribuție, ci variația sa, ceea ce se explică prin aceea că, producerea căldurii de frecare are o pondere mai mare decît disiparea ei și dacă durata acestei variații este suficient de mare, atunci temperatura crește brusc, conducînd la adeziuni și suduri locale, fenomene caracteristice începutului de gripaj.

În cazul contactului mijlocit, lubrifiantul are un rol de „amortizare" termică, ceea ce face ca valoarea coeficientului să fie preponderentă față de variația sa. Existența unui maxim la variația cu viteza, poate fi explicată prin aceea că la viteze mici, pondere mare are variația viscozităț i

(scade cu creşterea temperaturii) faţă de grosimea filmului de lubrifiant, pe cînd la viteze mari creşterea grosimii filmului E.H.D. capătă importanţă maximă.

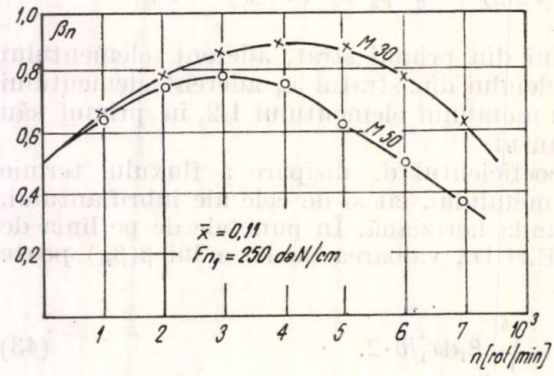


Fig. 8

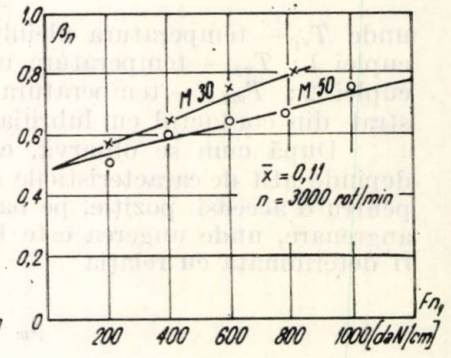


Fig. 9

Uleiul M50 este superior lui M30 atît pentru regim cinematic diferit la încărcare constantă, cît şi la regim cinematic constant şi încărcări diferite, fapt ce se aseamănă calitativ cu utilizarea uleiurilor mai vîscoase pentru ridicarea sarcinii limită de gripaj.

BIBLIOGRAFIE

1. V.S. Scedrov, *Temperatura pe un contact alunecător* (tradus din limba rusă în culegerea „Frecare şi uzură în maşini" culegerea 10, 1956).
2. M.V. Korovcinski, *Osnovî teorii termicescovo contacta pri localniom trenii*, Sb. „Novoe v teorii trenia". Izd. — „Nauka", 1966.
3. T. Mladinescu, *Contribuţii la studiul sarcinilor dinamice pe dinţii roţilor dinţate cilindrice cu dinţi drepţi*, Teză de doctorat, I.P.B., 1966.
4. N.B. Demkin, *Facticescaia plosciadi casania tverdîh poverhnostei*, Izd. Acad. Nauk S.S.S.R., Moscva, 1962.
5. J.A. Greenwood, *Area of contact between a rough surface and plane*, Research Report No. 25, July, 30, 1965.
6. Tobe Toshimi, Kato Masana, *A study on flash temperatures on the spur gear teeth*, Trans. ASME, 1974, B96, Nr. 1, 78—84 Repr. — ASME Pap., 1972, Nr. PTG—26.
7. S.M. Manton, J.P. O'Donoghue, A. Cameron, *Temperatures at lubricated roling/sliding contacts*, Proc. Instn. Mech. Engrs. 1967—1968, 182, 111. p. 813—824,
8. A. Tudor, *Consideraţii asupra utilizării calculatorului electronic numeric în vederea determinării condiţiilor de prevenire a gripajului roţilor dinţate*, St. cerc. mec. apl., **35**, *4* (1976).
9. E.F. Finkin, A. Gu, L. Young, *A Critical Examination of the E.H.D. Criterion for the Scoring of Gears*, Trans. ASME, July, 1974.
10. G. Lechner, *Ungerea roţilor dinţate*, „Maschinenmarkt, **74**, *2* (1968), p. 24—31 (tradusă în Frecare. Ungere. Lubrifianţi. C.S. — I.D.T.1—1968.

DEZLOCUIREA FLUIDELOR DIN ZĂCĂMINTELE DE ȚIȚEI PRIN INJECȚIA UNUI AMESTEC BIFAZIC

de V. IONESCU,
Universitatea din Craiova

AL. TURTĂ
Institutul de cercetări și proiectări pentru petrol și gaze, Cîmpina

I. TUTUNEA
Universitatea din Craiova

Lucrarea cuprinde studiul teoretic al dezlocuirii unui amesetc trifazic (țiței-apă-gaz) dintr-un zăcămînt omogen, prin injecția unui amestec bifazic (apă-gaz) în regim izoterm. Condițiile de dezlocuire sînt următoarele: mișcarea este considerată unidimensională, necapilară, negravitațională, iar fazele fluide incompresibile și nemiscibile. Se stabilește sistemul de ecuații cu derivate parțiale la care satisface saturația în apă și gaz și se integrează aproximativ prin metoda caracteristicilor. Condițiile inițiale presupun cunoașterea saturației în apă și gaz, iar cele la limită impun cunoașterea debitului de amestec injectat, precum și compoziția amestecului la fața de intrare.
Rezultatele teoretice sînt aplicate la un caz concret de dezlocuire, în ipoteza că la fața de intrare saturația amestecului injectat este egală cu cea din zăcămînt la momentul inițial și în ipoteza că această saturație este diferită de cea din zăcămînt.

În prezent, o parte din metodele noi de mărire a factorului final de recuperare — injecție de abur, combustie subterană, injecție de apă, gaze — comportă dezlocuirea țițeiului din zăcămînt, nu prin injecția unui singur fluid ci prin injecția unui amestec de două fluide nemiscibile.

Datorită complexității fenomenelor, studiul început în lucrarea [1] s-a rezumat la descrierea evoluției distribuției saturațiilor în apă și aer la injecția unui amestec apă-aer într-un mediu poros saturat, fie numai cu aer, fie cu aer și apă. Rezolvarea problemei s-a făcut prin aplicarea teoriei caracteristicilor, modificată prin înlocuirea galeriei de injecție cu un mediu poros fictiv prin care filtrează amestecul bifazic, saturația (pentru ambele fluide) fiind constantă și determinată de valoarea fracției în curent. A rezultat că saturația constantă de la fața de intrare se deplasează cu aceeași valoare formîndu-se un banc de saturație constantă în fluidul mai puțin mobil, iar în fața bancului filtrează fluidul mai mobil.

În lucrarea de față va fi aplicată metoda caracteristicilor la rezolvarea ecuațiilor de mișcare ce guvernează dezlocuirea sistemului țiței-gaze-apă din zăcămînt de către un amestec apă-gaze.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 1, 1977, P. 73–88

Condițiile în care se face studiul problemei sînt următoarele : mișcarea este considerată unidimensională, necapilară, negravitațională, fazele fluide incompresibile și nemiscibile. Dezlocuirea se face de către un amestec apă-gaz, care impune la fața de intrare saturații egale sau diferite de saturațiile inițiale. Sub acest aspect lucrarea de față generalizează rezultatele obținute în [1].

Studiul problemei astfel formulată revine la integrarea unui sistem cvaziliniar de ecuații cu derivate parțiale la care satisface saturația în apă și gaz, considerate ca funcții necunoscute independente, în condițiile inițiale și la limită impuse de natura mișcării. Pentru rezolvarea acestei probleme la limită se folosește metoda caracteristicilor, utilizată de Buckley și Leverett în studiul dezlocuirilor bifazice în [2]. Metoda caracteristicilor a mai fost utilizată în studiul dezlocuirilor trifazice și în [3].

Ecuațiile de mișcare. Cele trei faze prezente în mediul poros fiind apa, țițeiul și aerul sau un gaz oarecare, se fac următoarele notații :

s_a, s_g, s_t — saturațiile în apă, gaz, țiței ;
v_a, v_g, v_t — vitezele apei, gazului și țițeiului ;
k_a, k_g, k_t — permeabilitățile relative corespunzătoare ;
μ_a, μ_g, μ_t — vîscozitățile dinamice ale fluidelor în contact ;
k — permeabilitatea absolută a mediului ;
v — viteza totală ;
m — porozitatea mediului ;
σ — suprafața de filtrare.

Mișcarea fiind unidimensională, s-a înlocuit în notațiile precedente vectorul viteză cu modulul său. Se presupune că mișcarea se face după legile lui Darcy,

$$v_a = -\frac{k_a}{\mu_a} k \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} k \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_t = -\frac{k_t}{\mu_t} k \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

unde $p(x)$ este presiunea în mediul fluid. Permeabilitățile relative sînt funcții, cunoscute experimental, de saturațiile s_a, s_g, s_t. Deoarece saturațiile satisfac relația

$$s_a + s_g + s_t = 1, \tag{2}$$

urmează că de fapt numai două sînt idependente, adică se poate considera

$$k_a = k_a(s_a, s_g); \; k_g = k_g(s_a, s_g); \; k_t = k_t(s_a, s_g). \tag{3}$$

Fazele fluide satisfac relațiile de continuitate respective :

$$m\frac{\partial s_a}{\partial t} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = 0; \; m\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0; \; m\frac{\partial s_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Se observă că ecuația

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

care exprimă faptul că debitul total se păstrează, este o consecință a ecuațiilor (4), din care se obține prin adunare, dacă se ține seama de relația (2).

Pentru a se obține ecuațiile de mișcare, se pornește de la ecuațiile (4), în care se ține seama de legile de mișcare (1):

$$m\frac{\partial s_a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_a}{\mu_a}k\frac{\partial p}{\partial x}\right);\quad m\frac{\partial s_g}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_g}{\mu_g}k\frac{\partial p}{\partial x}\right);\quad m\frac{\partial s_t}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_t}{\mu_t}k\frac{\partial p}{\partial x}\right). \tag{5}$$

Dacă se adună relațiile de mai sus se obține:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_a}{\mu_a}k\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{k_g}{\mu_g}k\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{k_t}{\mu_t}k\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0. \tag{6}$$

Prin integrare, relația de mai sus devine

$$k\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{k_a}{\mu_a}+\frac{k_g}{\mu_g}+\frac{k_t}{\mu_t}\right)=-v(t), \tag{7}$$

unde $v(t)$ este viteza totală. Din (7) se deduce expresia gradientului de presiune

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{v(t)}{kf(s_a,s_g)}, \tag{8}$$

unde s-a notat

$$f(s_a,s_g)=\frac{k_a}{\mu_a}+\frac{k_g}{\mu_g}+\frac{k_t}{\mu_t}, \tag{9}$$

Dacă se folosește (8) în relațiile (4) se obține

$$m\frac{\partial s_a}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_a}{\mu_a}\frac{v(t)}{f(s_a,s_g)}\right); \tag{10.1}$$

$$m\frac{\partial s_g}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_g}{\mu_g}\frac{v(t)}{f(s_a,s_g)}\right), \tag{10.2}$$

$$m\frac{\partial s_t}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_t}{\mu_t}\frac{v(t)}{f(s_a,s_g)}\right), \tag{10.3}$$

ecuațiile de dezlocuire, similare cu cele întîlnite în dezlocuirea bifazică. Ele nu sînt independente. Într-adevăr, dacă se adună (10.1) și (10.2) și se ține seama de (2) și (9), se obține (10.3). Se consideră ca ecuații independente (10.1) și (10.2), care conțin funcțiile necunoscute independente s_a și s_g.

Aceste ecuații pot fi aduse la o formă care pune și mai bine în evidență analogia de formă cu mișcarea bifazică. Pentru aceasta se introduc expresiile fracțiilor celor trei faze în curent :

$$f_a = \frac{v_a}{v} \; ; \; f_g = \frac{v_g}{v} \; ; \; f_t = \frac{v_t}{v}, \tag{11}$$

care satisfac relația evidentă

$$f_a + f_g + f_t = 1, \tag{12}$$

unde s-a notat

f_a — fracția de apă în curent,
f_g — fracția de gaz de curent,
f_t — fracția de țiței în curent.

Fracția de apă în curent va avea expresia

$$f_a = \frac{v_a}{v} = \frac{1}{1 + \frac{k_g}{k_a}\frac{\mu_a}{\mu_g} + \frac{k_t}{k_a}\frac{\mu_a}{\mu_t}}, \tag{13}$$

care, după cum se vede, generalizează expresia corespunzătare din dezlocuirea bifazică. Fracțiile de gaz și țiței în curent vor fi

$$f_g = \frac{v_g}{v} = \frac{1}{1 + \frac{k_a}{k_g}\frac{\mu_g}{\mu_a} + \frac{k_t}{k_g}\frac{\mu_g}{\mu_t}}, \quad f_t = \frac{v_t}{v} = \frac{1}{1 + \frac{k_a}{k_t}\frac{\mu_t}{\mu_a} + \frac{k_g}{k_t}\frac{\mu_t}{\mu_g}}. \tag{14}$$

Aceste expresii permit scrierea ecuațiilor de mișcare într-o formă similară cu cea întîlnită în dezlocuirea bifazică. Dacă se ține seama de (13), ecuația (10.1) devine :

$$m\frac{\partial s_a}{\partial_t} + \frac{\partial}{\partial x}[v(t)f_a] = 0$$

sau încă

$$m\frac{\partial s_a}{\partial_t} + v(t)\frac{\partial f_a}{\partial x} = 0.$$

Introducînd în expresia de mai sus debitul injectat, $Q = v\sigma$, se obține

$$\frac{m\sigma}{Q}\frac{\partial s_a}{\partial t} + \frac{\partial f_a}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

identică, în ceea ce privește forma, cu ecuația de dezlocuire dată de Buckley și Leverett. În mod similar se obține și ecuația la care trebuie să satisfacă $s_g(x, t)$:

$$\frac{m\sigma}{Q}\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial f_g}{\partial x} = 0. \tag{16}$$

Dacă se explicitează derivatele în raport cu x ale funcțiilor $f_a(s_a, s_g)$ și $f_g(s_a, s_g)$, se obține sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{aligned} \frac{m\sigma}{Q}\frac{\partial s_a}{\partial t} + f'_{a,s_a}\frac{\partial s_a}{\partial x} + f'_{a,s_g}\frac{\partial s_g}{\partial x} &= 0, \\ \frac{m\sigma}{Q}\frac{\partial s_g}{\partial t} + f'_{g,s_a}\frac{\partial s_a}{\partial x} + f'_{g,s_g}\frac{\partial s_g}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

pentru funcțiile necunoscute s_a și s_g. În aceste ecuații s-a notat f'_{a,s_a} ..., derivata parțială a funcției f_a în raport cu s_a ... Spre deosebire de dezlocuirea bifazică, unde saturația satisface o singură ecuație cvaziliniară, dezlocuirea trifazică conduce la sistemul cvaziliniar (17). Acesta trebuie integrat în condițiile inițiale și la limită ale mișcării.

Condiții inițiale și la limită. La momentul inițial este cunoscută saturația în apă și gaz, așa cum arată figura 1. Se notează

$$s_a(0, x) = s_{a0}(x)\,;\; s_g(0, x) = s_{g0}(x).$$

unde $s_a(x)$ și $s_g(x)$ sînt presupuse funcții cunoscute. În figura 1 ele au fost figurate pe același plan, în care axele de coordonate s_a și s_g au semne contrare. În ceea ce privește condițiile la limită, acestea se impun numai la galeria de injecție și exprimă variația în timp a debitului de injecție. În exemplele numerice care vor fi tratate, se presupune că debitul de injecție este constant.

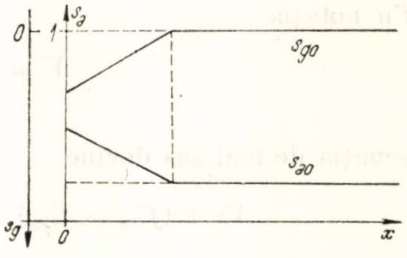


Fig. 1

În afară de aceasta, prin condițiile la limită trebuie să se dea și compoziția amestecului care se injectează în zăcămînt. În partea de aplicații a lucrării vor fi considerate două cazuri distincte. În primul caz se presupune că se injectează un amestec apă-aer care impune la fața de intrare saturații egale cu cele inițiale. În celălalt caz va fi considerat un amestec care impune la fața de intrare saturații diferite de cele inițiale.

Caracteristici. Metoda de rezolvare. Așa cum s-a arătat în introducere, se va folosi metoda caracteristicilor pentru rezolvarea problemei la limită formulată mai sus. La baza algoritmului de determinare a suprafeței integrale stau cele două teoreme fundamentale din teoria caracteristicilor :

orice suprafață integrală este generată de caracteristici și, reciproca ei, orice suprafață generată de caracteristici este integrală [4]. După cum se știe, în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi, se pot determina curbele caracteristice cu ajutorul sistemului de ecuații diferențiale ordinare ale lui Cauchy. În cazul ecuațiilor de ordin superior, și al sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, acest lucru nu mai este însă posibil; se pot determina numai proiecțiile caracteristicilor pe planul *tox*. Pe baza acestui fapt se vor determina curbele caracteristice din aproape în aproape, și prin aceasta chiar suprafața integrală, printr-un algoritm care va fi descris în cele ce urmează.

Pentru determinarea direcțiilor proiecțiilor caracteristicilor pe planul *tox* se pornește de la sistemul de mișcare (17). Direcțiile căutate trebuie să satisfacă ecuația [4], [5]. :

$$\begin{vmatrix} m\sigma \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + Q f'_{a,s_a} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} & Q f'_{a,s_g} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} \\ Q f'_{g,s_a} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} & m\sigma \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + Q f'_{g,s_g} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

unde $\omega\ (t, x)$ este familia proiecțiilor curbelor caracteristice pe planul *tox*. Se poate verifica imediat că raportul $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} \Big\backslash \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ este egal cu panta proiecției caracteristicei pe planul *tox* luată cu semnul minus.

Dacă se dezvoltă determinantul din expresia (18) se obține

$$m^2\sigma^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + m\sigma Q(f'_{a,s_g} + f'_{g,s_g}) \frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + Q^2 (f'_{a,s_a} f'_{g,s_g} - f'_{a,s_g} f'_{g,s_a}) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Cu notația

$$Y = \frac{m\sigma}{Q} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \Big\backslash \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \tag{19}$$

ecuația de mai sus devine

$$Y^2 + (f'_{a,s_a} + f'_{g,s_g})\ Y + f'_{a,s_a} f'_{g,s_g} - f'_{a,s_g} f'_{g,s_a} = 0, \tag{20}$$

ecuație de gradul al doilea în Y, cu soluțiile evidente

$$Y_{12} = \frac{1}{2} [-(f'_{a,s_a} + f'_{g,s_g}) \pm \sqrt{(f'_{a,s_a} - f'_{g,s_g})^2 + 4 f'_{a,s_g} f'_{g,s_a}}] = F^{\pm}(s_a, s_g). \tag{21}$$

În expresia de mai sus, $F^{\pm}(s_a, s_g)$ sînt cele două soluții ale ecuației (2). Se vede că pantele proiecțiilor caracteristicilor pe planul *tox* depind de saturațiile s_a și s_g.

Pe baza celor două teoreme enunțate mai sus, dacă s-ar cunoaște chiar curbele caracteristice, familia de curbe caracteristice care se sprijină pe datele inițiale ar genera suprafețele integrale, soluții ale problemei la limită concretă ce urmează a fi rezolvată. Suprafețele integrale vor fi acoperite de o dublă familie de curbe. Deoarece nu se cunosc caracteristicile în totalitatea lor, suprafețele integrale vor fi obținute aproximativ, din aproape în aproape. Ne fixăm atenția asupra suprafeței $s_a(t, x)$; pentru $s_g(t, x)$ se raționează în mod similar.

Parametrii normalei $\bar{N}$ la suprafața $s_a\ (t, x)$ vor fi

$$\bar{N}\left(\frac{\partial s_a}{\partial t}, \frac{\partial s_a}{\partial x}, -1\right),$$

iar ai tangentei $\bar{T}$ la curbele caracteristice vor fi

$$\bar{T}(v_t, v_x, v_{sa}).$$

Deoarece suprafața $s_a(t, x)$ este acoperită de o familie de curbe caracteristice, vectorii $\bar{N}$ și $\bar{T}$ vor fi ortogonali, adică

$$v_t \frac{\partial s_a}{\partial t} + v_x \frac{\partial s_a}{\partial x} - v_{sa} = 0. \tag{22}$$

Deoarece panta proiecțiilor caracteristicilor pe planul tox este egală cu raportul $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} \Big/ \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ luat cu semnul minus, rezultă că

$$v_x = \alpha\, v_t,$$

unde

$$\alpha = -\frac{Q}{m\sigma} Y. \tag{23}$$

Cu aceasta, ecuația (22) devine

$$v_t \frac{\partial s_a}{\partial t} + \alpha\, v_t \frac{\partial s_a}{\partial x} - v s_a = 0,$$

de unde rezultă

$$v s_a = v_t \frac{\partial s_a}{\partial t} + \alpha\, v_t \frac{\partial s_a}{\partial x}.$$

Componentele vectorului T vor fi așadar

$$T\left[v_t,\ \alpha v_t,\ v_t\left(\frac{\partial s_a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial s_a}{\partial x}\right)\right].$$

Pe baza teoremei fundamentale enunţată mai sus, se va scrie ecuaţia dreptelor care trec prin punctele curbei de saturaţie iniţială $s_{a0}(x)$ şi au parametrii daţi de componentele vectorului $\bar{T}$, scrise mai sus. Se obţine :

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{s_a - s_{a0}}{\frac{\partial s_a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial s_a}{\partial x}}. \tag{24}$$

Intersecţia acestor drepte cu planul $t = t_1$, unde t_1 este un moment vecin momentului iniţial, va da coordonatele punctelor din spaţiul (t, x, s_a) care determină configuraţia suprafeţei $s_a(t, x)$ la momentul t_1. Din (24) rezultă imediat

$$t = t_1 ; \; x = x_0 + \alpha t_1 ; \; s_a = s_{a0} + t_1 \left(\frac{\partial s_a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial s_a}{\partial x} \right), \tag{25}$$

adică reprezentarea parametrică a curbei de saturaţie s_a, la momentul $t = t_1$.

Expresiile acestor coordonate pot fi însă mult simplificate pe baza raţionamentelor care urmează. Din (24) rezultă

$$t = \frac{s_a - s_{a0}}{\frac{\partial s_a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial s_a}{\partial x}}.$$

Dacă se ţine seama în această relaţie de (23) se obţine

$$t = \frac{s_a - s_{a0}}{\frac{\partial s_a}{\partial t} - \frac{Q}{m\sigma} Y \frac{\partial s_a}{\partial x}}.$$

În baza lui (19), relaţia precedentă devine

$$t = \frac{s_a - s_{a0}}{\frac{\partial s_a}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial s_a}{\partial x}},$$

sau încă

$$t = \frac{s_a - s_{a0}}{\frac{ds_a}{dt}},$$

relaţie care se mai poate scrie

$$\frac{dt}{t} = \frac{ds_a}{s_a - s_{a0}}.$$

Prin integrare se obţine

$$\ln t + \ln c = \ln (s_a - s_{a0})$$

sau încă

$$ct = s_a - s_{a0}.$$

Constanta c trebuie să fie nulă, căci după timpul t_1 de la începutul injecţiei, saturaţia la mari distanţe rămîne neschimbată. Rezultă aşadar, că expresiile (25) devin în urma acestui raţionament

$$t = t_1;\ x = x_0 + \alpha t_1;\ s_a = s_{a0}. \tag{26}$$

Este de fapt ceea ce se întîmplă şi în cazul dezlocuirii bifazice, cu diferenţa că în acest caz caracteristicile sînt curbe în spaţiu, nu drepte.

Odată obţinută curba de saturaţie $s_a\,(t_1, x)$, aceasta se consideră drept curba de saturaţie iniţială, pentru care se fac raţionamente asemănătoare, pentru determinarea saturaţiei la un moment următor t_2. Procedeul se continuă în acest mod pentru orice timp, obţinîndu-se saturaţiile $s_a\,(t, x)$ într-un interval oricît de mare. Suprafaţa generată de aceste curbe este suprafaţa integrală care satisface condiţia iniţială a problemei. Pentru determinarea suprafeţei $s_g(t, x)$ se raţionează absolut asemănător şi se obţine

$$t = t_1;\ x = x_0 + \alpha t_1;\ s_g = s_{g0}. \tag{27}$$

Calculele efective ce vor fi făcute în paragraful următor, pentru diferite cazuri concrete vor preciza şi mai bine lucrurile.

Aplicaţii numerice. Se consideră că injecţia se face într-o galerie de suprafaţă $\sigma = 10.000\ m^2$ (lăţimea $l = 250$ m şi grosimea $h = 40$ m), într-un mediu de porozitate $m = 0{,}28$, cu permeabilitatea absolută $k = 456$ mD. Debitul injectat $Q = 200\ m^3/zi$ este un amestec de apă cu aer, a cărui concentraţie este cunoscută la faţa de intrare. Saturaţia în apă, impusă la faţa de intrare, se determină, făcînd uz de relaţia fracţiei de apă în curent, ţinînd seama de viscozităţile celor două fluide şi de curbele permeabilităţilor relative. Se consideră că saturaţiile ireductibile sînt $s_{a\,ired} = 0{,}2$ şi $s_{g\,ired} = 0$. Vîscozităţile pentru apă, ţiţei, aer sînt, respectiv, 0,5 cP; 2 cP; 0,01 cP. Permeabilităţile relative sînt cele din [6]

$$k_a = \frac{(s_a - s_{a\,ired})^3}{(1 - s_{a\,ired})^3};\quad k_t = \frac{s_t^3}{(1 - s_{a\,ired})^3};\quad k_g = \frac{s_g^3}{(1 - s_{a\,ired})^3}.$$

Distribuţia de saturaţii iniţiale în apă şi gaz sînt cele din figura 2, reprezentate pe aceeaşi diagramă.

Cu aceste date, mărimea $Q/m\sigma$, care intervine în (23) are valoarea

$$\frac{Q}{m\sigma} = \frac{200}{0{,}28 \cdot 10^4} = 0{,}07142857.$$

Independent de datele inițiale și la limită se pot calcula valorile Y_1 și Y_2 în funcție de saturațiile s_a și s_g. În tabelul 1 sînt trecute cîteva din valorile calculate, iar în figura 3 sînt trasate diagramele valorilor Y_1 în funcție de s_g pentru diferite valori ale lui s_a însemnate pe fiecare curbă în parte. În această diagramă se observă analogia de formă a fiecărei curbe în parte (pentru fiecare valoare a saturației s_a) cu diagrama corespunzătoare din dezlocuirea bifazică [7]. Odată cunoscute aceste diagrame, evoluția saturațiilor se determină destul de ușor, așa cum va rezulta din cele ce urmează.

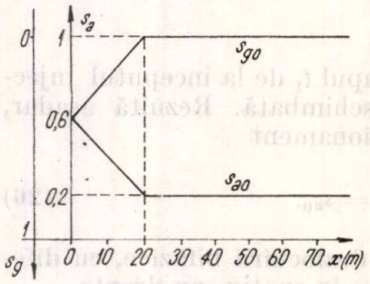


Fig. 2

a) *Dezlocuirea cu un amestec apă-aer care impune la fața de intrare saturații egale cu saturațiile inițiale.* Aceasta este cel mai simplu caz dintre cele ce se pot prezenta în dezlocuirea cu un amestec bifazic. Distribuția de saturații inițială este arătată în figura 4. În planele xos_a și xos_g, figurate pe aceeași diagramă, raportate la axe de coordonate comune, în care axele s_a și s_g au orientări diferite, au fost figurate saturațiile inițiale în apă și gaz, reprezentate, respectiv, prin curbele *BCE* și *BDF*. Verticala ce

Tabelul 1

s_a \ s_g	0,01	0,04	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,21	0,0025 0,1279	0,0027 2,2578	0,0023 8,0792	0,0007 2,0493	0,0002 0,3364	0,00009 0,0697			
0,25	0,0787 0,1499	0,0860 2,6744	0,0673 8,4341	0,0181 1,7470	0,0058 0,2725	0,0025 0,0536			
0,3	0,1823 0,4085	0,4447 3,2036	0,3225 8,6925	0,0780 1,4293	0,0245 0,2070	0,0103 0,0381			0 0,002
0,4	0,2753 2,3408	2,4820 4,3495	1,4912 8,4892	0,2830 1,0680	0,0638 0,1797	0,0120 0,0572		0 0,0148	
0,5	0,2688 4,0198	3,7761 4,4779	1,8428 8,7434	0,2250 1,5883	0,0284 0,3911	0,0027 0,1454	0 0,0685		
0,6	0,1924 2,3199	1,8814 3,2357	0,8317 8,8378	0,0846 2,6917	0,0060 0,7570	0 0,2883			
0,7	0,1156 0,7253	0,5452 1.9148	0,2233 7,2698	0,0163 3,8100	0 1,2410	0,0020 0,4882			
0,8				0 4,5539					

trece prin punctul *B* este fața de intrare în galeria de injecție. În direcția x-lor pozitivi este situat mediul poros real, în care se face dezlocuirea, iar în direcția x-lor negativi este presupus un mediu fictiv, cu aceleași

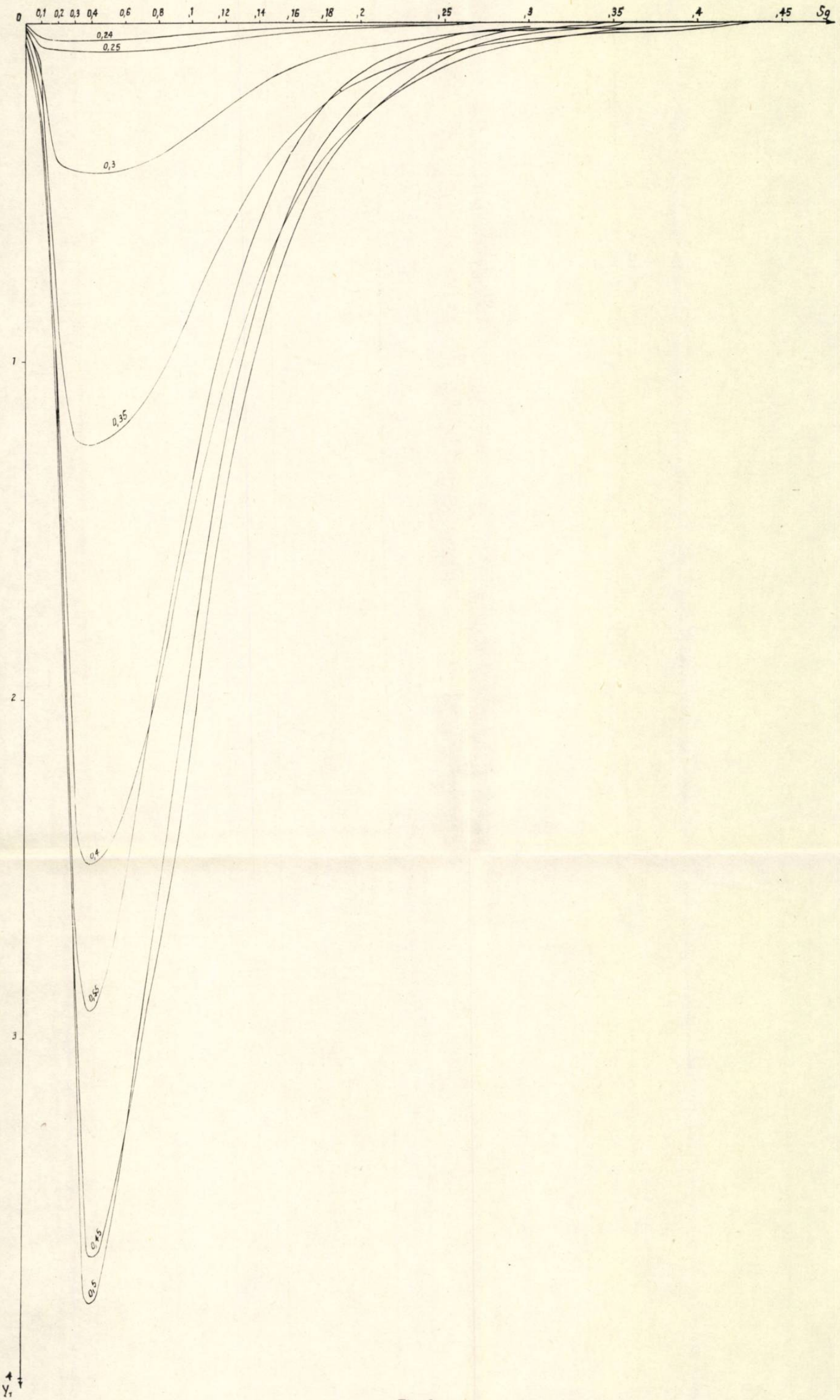
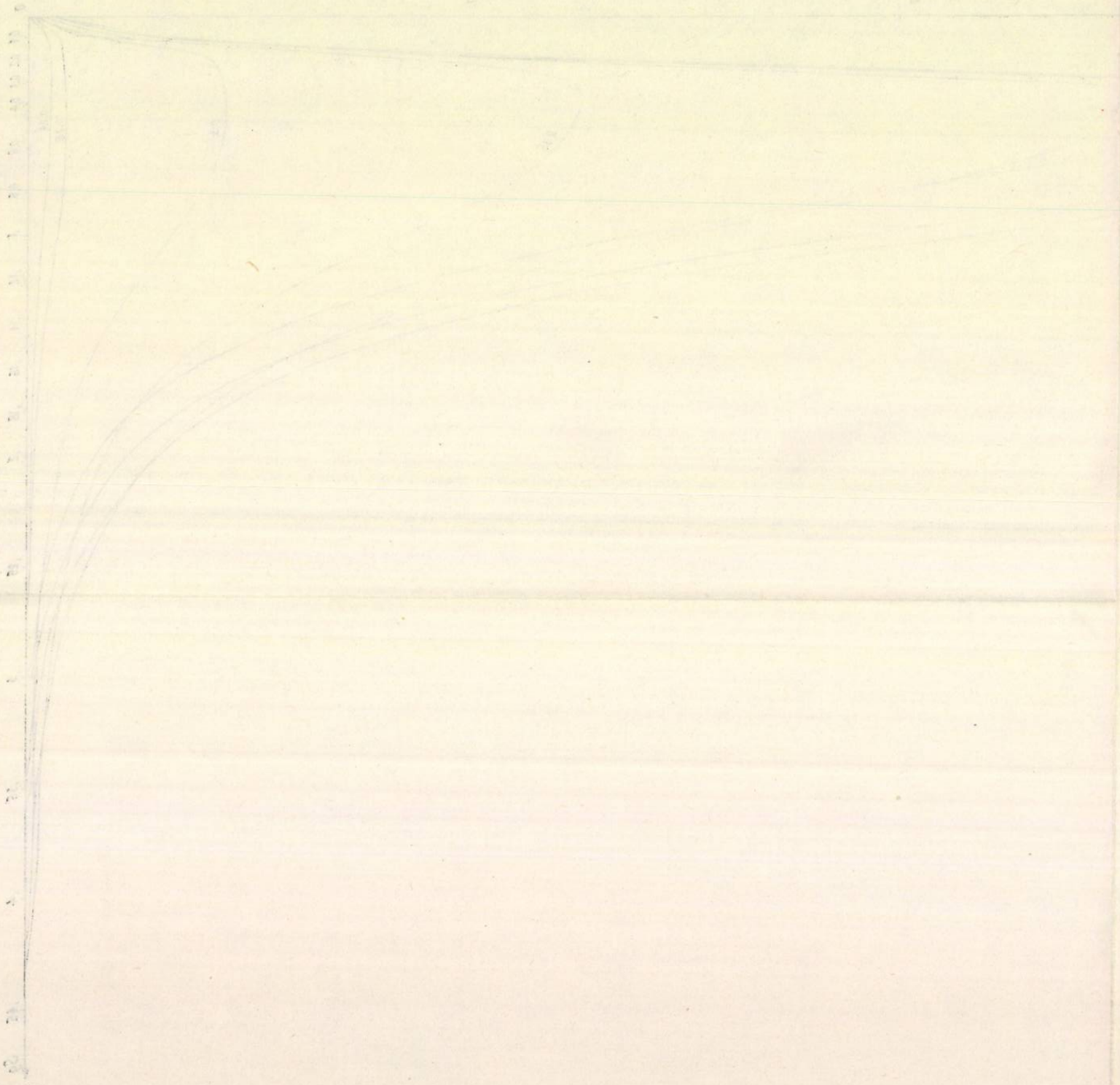

0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
,1
,12
,14
,16
,18
,2
,25
,3
,35
,4
,45
Sg
0,24
0,25
0,3
0,35
0,4
0,45
0,5
0,55
1
2
3
4
Y1

Fig. 3



caracteristici ca și cel real, în care curge un amestec bifazic care impune o saturație constantă $s_a = 0{,}6$. Ideea introducerii mediului poros fictiv care se întinde de la galeria de injecție în direcția x-lor negativi a mai fost utilizată în [1], unde este expusă necesitatea introducerii sale. În acest mod, mișcarea are loc într-un mediu poros indefinit atît în amonte, cît și în aval. Injecția se face la mari distanțe în amonte cu un amestec bifazic cu fracția de apă în curent de 0,0196, corespunzînd la o saturație constantă de 0,6 într-un mediu poros în care distribuția de saturații inițială este cea din figura 4 (în amonte de galeria de injecție este un amestec bifazic, iar în aval unul trifazic). La valoarea fracției de apă în curent de 0,0196 corespunde un debit de apă de 3,9 m³ și un debit de aer de 196,1 m³.

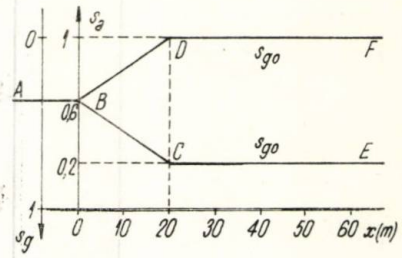


Fig. 4

Saturația inițială $s_{a0}(x)$ este reprezentată grafic de curba $ABCE$, iar în gaz $s_{g0}(x)$ de curba $ABDF$.

Aceste precizări preliminare fiind făcute, se poate determina configurația saturațiilor la momentul t_1, după formulele (26) și (27). Timpul t_1 a fost ales la 20 zile de la începerea injecției. Pentru stabilirea coordonatelor punctelor care determină configurația saturațiilor la momentul t_1, se citește pe figura 4 valorile saturațiilor s_a și s_g pentru fiecare valoare a lui x. În calculele făcute pentru acest caz, valorile lui x considerate au fost, respectiv: 0; 2,5; 5; ... 20. Din tabelul 1 sau figura 3 s-au citit valorile lui Y corespunzătoare saturațiilor găsite, care au fost înmulțite cu factorul 0,07142857 (valoarea lui $Q/m\,\sigma$) pentru a se obține mărimea α, care intervine în formulele (26) și (27). În felul acesta au fost determinate curbele de saturație s_a și s_g la 20 zile de la începerea injecției, figurate în figura 5.

Se observă că saturația în gaz variază mult mai rapid decît cea în apă, tripla valoare fiind deja conturată după acest interval de timp. Pentru înlăturarea ei se aplică procedeul de balanță materială cunoscut din dezlocuirea bifazică, obținîndu-se saltul de saturație din figura 6, la 20 zile de la începerea injecției.

Această distribuție de saturații este luată drept inițială pentru continuarea procesului. Prin calcule similare cu cele descrise mai sus s-a obținut distribuția de saturații după 30 zile (50 zile de la începerea injecției) în figura 5 și saltul de saturație în același moment, în figura 6. Calculele au fost continuate în mod similar pentru 100 și 200 zile de la începerea injecției și rezultatele se văd în figurile respective. Se observă că saltul de saturație pentru apă apare mult mai tîrziu, abia după 100 zile de la începerea injecției. În figura 7 sînt prezentate curbele de saturație în țiței la aceleași intervale de timp.

b) *Dezlocuirea cu un amestec aer-apă care impune la fața de intrare saturații diferite de cele inițiale.* S-a presupus că fracția de apă în amestecul injectat este 0,054, care impune la fața de intrare o saturație de 0,7, iar saturația inițială în apă din zăcămînt, la fața de intrare este tot 0,6.

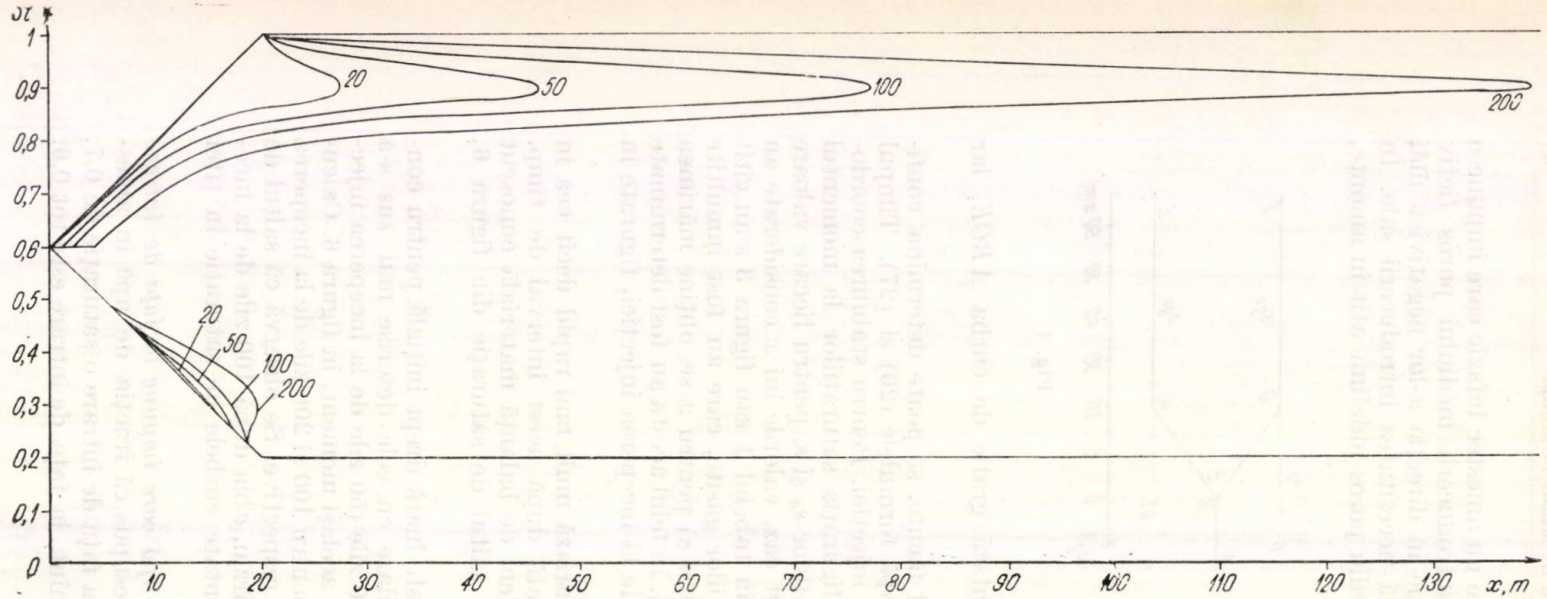
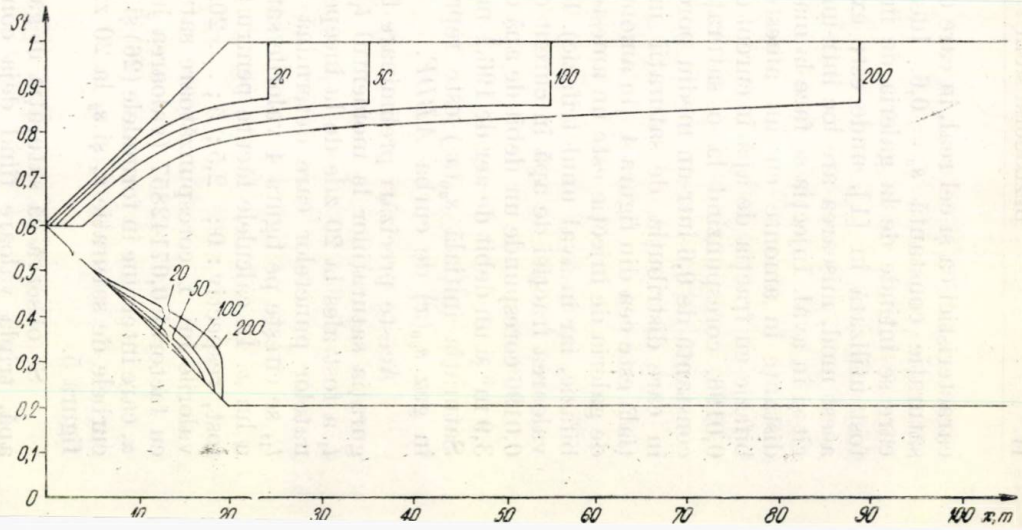

St
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
20
50
100
200
20
50
100
200
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
x, m

Fig. 5 ↑


St
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
20
50
100
200
20
50
100
200
30
40
50
60
70
80
90
100 x, m

La fracţia de apă în curent de 0,054 corespunde un debit de apă de 10,8 m^3 şi un debit de aer de 189,2 m^3. Configuraţia saturaţiilor iniţiale este arătată în figura 8. În acest caz importanţa mediului poros fictiv este mult mai bine pusă în evidenţă decît în cazul precedent. Mişcarea are loc într-un mediu poros indefinit în amonte şi în aval, unde distribuţia de

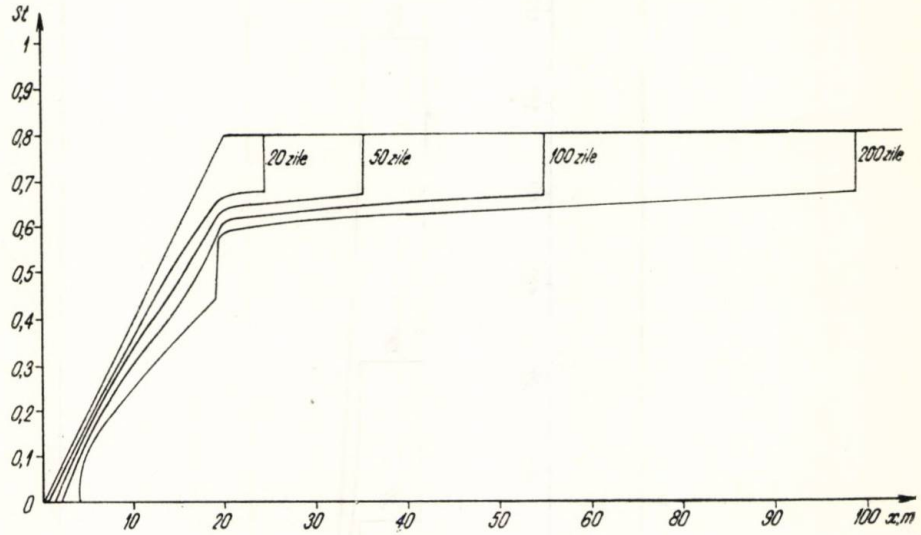


Fig. 7

saturaţii iniţiale este reprezentată prin curbele $ABCEG$ pentru $s_{g0}(x)$ şi $ABCDF$ pentru $s_{a0}(x)$. Saturaţia rămîne constantă în timpul mişcării în direcţia x-lor negativi şi variază numai distribuţia iniţială din direcţia x-lor pozitivi.

Calculele pentru determinarea variaţiei de saturaţie în timpul injecţiei se conduc ca şi în cazul precedent. Diferenţa constă în faptul că tripla valoare pentru saturaţia în gaz va apare chiar de la începutul injecţiei, datorită saltului de saturaţie de la faţa de intrare în galeria de injecţie (vezi fig. 8). Balanţa materială trebuie făcută chiar de la începutul injecţiei, oricît de mic ar fi timpul scurs de la începutul ei. După 20 de zile de la începerea injecţiei variaţia saturaţiei arată ca în figura 9, iar după aplicarea procedeului de balanţă materială ca în figura 10. Această saturaţie este socotită drept iniţială pentru continuarea calculelor, iar după 30 zile (50 zile de la începerea injecţiei) variaţia saturaţiilor este trecută în figurile 9 şi 10. După acelaşi procedeu se calculează distribuţia de saturaţii la alte momente, din aproape în aproape, oricît de depărtate ar fi de momentul iniţial. Ele au fost făcute pentru 100 zile şi 200 zile de la începerea injecţiei. În figura 11 este prezentată variaţia de saturaţie în ţiţei la 20, 50, 100 şi 200 zile de la începerea injecţiei. Cumulativele fluidelor injectate au fost determinate

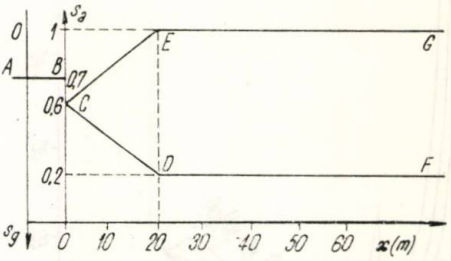


Fig. 8

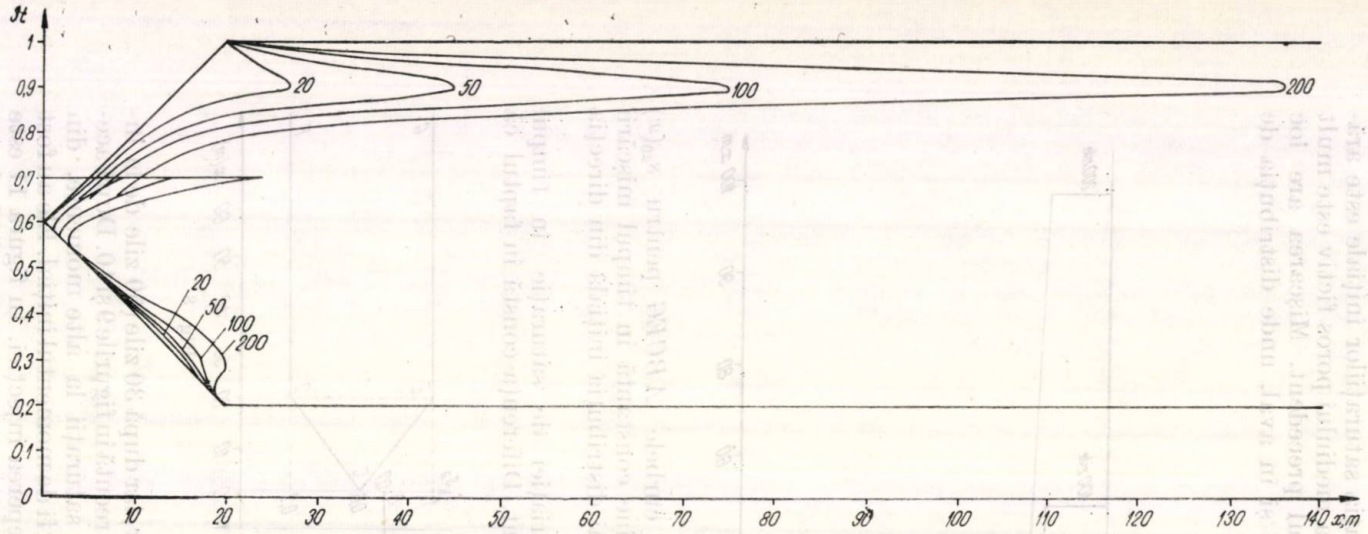
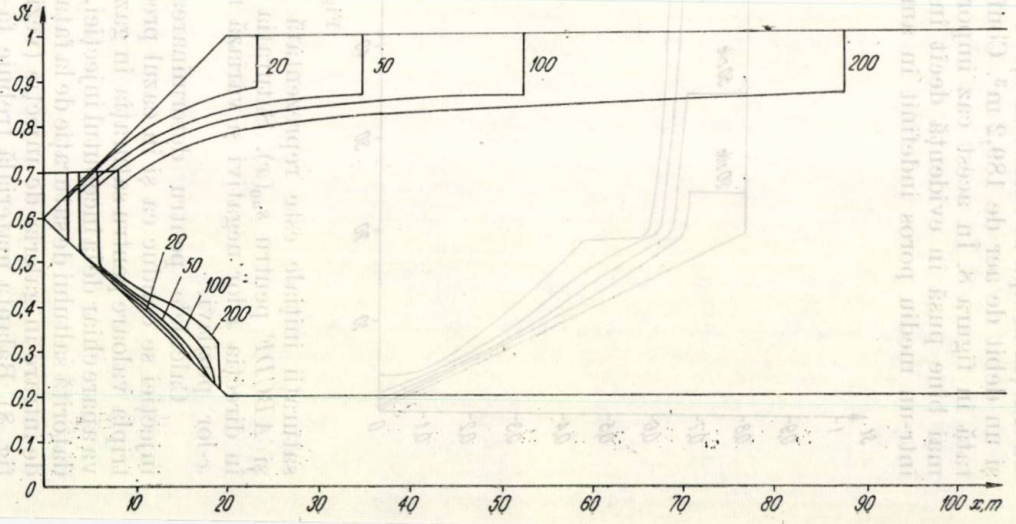

St
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
20
50
100
200
20
50
100
200
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140 x,m

Fig. 9 ↑


St
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
20
50
100
200
20
50
100
200
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 x,m

prin integrarea grafică a profilelor de saturație, fiind apoi comparate cu cele calculate exact *). Erorile relative sînt cuprinse între 3% și 10%.

Rezolvarea celor două aplicații numerice a pus în evidență faptul că la dezlocuirea țițeiului din zăcămînt prin injecția unui amestec bifazic se formează trei fronturi de dezlocuire. Primul, este frontul de dezlocuire

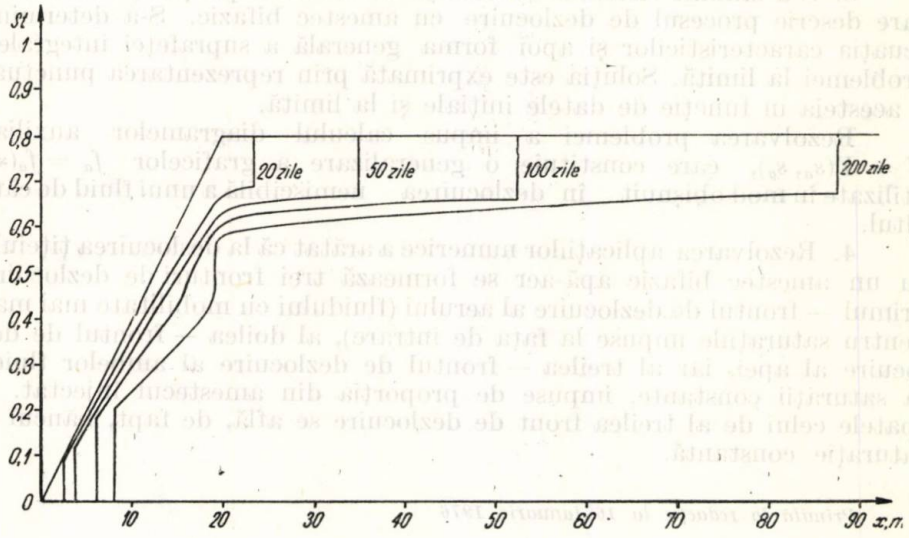


Fig. 11

al fluidului mai mobil — gazul, al doilea — frontul de dezlocuire al apei și al treilea — frontul de dezlocuire cu apă și aer, la saturații impuse de proporția din amestecul injectat (figurile 5, 6, 9 și 10), care apare imediat după începerea injecției amestecului bifazic.

Mai general, primul front este frontul de dezlocuire al fluidului cu mobilitate mai mare pentru saturațiile impuse la fața de intrare, al doilea — frontul de dezlocuire al celuilalt fluid din amestecul injectat, iar al treilea — frontul de dezlocuire al ambelor fluide, la saturații impuse de proporția din amestecul injectat.

Cele menționate arată că la injecția amestecului bifazic în mediul poros saturat cu țiței apariția prin sondele de reacție a unuia sau a celuilalt fluid din amestec depinde nu numai de viscozitățile acelor două fluide, ci și de permeabilitățile relative și de proporția fluidelor în amestecul injectat.

CONCLUZII

1. A fost elaborată o metodă de descriere a procesului de dezlocuire a trei fluide imiscibile dintr-un mediu poros și permeabil de către un amestec bifazic format din fluide identice cu două din fluidele ce saturează mediul poros, în ipoteza curgerii incompresibile, necapilare și negravitaționale.

*) Cum. apă $= f_a \cdot t \cdot Q$ și cum. aer $(1-f_a)\, t \cdot Q$.

2. Pentru rezolvare s-a aplicat teoria caracteristicilor, modificată prin înlocuirea galeriei de injecţie cu un mediu poros fictiv care se extinde indefinit în sensul negativ al axei Ox şi prin care filtrează amestecul bifazic, saturaţiile în tot acest domeniu avînd o valoare constantă, determinată de valoarea fracţiei în curent a amestecului injectat.

3. S-a stabilit sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale, cvaziliniare care descrie procesul de dezlocuire cu amestec bifazic. S-a determinat ecuaţia caracteristicilor şi apoi forma generală a suprafeţei integrale a problemei la limită. Soluţia este exprimată prin reprezentarea punctuală a acesteia în funcţie de datele iniţiale şi la limită.

Rezolvarea problemei a impus calculul diagramelor auxiliare $Y = Y(s_a, s_g)$, care constituie o generalizare a graficelor $f_a = f_a(s_a)$, utilizate în mod obişnuit în dezlocuirea nemiscibilă a unui fluid de către altul.

4. Rezolvarea aplicaţiilor numerice a arătat că la deslocuirea ţiţeiului cu un amestec bifazic apă-aer se formează trei fronturi de dezlocuire; primul — frontul de dezlocuire al aerului (fluidului cu mobilitate mai mare pentru saturaţiile impuse la faţa de intrare), al doilea — frontul de dezlocuire al apei, iar al treilea — frontul de dezlocuire al ambelor fluide, la saturaţii constante, impuse de proporţia din amestecul injectat. În spatele celui de al treilea front de dezlocuire se află, de fapt, bancul de saturaţie constantă.

Primită la redacţie la 16 ianuarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, Al. Turta, I. Tutunea, *Injecţia unui amestec bifazic într-un mediu poros saturat cu un amestec bifazic*, Petrol şi gaze, *5* (1974).
2. S.E. Buckley, M.C. Leverett, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans., AIME (1942).
3. Gh. C. Popa, *Generalizarea teoriei lui Buckley şi Leverett asupra dezlocuirii amestecului a două fluide imiscibile oarecare de către un al treilea imiscibil cu ele*, St. cerc. mec. apl., *29*, *5*(1970).
4. V.I. Smirnov, *Curs de matematici superioare*, Edit. tehnică, 1956.
5. M. Abbot, *An introduction to the method of caracteristics*, American Elsevier, New York, 1966.
6. M.R.J. Willie, *Relative permeability in petroleum production*, Handbook Frick, Vol. II, Cap. 25.
7. Th. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Ed. Acad. RSR, 1966.

O NOUĂ METODĂ DE DETERMINARE A PARAMETRILOR CURBEI DE DEPRESIUNE REALE ÎN CAZUL PUȚURILOR

de A. SUSEA, P. CHEBELEU,
Institutul de cercetări pentru industria electrotehnică București
C. ENACHE
Institutul de proiectări și cercetări miniere pentru lignit — Craiova

În lucrare este prezentată o nouă metodă de determinare a parametrilor curbei de depresiune reală bazată pe teoremele lui Kakutani-Krein și Stone-Weierstrass.
Rezolvarea sistemului transcendent rezultat este făcută prin metoda lui Fletcher-Powell, îmbunătățită prin ameliorarea convergenței.
În final se prezintă o aplicație concretă la cariera Roșia de Jiu din bazinul Rovinari.

1. INTRODUCERE

Practica asecării zăcămintelor de lignit a scos în evidență faptul că metodele clasice de determinare a parametrilor curgerii subterane nu sînt satisfăcătoare.

Îndeosebi curbele de depresiune (respectiv suprafețele de depresiune) rezultate în jurul puțurilor pompate sau a filtrelor penetrate prin perturbarea de către acestea a condițiilor naturale de curgere a apelor subterane, nu corespund curbelor de depresiune (respectiv suprafețelor) calculate prin metodele clasice ale hidraulicii subterane.

Aceasta se datorește în primul rînd denivelărilor mari create în lucrările de drenare, denivelări la care curba de depresiune determinată prin metodele clasice se îndepărtează mult de curba reală, nu numai în vecinătatea instalațiilor de drenare, dar și în cîmp.

Rezultatele cele mai importante ale cercetărilor și mai ales încercările efectuate pe modele [1] au arătat în mod hotărît că o deficiență importantă a acestor metode o constituie faptul că în domeniul limitat de filtrare, nu se iau în considerare condițiile de continuitate a curgerii apei subterane de la mantaua puțului în puț și de la exteriorul razei de acțiune a puțului în interiorul acesteia.

În ceea ce ne privește, bazați pe cercetările de laborator și de teren [2], constatăm că din punct de vedere fizic nu există nici o discontinuitate atît la marginea puțului sau drenului, cît și în cealaltă margine, de racordare a curbei de depresiune cu suprafața inițială a apei sau presiunii piezometrice.

Pornind de la această constatare am stabilit, în baza teoriei celei mai bune aproximații, un model matematic înlăturînd în acest mod deficiențele metodelor clasice.

Bazaţi pe teoremele lui Kakutani-Krein şi Stone-Weierstrass [3] am propus următoarea expresie analitică a curbei înălţimilor piezometrice.

$$\varphi(x) = \frac{A}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 - e^{-\alpha_i x}), \tag{1}$$

unde $\alpha_i > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$, sînt parametrii curbei de depresiune reale.

Pentru determinarea practică a constantelor α_1 se utilizează valorile punctuale ale funcţiei $f(x)$ obţinîndu-se sistemul nediferenţial neliniar:

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i x_k} = n \frac{A - A_k}{A}, \tag{2}$$

în care sînt cunoscute perechile (x_k, A_k) şi $A (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Pentru rezolvarea sistemului propus vom prezenta o metodică de calcul bazată pe minimizarea funcţionalelor pătratice de tipul:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x), \tag{3}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. METODICA DE CALCUL

Fie sistemul diferenţial finit în R^n

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

funcţiile $f_i(x)$ fiind funcţional independente. Prin utilizarea metodei Saard-Berger se poate determina numărul de zerouri ale unei transformări $f: R^n \to R^n$ şi, implicit, al sistemului (4) în cazul cînd funcţionalele $f_i(x)$ sînt diferenţiabile în toate variabilele.

Cum diferenţiabilitatea acestor funcţii facilitează utilizarea unei metode de tip gradient, pentru rezolvarea sistemului (4) vom utiliza metoda de coborîre a lui Hadamard, metodă ce stabileşte minimul funcţionalei (3).

Într-adevăr, minimizarea funcţionalei (3) este echivalentă cu rezolvarea sistemului:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

care scris sub formă explicită

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n, \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix} \tag{5'}$$

conduce la un sistem liniar omogen avînd drept necunoscute funcțiile $f_i(x)$.

Cum determinantul sistemului omogen este chiar jacobianul:

$$\frac{D(f_1, f_2 \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|,$$

care este nenul, deoarece funcțiile $f_i(x)$ sînt funcțional independente, în aceste condiții sistemul liniar (5′) admite numai soluția banală, ceea ce echivalează cu sistemul (4).

Pe de altă parte este cunoscut că funcționala pătratică (3) este convexă și din acest motiv în cele ce urmează vom face o investigație profundă a minimului funcționalelor convexe în spațiul Hilbert.

a. PROPRIETĂȚI DE MINIMUM ALE FUNCȚIONALELOR CONVEXE

Pentru ușurință vom nota prin f transformarea

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{6}$$

unde $(x,\ x + h) \in D$, iar $\omega(x, h)$ îndeplinește inegalitatea

$$\omega(x, h) \leqslant M \| h \|,$$

în care $M > 0$ este o constantă arbitrară.

Convexitatea funcționalei este exprimată prin inegalitatea

$$\omega(x, h) \geqslant 0.$$

Dacă $(x, h) > 0$ și $h \neq 0$, atunci funcționala este strict convexă. Notînd

$$\omega(r) = \inf_{x \in D} \quad \inf_{\| h \| = r} (x, h)$$

dacă $\omega(r) > 0$ $(r > 0)$, funcționala este uniform convexă, iar dacă $\omega(r) \geqslant mr^2$ (m = constant), funcționala este tare convexă.

Pentru funcționale pătratice, în categoria cărora intră și (3), convexitatea este evidentă datorită pozitivității lor.

Pentru toate aceste funcționale este valabilă formula lui Taylor:

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + < \nabla\Phi(x), h > + \int_0^1 \frac{\omega(x, th)}{t}\, dt,$$

rezultînd în acest mod continuitatea și diferențiabilitatea în sensul lui Frechét.

În legătură cu existența punctului de minim, observăm că în situațiile analizate, punctele de minim coincid cu cele staționare, adică sînt rădăcini ale ecuației $\nabla\Phi = 0$, iar mulțimea acestor puncte este convexă și dacă funcționala este strict convexă, atunci mulțimea nu conține mai mult de un punct, asigurîndu-se în acest mod unicitatea minimului.

Denumim $x_0 \in D$ bine localizat, dacă mulțimea Lebesgue

$$W(x_0) = \{x/\Phi(x) \leqslant \Phi(x_0)\}$$

este mărginită și nu conține puncte pe frontiera domeniului D.

Să considerăm că există punctul bine localizat x_0, atunci există și punctul de minimum x^* datorită slabei compacități a mulțimii $W(x_0)$ și a slabei inferiorsemicontinuități a funcționalei $\Phi(x)$. Convergența lui x către minimum x^* poate fi măsurată prin unul din următoarele trei moduri:

$$- \| x - x^* \|,$$

$$- \| \nabla\Phi(x) \|,$$

$$- \Delta(x) = \Phi(x) - \Phi(x^*).$$

Evaluările și erorile pentru cele trei tipuri de convergență sînt date în [4]; noi nu vom insista asupra lor, ci ne vom mărgini să enunțăm două leme importante privind aceste evaluări:

LEMA 1. *Dacă punctul $x \in D$ este bine localizat, atunci*

$\| \nabla\Phi(x) \| \leqslant 2M\Delta(x)$ ($M > 0$, *din definiția modului de convexitate*).

LEMA 2. *Dacă funcționala $\Phi(x)$ este tare convexă, atunci*

$\| \Delta\Phi(x) \|^2 \geqslant 2m\Delta(x)$ ($m > 0$, *din definiția convexității tari*).

Șirul $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ se numește minimizator dacă este valabilă egalitatea (notațiile sînt contravariante)

$$\lim_{k \to \infty} A(x^k) = 0.$$

Dacă termenii șirului minimizator sînt bine localizați, atunci

$$\lim_{k \to \infty} \nabla\Phi(x^k) = 0 \text{ în baza lemei 1.}$$

Observăm că pentru sistemul concret (2) funcționala pătratică are forma

$$\Phi = \sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i x_l} - n \frac{A - A_l}{A} \right]^2$$

și verifică condiția de strictă convexitate datorită faptului că prin derivări parțiale apar exponențiale,care nu se anulează pentru valori finite ale lui h. Cum pentru funcționalele strict convexe, unicitatea punctului staționar și deci al punctului de minimum este asigurată, rezultă că sistemul (2) admite o soluție unică.

Asigurîndu-se în acest mod unicitatea punctului de minimum, se pune problema alegerii unei metode numerice iterative de calcul al minimului care să conveargă rapid către soluție, pentru a se putea utiliza un calculator digital. Metoda aleasă a fost procesul de gradient cu relaxare ce derivă din metoda coborîrii.

b. PROCESUL DE GRADIENT CU RELAXARE

Șirul $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ de puncte din D este un proces de relaxare relativă la funcționala $\Phi(x)$, dacă

$$\Phi(x^0) \geqslant \Phi(x^1) \geqslant \ldots \geqslant \Phi(x^n) \geqslant \ldots$$

Dacă notăm prin $\Delta_k = \Delta(x^k)$, atunci

$$\Delta_0 \geqslant \Delta_1 \geqslant \Delta_2 \geqslant \ldots$$

Vom spune că procesul de relaxare converge pe funcționale dacă

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0,$$

adică $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ este un șir minimizator. Procesul de relaxare converge adică

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*.$$

Convergența șirului atrage convergența pe funcționale, iar pentru funcționale uniform convexe este adevărată și inversă.

Dacă aproximarea inițială x_0 este socotită bine localizată, atunci și celelalte puncte vor fi socotite bine localizate și convergența pe funcționale atrage

$$\lim_{k\to\infty} \nabla\Phi(x^k) = 0.$$

Fie $\{x^k\}$ un proces de relaxare de forma

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k y^k,$$

în care

$$\alpha^k = x^{k+1} - x^k, \quad \|y^k\| = 1.$$

Vectorul unitar y^k, este opus direcției pasului k.

Pentru

$$x^{k+1} \neq x^k, \quad \nabla\Phi(x^k) \neq 0,$$

de unde

$$y^k = \frac{\nabla\Phi(x^k)}{\|\nabla\Phi(x^k)\|}.$$

Dacă

$$x^{k+1} = x^k, \quad \nabla\Phi(x^k) = 0 \text{ și } y^k \text{ poate fi ales orice vector unitar.}$$

Introducem unghiul de relaxare θ_k, notînd

$$\cos\theta_k = \frac{<\nabla\Phi(x^k), y^k>}{\|\nabla\Phi(x^k)\|} \qquad 0 \leqslant \theta_k \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Dacă $\nabla\Phi(x^k) = 0$, se obține $\theta = 0$. Se observă că întotdeauna

$$<\nabla\Phi(x^k), y^k> \geqslant 0$$

în baza procesului de relaxare și a convexității funcționale.

Pentru procese de gradient, unghiul de relaxare este nul; de aceea din punct de vedere practic se consideră în calcule vectorul unitar anterior y^{k-1} $(k > 1)$, considerîndu-se $\theta_0 = 0$ și

$$\cos\theta_k = \frac{<\nabla\Phi(x^k), y^{k-1}>}{\|\nabla\Phi(x^k)\|}.$$

Ținîndu-se seama de definiția vectorului unitar și de proprietățile produsului scalar, se obține

$$\cos\theta_k = \frac{<\nabla\Phi(x^k), \nabla\Phi(x^{k-1})>}{\|\nabla\Phi(x^k)\| \; \|\nabla\Phi(x^{k-1})\|}, \qquad k > 1.$$

Dacă dorim să studiem raza de convergență este suficient să analizăm egalitatea

$$x = x^k - \alpha y^k \qquad (\alpha \geqslant 0).$$

Această rază determină o mulțime $W(x^k)$, de segment $I_k = [x^k, x^{-k}]$ și, evident,

$$\Phi(x^k) = \Phi(x^{-k}).$$

Notăm prin x^{*k} și x^{*k} punctele de minimum ale funcționalei Φ cele mai apropiate de x^k și x^{-k};

— dacă următorul pas al relaxării $x^{k+1} \in [x^{*k}, \bar{x}^{*k}]$, procesul de relaxare este complet,

— dacă $x_{k+1} \in [x^k, x^{-k}]$, relaxație inferioară,

— dacă $x_{k+1} \in [\bar{x}^{*k}, x^{-k}]$, relaxație superioară.

Metoda de coborîre este un proces de gradient cu relaxație completă, fapt care face ca prin alegerea arbitrară a unei raze de convergență, în cursul iterării, cum punctul de minim este unic, convergența să fie asigurată.

Totuși raza de convergență joacă un rol important în rapidizarea convergenței, corelarea ei cu unghiul de convergență ducînd la rapidizarea procesului iterativ [5].

Dacă drept spațiu Hilbert se consideră R^n, produsul scalar este dat de

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{u} x_i \, y_i,$$

iar norma $\| \cdot \|$ de $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Cum gradientul este exprimabil prin intermediul derivatelor parțiale de ordinul I, cosinusul unghiului θ_k se poate calcula în mod explicit sub forma

$$\cos \theta_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i^k \, G_i^{k-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (G_i^k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (G_i^{k-1})^2}},$$

unde

$$G_i^j = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \Big| j \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n, \\ j = k-1, \; k. \end{matrix}$$

c. METODA FLETCHER-POWELL ÎMBUNĂTĂȚITĂ

Rezolvarea sistemului (4) în ipoteza existenței și unicității soluției revine așadar la minimizarea funcționalei Φ.

O metodă de minimizare a funcțiilor de mai multe variabile, care se dovedește foarte eficace din punct de vedere practic este metoda Fletcher-Powell îmbunătățită, a cărei convergență este studiată și demonstrată în [5].

În procedeul de minimizare se pleacă dintr-un punct $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. În baza proprietății cunoscute a gradientului funcționala Φ are local descreșterea maximă în direcția

$$-\operatorname{grad}\Phi_{x^0} = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x_1^0}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1^0}, \ldots, -\frac{\partial\Phi}{\partial x_n^0}\right).$$

Pe această direcție se determină punctul în care funcționala își atinge minimul. Altfel spus se determină valoarea $l_{\min}$ a parametrului l care realizează minimul lui $\Phi(x - l \cdot \operatorname{grad}\Phi)$.

Deoarece funcționala descrește pe direcția $-\operatorname{grad}\Phi$ rezultă că $l_m > 0$.

Notînd cu x^1 primul punct obținut și repetînd procedeul se obține un șir de puncte cu proprietățile:

$$x^{k+1} = x^k - l \operatorname{grad}\Phi, \tag{7}$$

$$\Phi(x^k) > \Phi(x^{k+1}). \tag{8}$$

Din ipotezele făcute în baza următorului enunț:

TEOREMĂ. *Dacă este o formă pătratică pozitiv definită, atunci șirul definit de algoritmul Fletcher-Powell converge către punctul de minim unic a lui* $\Phi(x)$ [5]:

rezultă convergența șirului către soluția căutată.

Pentru mărirea vitezei cu care interațiile $x_1, x_2, \cdots, x_n$, converg către soluție, s-a folosit următorul procedeu de accelerare a vitezei de convergență [6], [7], [8]:

În punctul x^0 se alege o valoare suficient de mică pentru l astfel încît

$$\Phi(x^0 - l \operatorname{grad}\Phi(x_0)) < (\Phi(x^0).$$

Considerînd gradienții, în două puncte consecutive, grad Φ_{x^k} și grad $\Phi_{x^{k+1}}$, valorile parametrului l se modifică după cum urmează:

$$l = \begin{cases} 2\,l \text{ dacă } \theta < 25°, \\ l \text{ dacă } 25° \leqslant \theta \leqslant 80°, \\ l/2 \text{ dacă } 80° \leqslant \theta, \end{cases} \tag{9}$$

unde θ este unghiul format de cei doi gradienți.

Prin acest procedeu asigurarea rapidizării stabilită în [7] și [8] face posibilă rezolvarea sistemului concret (4) prin metoda gradientului modificată de Fletcher-Powell ș.a.

Pe baza acestei metodici și ținînd seama de modul de corectare a valorilor măsurate s-a elaborat algoritmul de calcul.

3. ALGORITMUL DE CALCUL

Algoritmul folosit în rezolvarea sistemului nediferențiat neliniar (2), realizează, după citirea și corectarea mărimilor măsurate înălțimile piezometrice la distanțe fixe), calculul iterațiilor necesare stabilite de (7) cu condițiile (8) și (9).

Determinarea gradientului se poate face prin calculul expresiilor analitice și ale derivatelor parțiale.

Algoritmul începe prin alegerea unui punct inițial x_0 bine localizat și o rază de convergență inițială x_0 astfel ca relaxația să fie completă. După cum s-a arătat în a) funcționala concretă fiind strict convexă punctul minim fiind unit, procedeul converge pentru orice rază de convergență inițială.

Trebuie precizat că pentru calculul valorii inițiale bine localizate s-au considerat aproximantele curbei înălțimilor piezometrice ce trec separat prin fiecare punct impus.

La primul pas se calculează gradientul în x^0 și după amplificarea formulei (7) se trece la x^1.

$$x^1 = x^0 - l^0 \frac{\text{grad } \Phi x^0}{||\text{grad } \Phi x^0||}. \tag{7'}$$

Punctul x^1 trebuie să satisfacă relația:

$$\Phi(x^0) > \Phi(x^1), \tag{8}$$

iar în caz contrar se înjumătățește pasul pînă cînd (5′) este satisfăcută. Trecerea de la pasul k la pasul $k+1$ se face după formula

$$x^{k+1} = x^k - l^k \frac{\text{grad } \Phi x^k}{||\text{grad } \Phi x^k||};$$

unde l^k este pasul precedent supus condiției (9), iar θ_k este unghiul făcut de grad Φx^{k-1} și grad $\Phi\ x^k$, definit în *b*.

Punctul x^{k+1} trebuie să satisfacă (8), în caz contrar pasul l^k rezultat din (9) trebuie înjumătățit (ca în primul pas) pînă cînd (8) va fi verificat. Procedeul iterativ continuă pînă cînd $|\Phi(x^k)| < \varepsilon$.

Sintetic algoritmul prezintă următoarele etape:

- citirea valorilor A, n și a perechilor (x_l, A_l), $l = 1, ,2 \cdots, n$,
- aranjarea valorilor incorect măsurate,
- calculul mărimilor inițiale,
- lungimea hiperintervalului de analizat,
- rezolvarea sistemului (2) prin metoda gradientului.

În baza acestui algoritm a fost elaborat un program de calcul în FORTRAN IV (9) varianta IBM—360/40F [10], program ce a fost rulat pentru următoarele variante:

- la 10 zile,
- la 20 zile,

— din 30 în 30 de zile, în total 41 de luni, la valorile impuse $x_1 = 5$ m, $x_2 = 20$ m, $x_3 = 150$ m, $x_4 = 200$ m, $x_5 = 250$ m, $x_6 = 400$ m, $n = 6$ și $A = 10$ m.

4. CONCLUZII

În baza celor expuse relativ la metoda de aproximare a curbei înălțimilor piezometrice, se pot conclude următoarele :

— curbele de depresiune reale, rezultate în jurul puțurilor pompate sau a filtrelor penetrante, nu corespund cu cele calculate prin metodele clasice, atît în vecinătatea instalațiilor de drenare, cît și în cîmp, din următoarele motive :

a. influența denivelărilor mari create în lucrările de drenare ;

b. formula lui Dupuit prezintă cîte o discontinuitate la extremitățile intervalului ;

— avantajul prezentei aproximări constă în faptul că, prin utilizarea diverselor tipuri de coeficienți α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se poate obține o aproximare oricît de bună (în baza teoremelor lui Kakutani-Krein și Stone-Weierstrass), aproximare ce nu posedă discontinuități la extremitățile intervalelor ;

— investigația teoretică asupra metodei gradientului cu relaxare completă a condus la alegerea unei variante de tip Fletcher-Powell, care asigură o convergență rapidă pentru sistemul analizat ;

— strict convexitatea funcționalei ce rezultă din sistemul considerat asigură unicitatea punctului staționar, și deci a punctului de minim, echivalent cu unicitatea soluției sistemului. Aceasta ușurează alegerea valorilor inițiale și a razei de convergență, fiind necesară o alegere care să țină seama de rapidizarea convergenței ;

— pentru cariera Roșia de Jiu curbele de depresiune rezultate din calcul au fost verificate prin experimentări, rezultînd că aproximarea este foarte bună așa cum rezultă din tabelul de mai jos :

Valori comparative pentru un acvifer cu înălțimea piezometrică inițială A = 10m

Timp (zile)	Observații	Distanța (x) față de dren a punctului de obs.					
		10 m	25 m	75 m	100 m	150 m	50 m
30	măsurat	9,80	10	10	10	10	10
	calculat	9,98	10	10	10	10	10
180	măsurat	6,80	8,30	8,80	8,90	9,00	10
	calculat	6,79	8,28	8,85	8,80	8,92	9,91
360	măsurat	3,80	6,50	8,00	8,40	8,50	8,60
	calculat	3,73	6,45	7,97	8,37	8,50	8,62
1 080	măsurat	1,00	2,00	3,40	4,50	5,20	6,20
	calculat	0,88	2,00	3,42	4,45	5,21	6,25

Autorii aduc mulțumiri tov. prof. T. Oroveanu pentru sugestiile domniei sale ce au fost de un real folos în definitivarea prezentei lucrări.

Primită la redacție la 11 iulie 1974 ; revăzută de autori la 21 aprilie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. K. Ûbell, *Aplicarea practică a hidraulicii teoretice a puțurilor*, Probleme noi la apele subterane în minerit. Vol. III IDT—București, 1962. Traducere din : Vodohospodarsky Casopis **7**, *II* (1959).
2. C. Enache, A. Susea, *Utilizarea calculatorului digital pentru determinarea parametrilor de asecare la carierele de lignit din Oltenia, ținînd seama de variația neuniformă a orizonturilor acvifere*, Revista minelor, *9* (1973).
3. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1965.
4. M.M. Vainberg, *Variationnîi metod i metod monotonnîh operatorov*, Izdat. Nauka, Moskova, 1972.
5. A. Schiop, *Metode aproximative în analiza neliniară*, Ed. Academiei. RSR, 1972.
6. R. Fletcher, M.J. Powell, *A rapidly convergent descendent method for minimisation*, Comput. J., *6* (1963), p. 163.
7. H.Y. Huang, *Numerical experiments on quadratically convergent algoritms for funcțion minimization*, Aero-Astronautics, Report No. 66, p. 8 Rice University Houston, Texas, 1966.
8. D.H. Jacobson, W. Oksman, *An algorithm that minimizes homogeneous, functions of N variables in N + 2 interations and rapidly minimizes general functions*, J. of Math. An. and Appl., **38** (1972) p. 535—52.
9. M. Dreyfus, *Fortran* IV, Ed. 3-a, Dunod, Paris, 1969.
10. * * * I.B.M. 360; FORTRAN IV, Language I.B.M., System Reference Library, oct. 1968.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA VITEZEI CRITICE ÎN CONDUCTELE PENTRU TRANSPORTUL HIDRAULIC AL SOLIDELOR

MIHAIL ROCO

ICEMENERG

Viteza critică de depunere a particulelor solide în conductele de hidrotransport a fost determinată pe un stand experimental format din tronsoane de conducte circulare (D_n = 80, 100, 124,5 și 152 mm), pătrate (88,5 × 88,5 mm) și dreptunghiulare (90 × 45 mm), conducte prevăzute cu o curgere elicoidală și cu posibilitatea de înclinare a conductelor. S-au experimentat trei sorturi de materiale solide: cenușă, nisip și concentrat de cupru. S-au obținut rezultate noi asupra valorilor vitezelor critice, a influenței concentrației fazei solide, a înclinării conductei, a formei secțiunii de curgere și a curgerii elicoidale în conducte.

1. GENERALITĂȚI. SCOPUL LUCRĂRII

Transportul hidraulic al materialelor solide prin conducte sub presiune este un procedeu tehnologic relativ nou, care asigură în multiplele aplicații din industria minieră, energetică, chimică ș.a. ridicarea eficienței economice, avantaje tehnice și de ordin social.

Proiectarea instalațiilor de hidrotransport se realizează pe baza parametrilor specifici curgerilor bifazate apă — particule solide. Un parametru de dimensiune principal este viteza la care începe depunerea particulelor solide în conducte, denumită viteză critică. Din publicații se cunosc rezultatele experimentale obținute de diferiți autori asupra vitezei critice în anumite condiții concrete de hidrotransport prin conducte circulare orizontale [1], [2], [3], fără a se prezenta relații generale de calcul.

Lucrarea de față are trei obiective:

— prezentarea unor rezultate experimentale noi asupra valorilor vitezei critice la hidrotransportul prin conducte circulare orizontale a trei materiale solide cu caracteristici diferite: cenușă provenită din arderea șisturilor bituminoase (cenușă S.B.), un sort de nisip (nisip A) și un concentrat de cupru (concentrat de cupru Z). Corelațiile experimentale au fost stabilite de autor pentru dimensionarea unor instalații industriale de hidrotransport;

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 1, 1977, P. 101–112

— extinderea domeniului determinărilor experimentale cunoscute în literatură și asupra curgerii în conductele circulare înclinate față de orizontală;

— punerea în evidență a influenței formei secțiunii de curgere a conductei și a curenților secundari asupra modificării vitezei critice.

2. DEFINIREA VITEZEI CRITICE

În literatura de specialitate nu există o definire unitară a vitezei critice. În general, viteza critică delimitează regimul de curgere fără depunere a particulelor solide pe partea inferioară a conductei de regimul de curgere cu depunere. Limita acestor regimuri corespunde fie : la apariția depunerii prin micșorarea vitezei, la „spălarea" depunerii prin mărirea vitezei ; cînd partea inferioară a conductei este acoperită complet cu particule solide depuse, cînd este acoperită parțial ; cînd depunerea este fixă, cînd depunerea este mobilă. În experimentările efectuate de autor s-a considerat drept viteză critică — viteza medie la care pe partea inferioară a conductei apar depuneri și spălări succesive ale particulelor solide, astfel ca suprafețele ocupate de cele două zone să fie egale. Acest criteriu, mediind pe cele din literatură, s-a putut „citi" mai exact pe standul experimental, în mod repetabil.

O altă utilizare a noțiunii de viteză critică întîlnită în literatura de specialitate se referă la viteza pentru care pierderile de sarcină liniare sînt minime și care diferă de definirea vitezei critice date mai sus.

Pe baza datelor experimentale cunoscute [1], [2], [3], [4] se remarcă următoarele tendințe pentru variația vitezei critice (v_{cr}) în funcție de principalele mărimi determinante :

$$v_{cr} \sim d^{a1} \cdot D^{a2} \cdot c^{a3} \cdot (\gamma_s - \gamma_a/\gamma_a)^{a4}, \qquad (1)$$

în care d — dimensiunea particulelor solide ;
c — concentrația fazei solide ;
D — diametrul conductei ;
γ_s, γ_a — greutatea specifică a fazei solide, respectiv a apei.
$a_1 = 0{,}5 - 1$ pentru $d < 0{,}5$ mm,
$0 - 0{,}5$ „ $d > 0{,}5$ mm,
$a_2 = 0 - 1$ (frecvent $a_2 = 0{,}5$),
$a_3 = 0 - 1$ pentru concentrații volumetrice $< 15\%$,
≈ 0 pentru concentrații volumetrice $> 15\%$,
$a_4 \approx 0{,}5$.

Aplicarea relațiilor de calcul din literatura de specialitate pentru alte condiții decît cele în care au fost stabilite conduc la abateri importante față de datele reale. Măsurătorile experimentale cu materialul care va fi hidrotransportat este metoda sigură la dimensionarea unei instalații industriale.

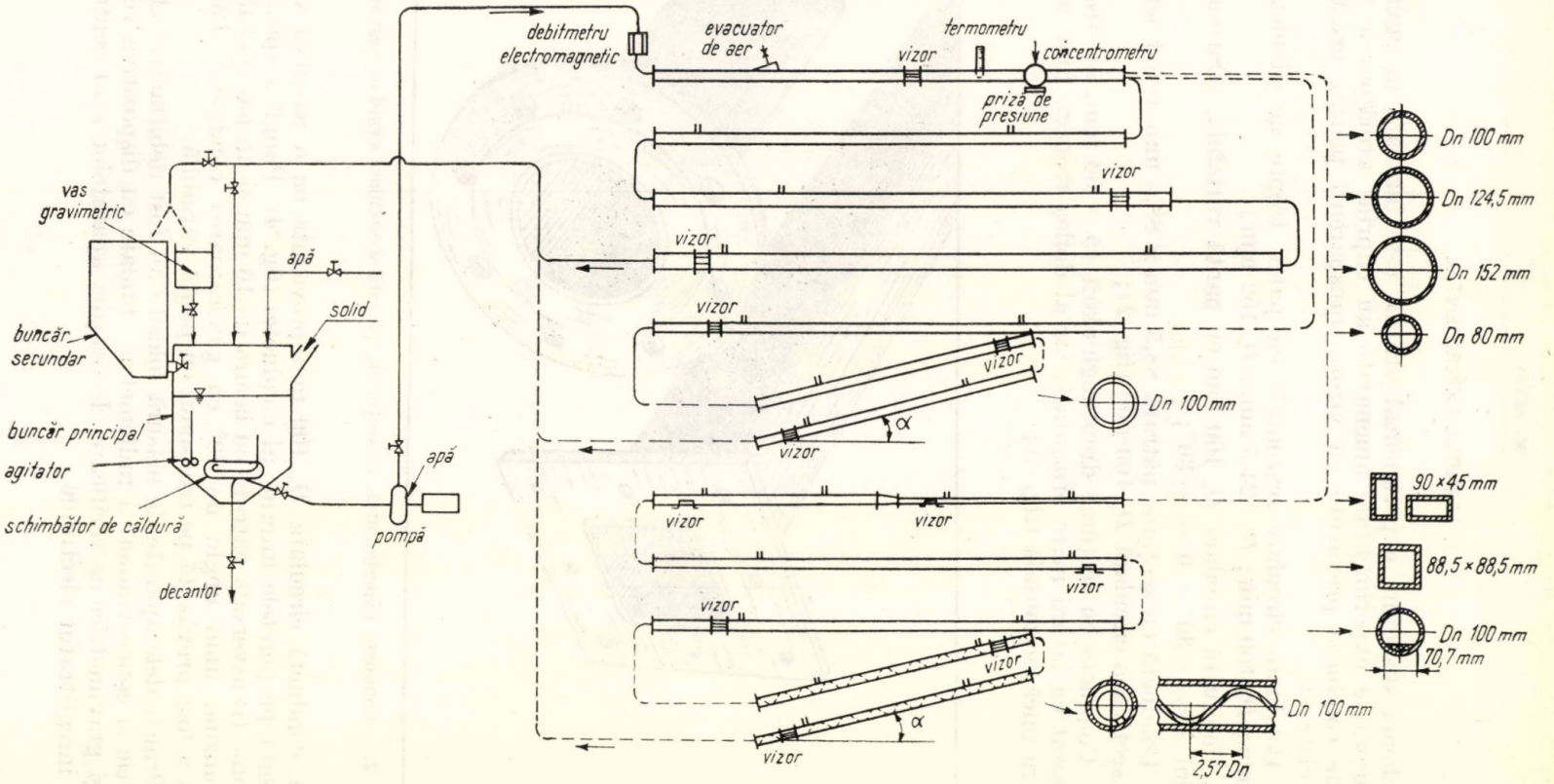


Fig. 1. — Schema circuitelor experimentale.

3. STANDUL EXPERIMENTAL

Schema standului experimental utilizat este ilustrată în figura 1.

Circuitele experimentale amenajate au cuprins următoarele tronsoane de conducte prevăzute cu vizori transparenţi pentru urmărirea vitezei critice :

a. Conducte circulare orizontale cu patru trepte de diametre — D_n 80 mm ; D_n 100 mm ; D_n 124,5 mm ; D_n 152 mm ;

b. Conductă circulară D_n 100 mm cu pantă variabilă, continuu în domeniul $\alpha = -30° - 0 - +30°$;

c. Conductă cu secţiune pătrată 88,5 mm × 88,5 mm avînd aceeaşi arie cu secţiunea circulară D_n 100 mm (fig. 2) ;

d. Conducte cu secţiune dreptunghiulară 45 × 90 mm, un tronson fiind aşezat cu latura mare orizontală, iar al doilea tronson fiind aşezat cu latura mică orizontală (fig. 3) ;

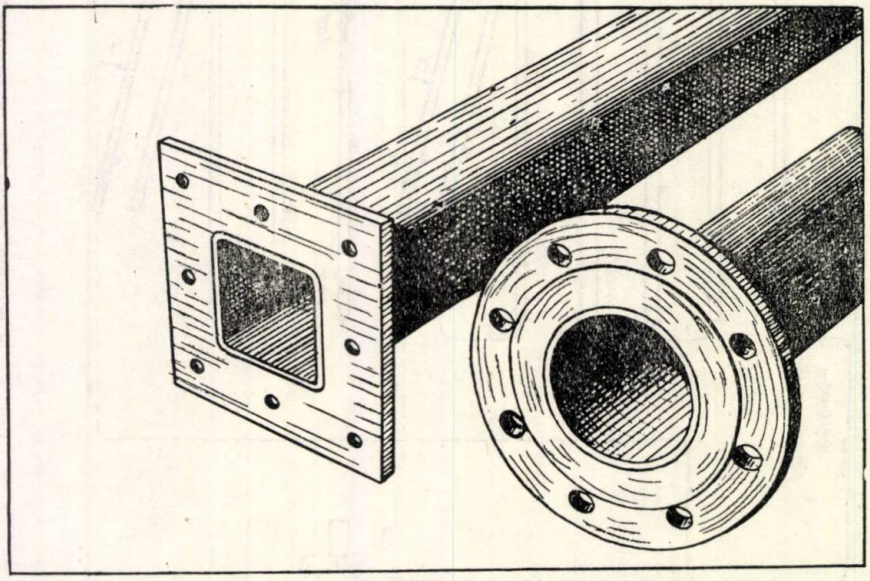


Fig. 2. — Conducte experimentale cu secţiunile pătrată şi circulară avînd aceeaşi arie.

e. conductă circulară D_n 100 mm prevăzută cu o panglică spirală amplasată pe peretele interior al conductei (fig. 4). Panglica spirală are o secţiune transversală pătrată cu latura de 10 mm şi un pas de 543 mm, corespunzînd unui unghi de 30° cu generatoarea conductei. Panglica spirală a fost prevăzută pe tronsonul cu pantă variabilă.

Principalele aparate de măsură folosite au fost debitmetrul electromagnetic şi concentrametrul radiometric, dublate cu dispozitive volumetrice şi gravimetrice de verificare. Indicaţiile aparatelor s-au centralizat la un înregistrator electronic.

Materialele solide testate au următoarele greutăți specifice și, respectiv, următoarele dimensiuni ale particulelor solide: cenușa *S.B.* — 2.3 gr/cm³ și, respectiv, 0,078 mm; nisipul *A* — 2,65 gr/cm³ și, respectiv, 0,36 mm; concentratul de cupru *Z* — 3,55 gr/cm³ și 0,07 mm.

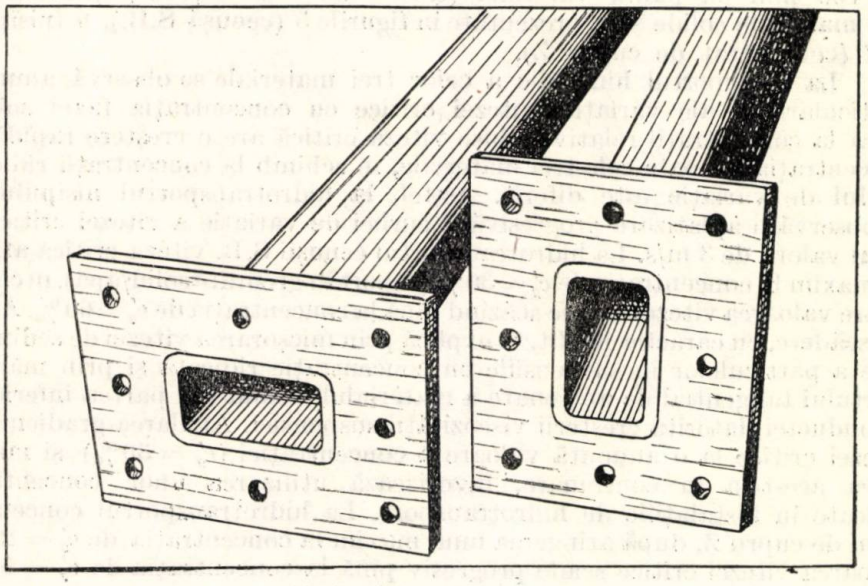


Fig. 3. — Conducte experimentale cu secțiunea dreptunghiulară.

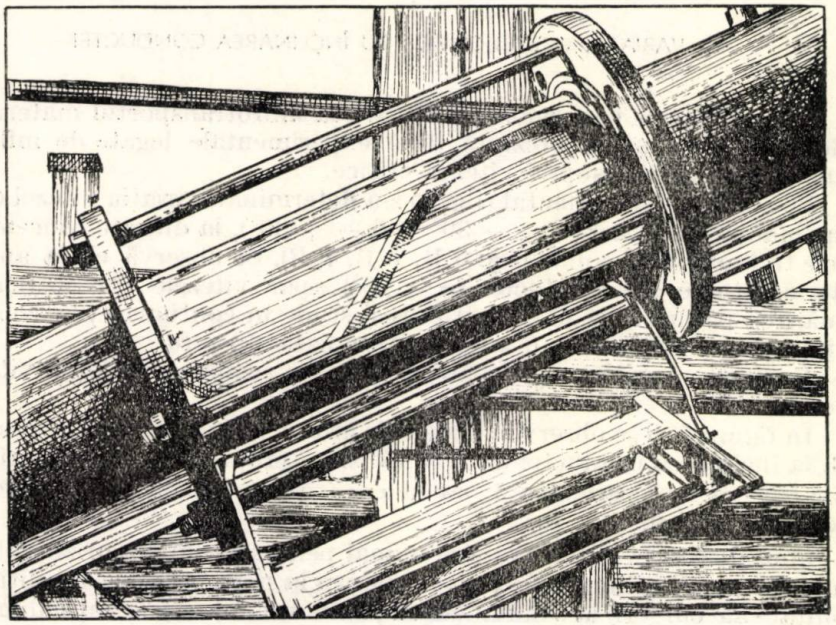


Fig. 4. Vizor de sticlă pe conducta prevăzută cu panglică spirală.

4. REZULTATELE OBȚINUTE ȘI CONSIDERAȚII

4.1. VARIAȚIA VITEZEI CRITICE CU CONCENTRAȚIA

Rezultatele experimentale ale măsurătorilor efectuate pe conducte D_n 100 mm cu pantă variabilă ($\alpha = -30 - 0 - +30°$) pentru cele trei materiale solide sînt prezentate în figurile 5 (cenușă S.B.), 6 (nisip A) și 7 (concentrat de cupru Z).

La transportul hidraulic a celor trei materiale se observă anumite particularități ale variației vitezei critice cu concentrația fazei solide. Dacă la concentrații relativ reduse viteza critică are o creștere rapidă cu concentrația la toate cele trei materiale, în schimb la concentrații ridicate modul de variație este diferit. Astfel, la hidrotransportul nisipului *A* se observă o aplatizare progresivă a curbei de variație a vitezei critice în jurul valorii de 3 m/s. La hidrotransportul cenușii S.B. viteza critică atinge un maxim la concentrația de $c'_g = 30\%$ (raport în greutate solid/apă), în continuare valoarea vitezei critice scăzînd pînă la concentrația de $c'_g = 60\%$. Această scădere, cu caracter inedit, se explică prin micșorarea vitezei de sedimentare a particulelor în suspensiile cu concentrație ridicată și prin mărirea efortului tangențial de antrenare a materialului solid din partea inferioară a conductei datorită creșterii vîscozității suspensiei. Anularea gradientului vitezei critice la o anumită valoare a concentrației ($c'_g = 30\%$) și micșorarea acesteia în continuare, favorizează utilizarea unor concentrații ridicate în instalațiile de hidrotransport. La hidrotransportul concentratului de cupru Z, după atingerea unui maxim la concentrația de $c'_g = 25\%$, valoarea vitezei critice scade progresiv pînă la concentrația de $c'_g = 50\%$, iar apoi are din nou o zonă de creștere (fig. 7 *A*).

4.2. VARIAȚIA VITEZEI CRITICE CU ÎNCLINAREA CONDUCTEI

În publicațiile cunoscute referitoare la hidrotransportul materialelor solide granulare nu se prezintă date experimentale legate de influența înclinării conductei asupra vitezei critice.

Pe standul experimental (fig. 1) s-a determinat variația vitezei critice cu înclinarea conductei ($\alpha = -30° - 0 - +30°$), la diferite concentrații, cu cele trei materiale solide (fig. 5 B, 6 B, 7 *B*). Se observă că la anumite pante urcătoare ale conductei ($\alpha < 20°$) apar vitezele critice maxime. La mărirea pantei $\alpha > 30°$ viteza critică scade în continuare, la conducta verticală ($\alpha = 90°$) avînd o valoare apropiată de zero.

În cazul pantelor coborîtoare se remarcă scăderea rapidă a vitezelor critice.

În figura 5 *B* se observă că vitezele critice la hidrotransportul cenușii S. B. la înclinarea conductei de $\alpha = 10°$ sînt apropiate de vitezele critice la înclinarea cea mai periculoasă, iar la $\alpha = -5°$ vitezele critice au o scădere importantă față de $\alpha = 0$.

Considerarea vitezelor critice numai pentru conducta orizontală, așa cum se acceptă în literatură, poate conduce la nerespectarea condițiilor de stabilitate ale curgerii la conductele cu pante urcătoare și la supradimensionarea vitezei la conductele cu pante coborîtoare.

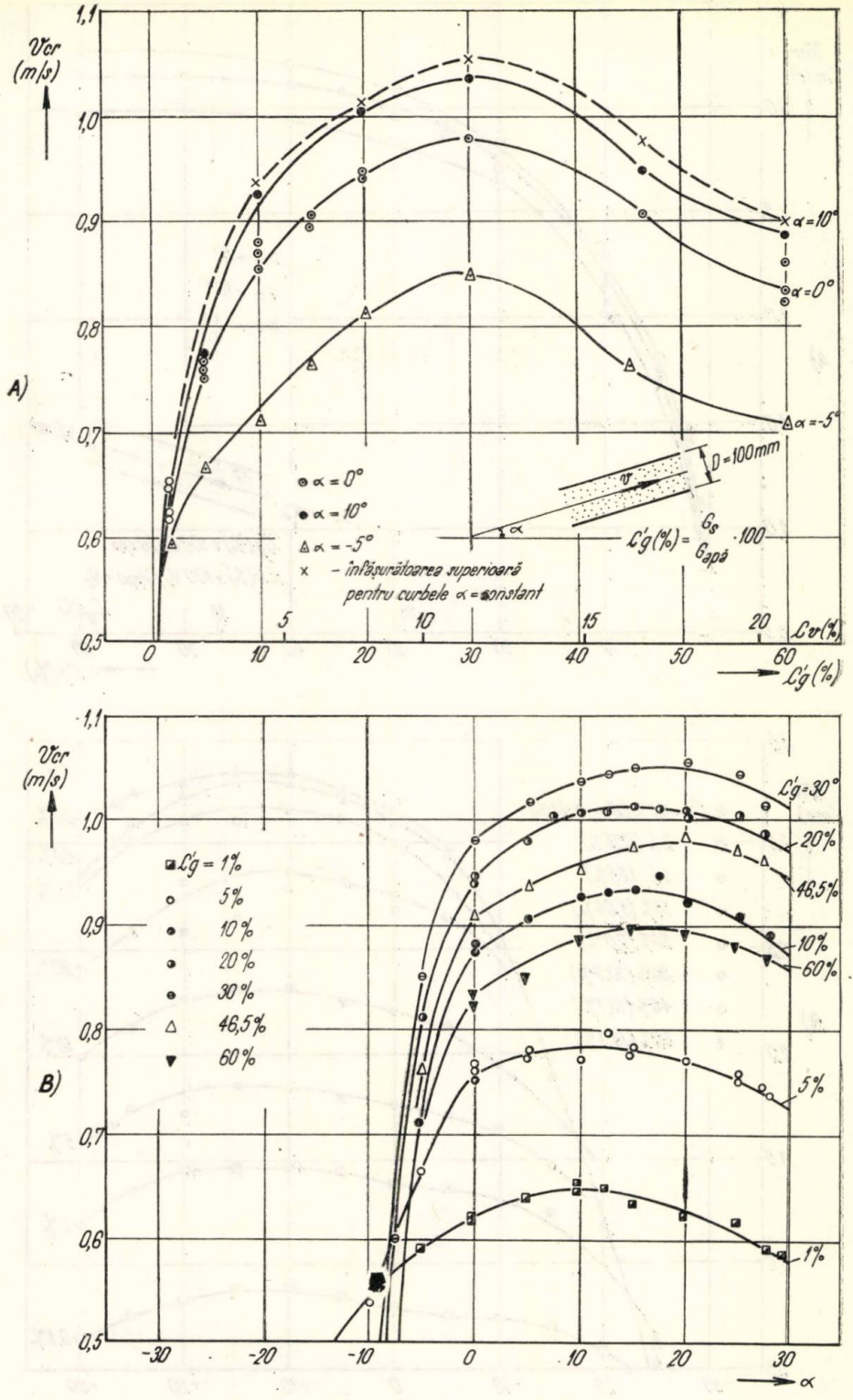


Fig. 5. — Variația vitezei critice (v_{cr}) în funcție de concentrația în conductă (*c*) și de panta geometrică a conductei (α) la hidrotransportul cenușii S.B.

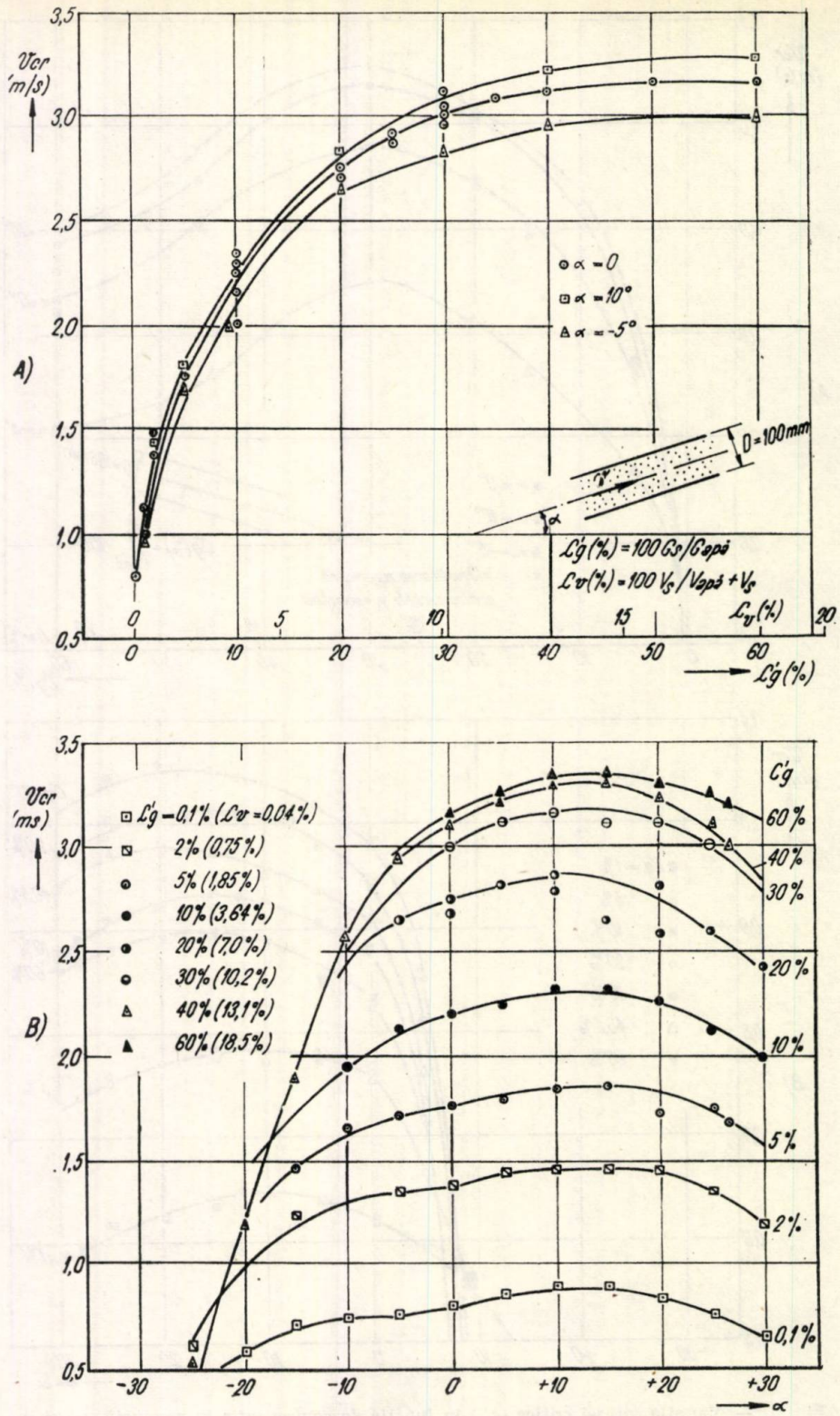


Fig. 6. — Variația vitezei critice (v_{cr}) în funcție de concentrația în conductă (c) și de panta geometrică a conductei (α) la hidrotransportul nisipului A.

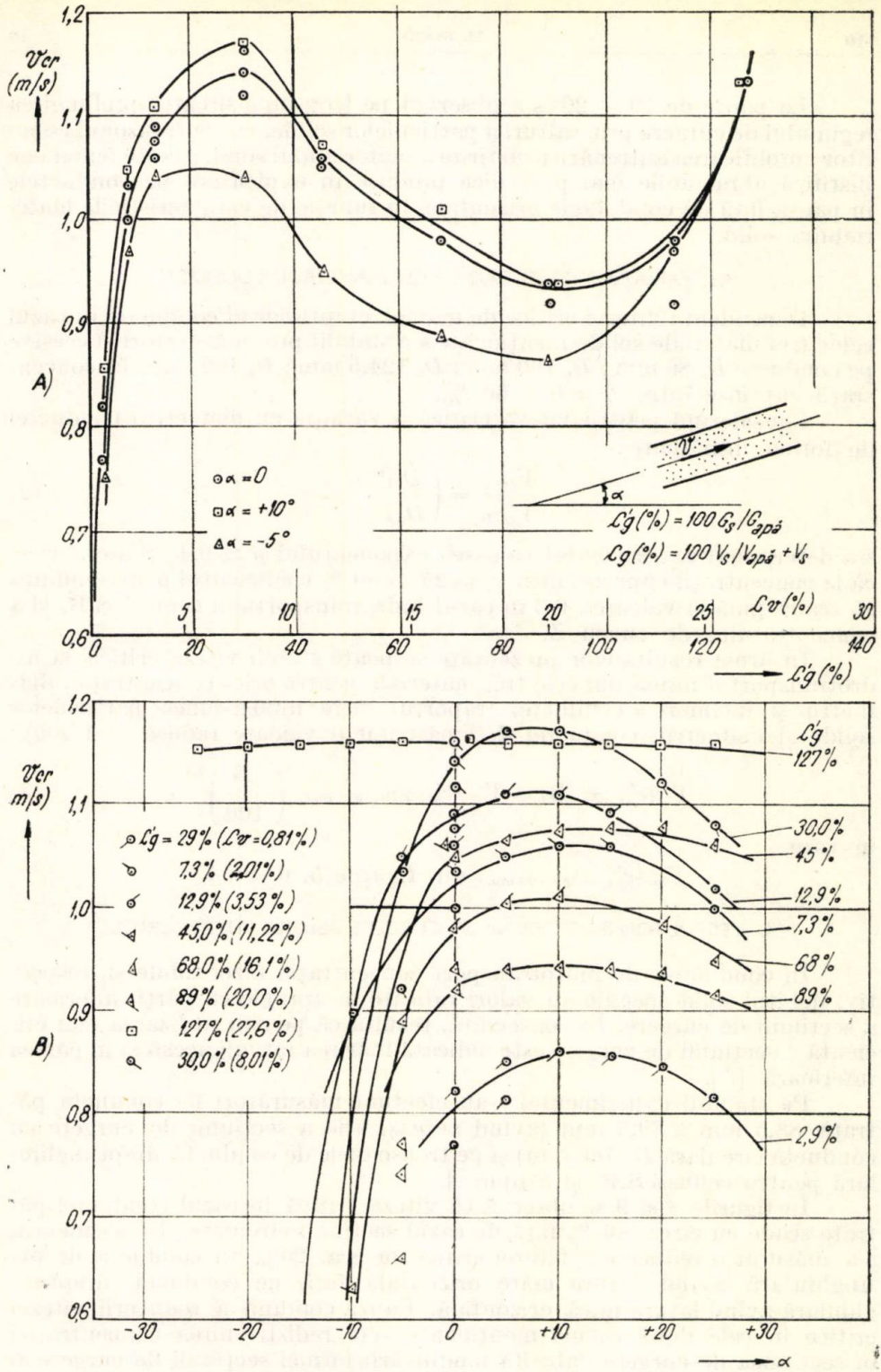


Fig. 7. — Variația vitezei critice (v_{cr}) în funcție de concentrația în conductă (c) și de panta geometrică a conductei (α) la hidrotransportul concentratului de cupru Z.

La pante de 10 — 20° s-a observat pe tronsonul urcător prelungirea regimului de curgere prin salturi a particulelor solide, iar pe tronsonul coborîtor amplificarea antrenării prin tîrîre a materialului solid. Aceste fenomene justifică abraziunile mai puternice produse în exploatare pe conductele în pantă față de conductele orizontale, în funcție de caracteristicile materialului solid.

4.3. VARIAȚIA VITEZEI CRITICE CU DIAMETRUL CONDUCTEI

Dependența vitezei critice de diametrul interior al conductei în cazul celor trei materiale solide menționate s-a stabilit prin măsurători succesive pe conducte D_n 80 mm ; D_n 100 mm ; D_n 124,5 mm ; D_n 152 mm, la concentrații cuprinse între $c'_g = 0 - 60$ %.

Considerînd pentru viteza critică o variație cu diametrul conductei de forma următoare:

$$\frac{V_{cr \cdot D}}{V_{cr \cdot D_0}} = \left(\frac{D}{D_0}\right)^p, \tag{2}$$

s-a determinat experimental valoarea exponentului $p \approx 0{,}4$. S-a observat că la concentrații cuprinse între $c'_g = 25 - 60$ % coeficientul p are tendința să scadă pînă la valoarea 0,3 în cazul hidrotransportului cenușii S.B. și a concentratului de curpu Z.

În urma rezultatelor prezentate se poate stabili viteza critică la hidrotransportul unuia din cele trei materiale pentru orice concentrație, diametru și înclinare a conductei (raportul între dimensiunea particulelor solide și diametrul conductei d/D păstrînd o valoare redusă $< 1/200$) :

$$V_{cr}(c'_g,\ \alpha,\ D) = V_{cr}\,(c'_g,\ \alpha)_{D=100\ \text{mm}} \cdot \left(\frac{D}{100}\right)^{0,4}, \tag{3}$$

în care

$V_{cr}\,(c'_g,\ \alpha)_{D=100\ \text{mm}}$, din figurile 5, 6 sau 7

4.4. EFECTUL FORMEI SECȚIUNII DE CURGERE ASUPRA VITEZEI CRITICE

În conductele de hidrotransport concentrația fazei solide și, respectiv, debitul solid specific au valori ridicate în apropierea părții inferioare a secțiunii de curgere. În consecință, rezultă că pentru utilizarea mai eficientă a secțiunii de curgere este indicată mărirea lățimii acesteia în partea inferioară [5].

Pe standul experimental s-au efectuat măsurători pe conducta pătrată 88,5 mm × 88,5 mm (avînd aceeași arie a secțiunii de curgere cu conducta circulară D_n 100 mm) și pe tronsoanele de conductă dreptunghiulară pentru cenușa S.B. și nisipul A.

În figurile 8 și 9 se observă că viteza critică în cazul conductei pătrate scade cu circa. 30 % față de cazul secțiunii circulare. De asemenea, s-a măsurat o reducere a vitezei critice cu cca. 20% în conducta dreptunghiulară avînd latura mare orizontală față de conducta dreptunghiulară avînd latura mică orizontală. Cauza comună a reducerii vitezei critice în cele două cazuri menționate este redistribuirea concentrației în secțiunea de curgere datorită modificării formei secțiunii de curgere și apariției unor curenți transversali secundari.

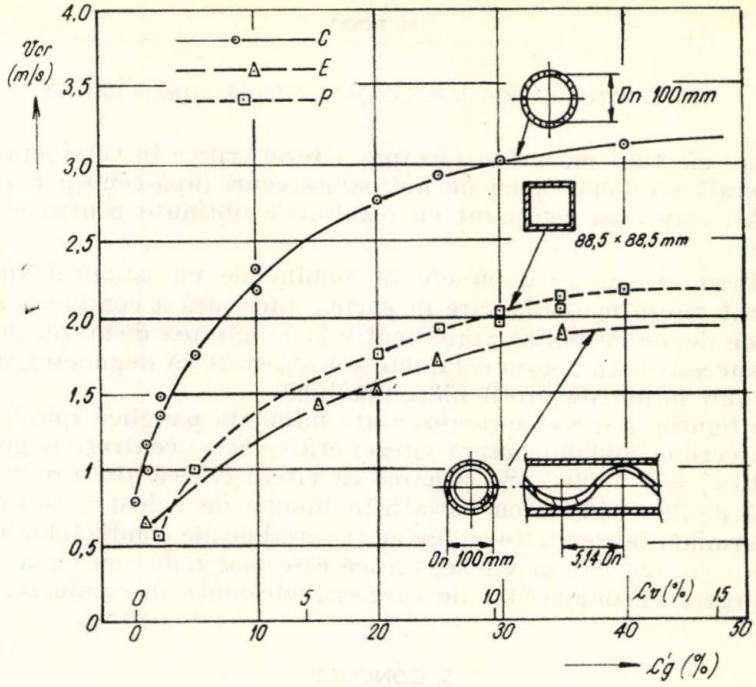


Fig. 8. — Viteza critică în conductele — circulară (C), circulară cu panglică spirală (E) și pătrată (P) la hidrotransportul nisipului A.

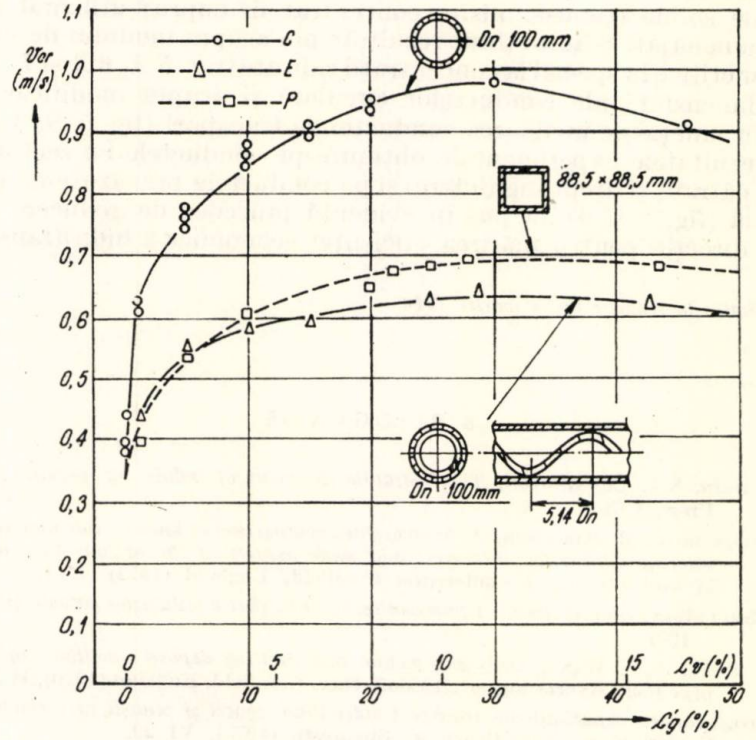


Fig. 9. — Viteza critică în conductele — circulară (C), circulară cu panglica spirală (E) și pătrată (P) la hidrotransportul cenușii $S.B.$

4.5. EFECTUL CURGERII ELICOIDALE ASUPRA VITEZEI CRITICE

S-au efectuat măsurători asupra vitezei critice în conducta cu panglică spirală cu două tipuri de hidroamestecuri (apă-cenușă S.B. și apă-nisip A), care s-au comparat cu rezultatele obținute pentru conductele „netede".

Viteza critică de depunere în conductele cu panglică spirală s-a considerat viteza medie la care în partea inferioară a conductei apare un nucleu de depunere plasat aproximativ la jumătatea distanței între două spirale succesive. În aceste conducte s-a observat că depunerea începe pe o zonă sub formă de profil hidrodinamic.

În figurile 7 și 8 este reprezentată influența panglicii spirale (respectiv a curgerii elicoidale) asupra vitezei critice la concentrații în greutate în domeniul $c'_g = 0 - 50$ % Se remarcă că viteza critică are o reducere procentuală de 30 — 40 %, cu variații în funcție de valoarea concentrației. Din determinările efectuate cu înclinări variabile ale conductelor a rezultat că efectul pantei asupra vitezei critice este mai redus cu circa 50 % în cazul curgerii elicoidale față de curgerea obișnuită în conducte.

5. CONCLUZII

În vederea dimensionării unor instalații industriale de hidrotransport s-au efectuat determinări experimentale asupra vitezei critice pentru trei materiale solide (cenușă, nisip, concentrat de cupru) utilizînd un stand special amenajat. S-au obținut rezultate noi asupra modului de variație al vitezelor critice în special la concentrații ridicate (fig. 5 *A*, 6 *A* și 7 *A*) pentru patru dimensiuni ale conductelor circulare și asupra modificării vitezei critice în funcție de înclinarea conductei de transport (fig. 5 *B*, 6 *B* și 7 *B*).

Rezultatele experimentale obținute pe conductele cu secțiuni necirculare (pătrate și dreptunghiulare) și pe conductele prevăzute cu o curgere elicoidală (fig. 8 și 9) au pus în evidență procedee de reducere a vitezei critice, direcție pentru mărirea eficienței economice a hidrotransportului.

Primită la redacție la 4 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. Bain, S.T. Bonnington, *The hydraulic transport of solids by pipeline*, Pergamon Press, 1970.
2. W. Wiedenroth, M. Kirchner, *A summary and comparison of knowns calculations of critical velocity solid-water mixtures and some aspecte of the optimisation of pipelines*, Hydrotransport 2 Conference, Cranfield, England (1972), E 1.
3. A. E. Smoldîrev, *Ghidravliceskii i pnevmaticeskii transport v metalurgii gornom gele*, Moscova, 1967.
4. H. W. Shen, J. S. Wang, *Incipient motion and limiting deposit conditions of solid-liquid pipe flow*, Hydrotransport 1 Conference, Cranfield, England (1970), H 3.
5. M. Roco, *Mărirea capacității de transport hidraulic a zgurei și cenușii prin conducte*, Prima Conferință a Energeticienilor, București, (1975), VI 29.

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTORUL ÎN V CU CILINDRI INTERCALAȚI

de GEORGE BĂRĂNESCU
CONSTANTIN SILVESTRU
Institutul politehnic București

În lucrare se tratează echilibrajul momentelor forțelor de inerție la motorul în V cu cilindri intercalați, cu aprinderi uniform repartizate pentru ansamblul motorului, echipat cu mecanisme bielă-manivelă normale și dezaxate, cu cilindrii alternînd între cele două linii. Se analizează echilibrajul momentelor externe ale termenilor care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri și echilibrajul momentelor externe care subzistă în fiecare linie de cilindri. Se stabilesc condițiile de echilibrare a acestor momente și posibilitățile de echilibrare cu mase atașate arborelui cotit. Se determină de asemenea condițiile de echilibrare a momentului extern rezultant al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație. Se constată că în comparație cu motorul în V normal la motorul în V cu cilindri intercalați există posibilități mai mari de adaptare a gabaritului la cerințele exploatării și de influențare a echilibrajului momentelor forțelor de inerție prin alegerea corespunzătoare a unghiului dintre liniile de cilindri.

1. INTRODUCERE

La motorul în V cu cilindri intercalați echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție prezintă anumite particularități față de echilibrajul acestor momente la motorul în V normal. Datorită faptului că arborele cotit are cîte un cot pentru fiecare cilindru, se poate considera că fiecare linie de cilindri are arborele cotit propriu, împrejurare care permite îndeplinirea cerinței repartiției uniforme a aprinderilor la orice valoare a unghiului dintre liniile de cilindri [1]; acest unghi constituie deci un parametru prin care se poate influența echilibrajul motorului. În schimb, decalarea liniilor de cilindri, cerută de dispoziția cilindrilor face să apară momente externe în plus față de cele existente la motorul în V normal.

În lucrare se analizează momentele externe care intervin la motorul în V cu cilindri intercalați, precum și posibilitățile de echilibrare prin adoptarea unor soluții constructive corespunzătoare. Se cercetează mai întîi echilibrarea momentelor externe ale termenilor[1]) care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri și apoi echilibrarea momentelor externe pentru întregul motor produse de momentele externe care subzistă în fiecare linie

[1]) Noțiunea de termen este precizată în lucrarea [3].

de cilindri. Se presupune că cilindrii consecutivi alternează între cele două linii de cilindri, dispoziție care conduce la lungimea minimă a motorului. S-a considerat cazul general al motoarelor echipate cu mecanisme bielă-manivelă normale și dezaxate. Viteza unghiulară de rotație a arborelui cotit este presupusă variabilă, iar aprinderile sînt considerate uniform repartizate în perioada funcțională a motorului. Sînt folosite concluziile din lucrarea [1] referitoare la echilibrajul forțelor de inerție pentru motoarele în V cu cilindri intercalați, precum și cele din lucrările [2], [3] și [4], în care se tratează probleme ale echilibrajului motoarelor în linie.

2. ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE TERMENILOR CARE AU O REZULTANTĂ ÎN FIECARE LINIE DE CILINDRI

Termenii care au rezultantă în fiecare linie de cilindri pot produce momente externe pentru ansamblul celor două linii de cilindri; se convine să se calculeze aceste momente față de mijlocul arborelui cotit.

Determinarea momentului extern al unui termen care are o rezultantă în fiecare linie de cilindri revine la determinarea momentelor externe produse în planele bisectoare ale unghiului dintre liniile de cilindri de către componentele respective ale forțelor rezultante din cele două linii de cilindri. Fiecare din aceste componente este perpendiculară pe axa de rotație a manivelelor, distanța dintre componentele din același plan bisector fiind egală cu distanța Δ cu care liniile de cilindri sînt decalate longitudinal între ele.

Potrivit celor arătate în lucrarea [1], dacă se folosesc arbori cotiți care asigură cel mai bun echilibraj al forțelor de inerție în fiecare linie de cilindri, componentele produse de rezultantele din fiecare linie ale termenilor de același ordin ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație au totdeauna rezultanta nulă într-unul din planele bisectoare ale unghiului dintre liniile de cilindri. În planul bisector în care se realizează această situație, cele două componente trebuie să fie egale și în opoziție, deoarece numai în aceste condiții rezultanta a două forțe este nulă; componentele vor produce un moment a cărui mărime este proporțională cu distanța Δ. În celălalt plan bisector componentele acelorași termeni sînt evident egale și în fază, deci rezultanta acestor componente va fi situată la mijlocul arborelui cotit, întrucît arborii cotiți parțiali sînt identici sau simetrici în oglindă și au distanțe egale între manivelele consecutive, fiecare componentă fiind aplicată la mijlocul arborelui cotit respectiv; prin urmare momentul rezultantei va fi nul.

Pentru linia de cilindri aflată la stînga unui observator situat la extremitatea motorului din care vede manivelele rotindu-se în sensul pozitiv ales, și care privește în lungul axei de rotație a arborelui cotit printre cele două linii de cilindri, rezultanta termenilor de ordinul p are expresia [1]

$$\mathfrak{F}_{p_s} = \frac{i}{2} T_p \cos(p\alpha + \varphi_p),$$

relație în care i este numărul total de cilindri ai motorului, T_p — mărimea vectorului care interpretează termenul de ordinul p al forței de inerție a maselor cu mișcare de translație ale unui cilindru, α — unghiul descris de

manivela cilindrului liniei din stînga de lîngă observator, iar φ_p — unghiul care precizează poziția vectorului T_p al acestui cilindru, în momentul $\alpha=0$.

Deoarece — conform celor arătate mai sus — componentele în oricare din planele bisectoare ale unghiului dintre liniile de cilindri, produse de rezultantele din fiecare linie ale termenilor de același ordin ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație sînt egale, calculul oricărei componente poate fi efectuat plecînd de la expresia rezultantei respective dintr-una din liniile de cilindri, de pildă rezultanta din linia de cilindri din stînga. Folosind relația precedentă și notînd cu γ unghiul dintre liniile de cilindri, mărimea componentei termenilor de ordinul p ai unei linii este în planul bisector interior $\frac{i}{2} T_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos(p\alpha + \varphi_p)$, iar în planul bisector exterior $\frac{i}{2} T_p \sin\frac{\gamma}{2} \cos(p\alpha+\varphi_p)$. În consecință, termenii care au o rezultantă în planul bisector interior produc în planul bisector exterior momentul variabil

$$\mathfrak{M}_{p_y} = \Delta \frac{i}{2} T_p \sin\frac{\gamma}{2} \cos(p\alpha + \varphi_p), \tag{1}$$

iar termenii care au o rezultantă în planul bisector exterior produc în planul bisector interior momentul variabil

$$\mathfrak{M}_{p_x} = \Delta \frac{i}{2} T_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos(p\alpha + \varphi_p). \tag{2}$$

Cînd se consideră variația vitezei unghiulare a arborelui cotit, factorul T_p este variabil și, în consecință, amplitudinea fiecărui moment corespunde valorii maxime a produsului $T_p \cos(p\alpha + \varphi_p)$. Dacă se neglijează variația vitezei unghiulare a arborelui cotit, T_p este constant și deci valorile maxime ale momentelor $\mathfrak{M}_{p_y}$ și $\mathfrak{M}_{p_x}$ se obțin înlocuind $\cos(p\alpha + \varphi_p) = 1$ în (1) și (2).

Fiindcă, prin ipoteză, $\Delta \neq 0$, singura posibilitate de echilibrare a momentelor $\mathfrak{M}_{p_y}$ și $\mathfrak{M}_{p_x}$ (în afară de echilibrarea cu ajutorul unor dispozitive mecanice) constă în alegerea corespunzătoare a unghiului γ. Astfel, $\mathfrak{M}_{p_y} = 0$ cînd $\gamma = 0$, ceea ce înseamnă că motorul se transformă într-unul cu cilindri în linie. Condiția $\mathfrak{M}_{p_x} = 0$ poate fi satisfăcută pentru $\gamma = \pi$, deci la motorul cu cilindri intercalați și opuși; în acest caz amplitudinea momentului $\mathfrak{M}_{p_y}$ este maximă.

3. ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE CARE SUBZISTĂ ÎN FIECARE LINIE DE CILINDRI

3.1. DIFERENȚA DE FAZĂ ÎNTRE MOMENTELE EXTERNE DE ACELAȘI ORDIN DIN CELE DOUĂ LINII DE CILINDRI

Fiindcă arborii cotiți sînt identici sau simetrici în oglindă, în fiecare din cele două linii de cilindri vor subzista momentele externe ale acelorași termeni, mărimea momentelor fiind aceeași.

Pentru cercetarea posibilităților de echilibrare la ansamblul celor două linii de cilindri a momentelor externe care subzistă în fiecare linie

este necesar să se cunoască diferența de fază între momentele de același ordin din cele două linii de cilindri, pentru o poziție relativă cunoscută a arborilor cotiți. În vederea precizării acestei poziții relative, manivelele fiecărui arbore cotit sînt numerotate consecutiv, de la o extremitate la alta a arborelui cotit, începînd de la extremitatea la care se află observatorul precizat mai înainte.

1. Se consideră mai întîi cazul arborilor cotiți identici și se caută diferența de fază dintre momentul extern $\mathfrak{M}^*_{p_s}$ produs în linia din stînga de către termenii de ordinul p și momentul extern produs în linia din dreapta de către termenii de același ordin, dacă $\gamma = 0$ și manivelele cu numărul de ordine 1 ar fi în fază ($\alpha_{1_s} = \alpha_{1_d}$).

Potrivit interpretării vectoriale a momentului unui termen al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație la motorul în linie, vectorii $\mathfrak{M}^*_{p_s}$ și $\mathfrak{M}^*_{p_d}$ sînt proiecția pe normala la planul determinat de axele cilindrilor a vectorilor învîrtitori M_{p_s} și M_{p_d}, care reprezintă momentele vectorilor T_p din cele două linii de cilindri. Deoarece arborii cotiți sînt identici, dacă manivelele cu numărul de ordine 1 sînt în fază, toate manivelele care poartă același număr de ordine vor fi în fază. În aceste condiții vectorii forță T_p, corespunzători cilindrilor cu același număr de ordine, sînt în fază, vectorii moment $M^*_{p_s}$ și $M^*_{p_d}$ vor fi permanent în fază și deci vectorii moment $\mathfrak{M}^*_{p_s}$ și $\mathfrak{M}^*_{p_d}$ vor fi de asemenea în fază.

2. Se presupune că cei doi arbori cotiți sînt simetrici în oglindă și se caută diferența de fază a momentelor externe $\mathfrak{M}^*_{p_s}$ și $\mathfrak{M}^*_{p_d}$ tot în cazul $\gamma = 0$ și $\alpha_{1_s} = \alpha_{1_d}$.

Se consideră vectorii T_p aferenți arborelui cotit al liniei de cilindri din stînga, în momentul de timp $\alpha_{1_s} = 0$. Vectorul $T_{p_{1_s}}$, pentru cilindrul corespunzător manivelei 1, face cu direcția Ox, în sensul lui de rotație, unghiul φ_p (fig. 1 *a*); în momentul de timp considerat el are direcția $O\varphi$. Pentru cilindrul q, a cărui manivelă face unghiul α_q cu manivela 1, vectorul $T_{p_{q_s}}$ va face cu direcția Ox, în sensul lui de rotație, unghiul $p\alpha_q + \varphi_p$, deci cu direcția $O\varphi$ unghiul $p\alpha_q$. Notînd cu d_q distanța algebrică de la mijlocul arborelui cotit, respectiv la manivela q, componentele $M_{p_{s_\eta}}$ și $M_{p_{s_\varphi}}$ pe direcțiile rectangulare $O\eta$ și $O\varphi$ ale vectorului care reprezintă momentul vectorilor T_p din linia din stînga sînt:

$$M_{p_{s_\eta}} = T_p\left(d_1 + \sum_{\nu=2}^{\nu=\frac{i}{2}} d_\nu \cos p\alpha_\nu\right), \tag{3}$$

$$M_{p_{s_\varphi}} = T_p \sum_{\nu=2}^{\nu=\frac{i}{2}} d_\nu \sin p\alpha_\nu. \tag{4}$$

Vectorul rezultant

$$M_{p_s} = \sqrt{M^2_{p_{s_\eta}} + M^2_{p_{s_\varphi}}}$$

face cu vectorul M_{p_s}, în sensul lui de rotație, unghiul definit de relația

$$\operatorname{tg}\beta_{p_s} = \frac{M_{p_{s_\eta}}}{M_{p_{s_\varphi}}}.$$

Unghiul β_{p_s} este cuprins în intervalul $-90^\circ < \beta_{p_s} < 90^\circ$, sau în intervalul $90^\circ < \beta_{p_s} < 270^\circ$, după cum momentul M_{p_s} este pozitiv sau negativ.

Deoarece direcţiile $O\varphi$ şi $O\eta$ se rotesc cu viteza unghiulară ω_p^* [3] cu care se rotesc atît vectorii T_p cît şi vectorul M_{p_s} unghiul β_{p_s} este o constantă (fig. 1 *b*); acest rezultat se poate obţine şi înlocuind în relaţia precedentă expresiile (3) şi (4) şi ţinînd seama că vectorii T_p se rotesc în plane determinate, cu aceeaşi viteză unghiulară, ceea ce înseamnă că distanţele d_ν şi unghiurile α_ν sînt invariabile în timp.

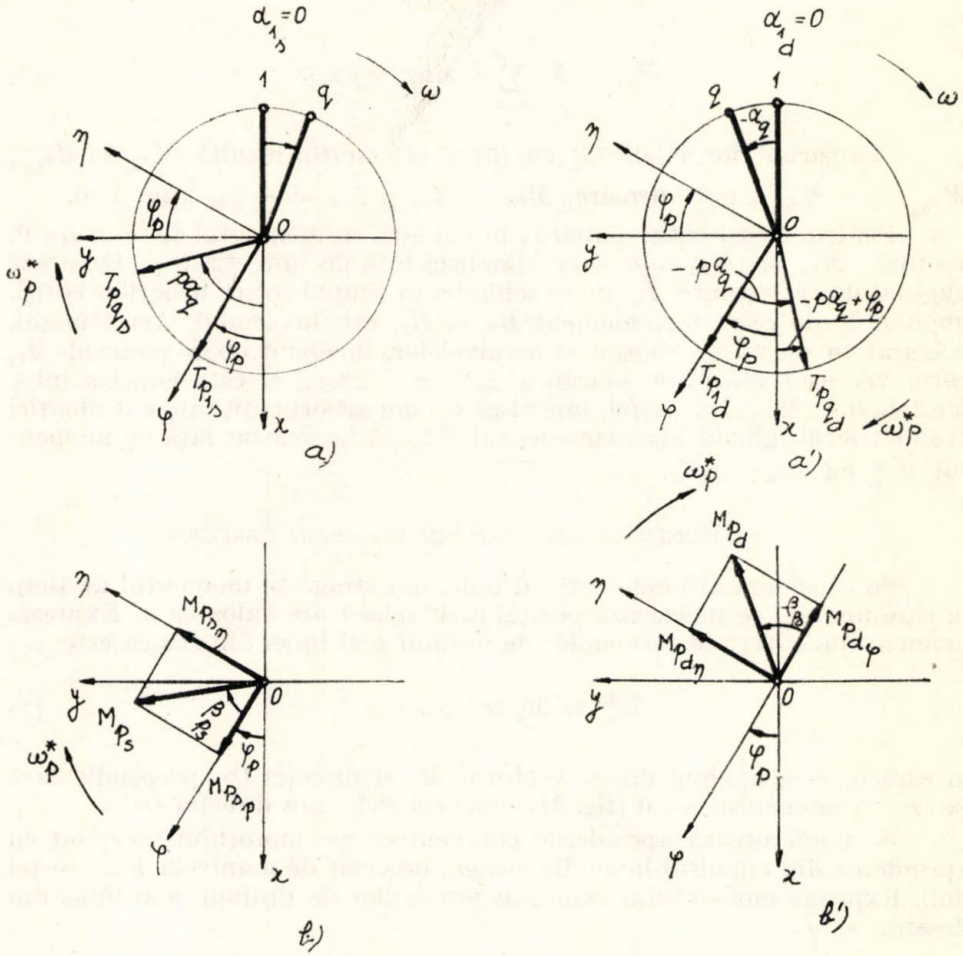


Fig. 1. — Determinarea poziţiei relative a vectorilor M_{p_s} şi M_{p_d} pentru arbori cotiţi simetrici în oglindă.

La cel de-al doilea arbore cotit, tot în momentul de timp în care unghiul descris de manivela 1 este nul, vectorul $T_{p_{1_d}}$ va face cu direcţia Ox, în sensul lui de rotaţie, tot unghiul φ_p. Manivela q a arborelui cotit pre-

MŰSZAKI EGYETEM BUDAPEST 1848

cedent, va face cu manivela 1 unghiul $-\alpha_q$, iar vectorul T_{p_q} va face cu direcția $O\varphi$ unghiul $-p\alpha_q$ (fig. 1 *a'*). Astfel în momentul de timp considerat, vectorii $T_{p_q}\left(q = 2,3\ldots\frac{i}{2}\right)$ ai manivelelor simetrice în oglindă sînt simetrici față de $O\varphi$. Pentru al doilea arbore cotit relațiile (3) și (4) devin

$$M_{p_{d_\eta}} = T_p\left[d_1 + \sum_{\nu=2}^{\nu=\frac{i}{2}} d_\nu \cos(-p\,\alpha_\nu)\right], \tag{5}$$

$$M_{p_{d_\varphi}} = T_p \sum_{\nu=2}^{\nu=\frac{i}{2}} d_\nu \sin(-p\alpha_\nu). \tag{6}$$

Comparînd formulele (3) cu (5) și (4) cu (6), rezultă $M_{p_{d_\eta}} = M_{p_{s_\eta}}$, $M_{p_{d_\varphi}} = -M_{p_{s_\varphi}}$; prin urmare, $M_{pd} = M_{ps}$ și $\beta_{pd} = -\beta_{ps}$ (fig. 1 *b*).

Pentru arbori cotiți simetrici în oglindă, în momentul de timp $\alpha_1 = 0$, vectorii M_{ps} și M_{pd} sînt deci simetrici față de direcția $O\eta$. Deoarece unghiul dintre vectorii T_p nu se schimbă în timpul rotirii arborilor cotiți, unghiul ξ_p dintre vectorii moment M_{pd} și M_{ps} este invariabil. Acest unghi, măsurat în sensul de rotație al manivelelor, începînd de la vectorul M_{ps} către vectorul M_{pd}, are mărimea $\xi_p = \pi - 2\beta_{ps}$; el este cuprins între limitele $0 < \xi_p < 2\pi$. Astfel, faptul că cei doi arbori cotiți nu sînt identici ci simetrici în oglindă face ca momentul $\mathfrak{M}^*_{p_d}$ să fie defazat față de momentul $\mathfrak{M}^*_{p_s}$ cu unghiul ξ_p.

3.2. MOMENTUL REZULTANT DE UN ORDIN OARECARE

Se consideră arborele cotit al liniei din stînga în momentul de timp în care unghiul ce precizează poziția manivelei 1 are valoarea α. Expresia momentului extern al termenilor de ordinul p al liniei din stînga este

$$\mathfrak{M}^*_{p_s} = M_p \cos(p\alpha + \mu_p), \tag{7}$$

în care μ_p este unghiul dintre vectorul M_p și direcția Os' perpendiculară pe Os, în momentul $\alpha = 0$ (fig. 2); vectorul $\mathfrak{M}^*_{p_s}$ are direcția Os'.

Se numerotează aprinderile consecutive ale motorului începînd cu aprinderea din cilindrul liniei din stînga, deservit de manivela 1 a acestei linii. Expresia momentului extern al termenilor de ordinul p ai liniei din dreapta este

$$\mathfrak{M}^*_{p_d} = M_p \cos\left\{p\left[\alpha - (k-1)\frac{\zeta}{i}\right] + \mu_p + a\,\xi_p\right\}, \tag{8}$$

în care i este numărul total de cilindri ai motorului, ζ perioada funcțională a ciclului motor, ξ_p unghiul dintre vectorii M_{pd} și M_{ps} în cazul $\gamma = 0$ și

$\alpha_{1_s} = \alpha_{1_d}$ măsurat de la vectorul M_{p_s} în sensul pozitiv ales, iar factorul a are valoarea zero sau 1, după cum arborele cotit al liniei din dreapta este identic sau simetric în oglindă cu arborele cotit al liniei din stînga; la motorul cu doi sau cu patru cilindri, arborii cotiți parțiali nu pot fi simetrici în oglindă și prin urmare $a = 0$. Vectorul $\mathfrak{M}^*_{p_d}$ are direcția Od', perpendiculară pe Od (fig. 2).

Numărul k precizează pozițiile relative ale celor doi arbori cotiți. În cazul folosirii arborilor cotiți care asigură cel mai bun echilibraj al forțelor de inerție în fiecare linie de cilindri valorile posibile ale lui k la motorul în patru timpi sînt [1]:

— dacă fiecare arbore cotit are manivelele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație, k poate avea numai valorile 2, 3, 4, ..., $\frac{i}{2} + 1$;

— dacă fiecare arbore cotit are manivelele două cîte două în fază, grupele de manivele în fază fiind uniform distribuite în jurul axei lor de rotație, k poate avea numai valorile pare 2, 4, 6, ..., $\frac{i}{2}$.

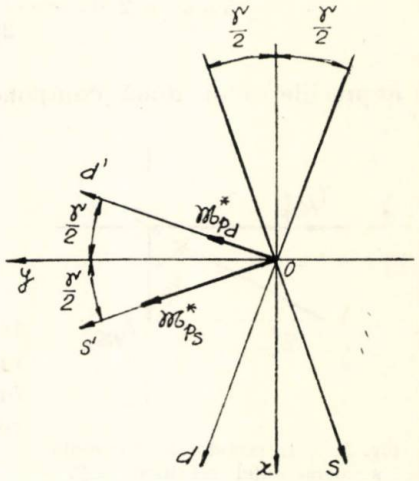


Fig. 2. — Determinarea momentului extern rezultant produs de termenii de ordinul p.

La motorul în doi timpi trebuie folosiți arbori cotiți care au manivelele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație; în acest caz k poate lua valorile 2, 4, 6,..., i.

Proiectînd vectorii moment $\mathfrak{M}^*_{v_s}$ și $\mathfrak{M}^*_{p_d}$ pe direcțiile Ox și Oy (fig. 2) se obțin următoarele componente ale momentului extern rezultant produs de termenii de ordinul p:

$$X_{\mathfrak{M}^*_p} = M_p \left[\cos(p\alpha + \mu_p) - \cos\left\{ p\left[\alpha - (k-1)\frac{\zeta}{i} \right] + \mu_p + a\xi_p \right\} \right] \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$Y_{\mathfrak{M}^*_p} = M_p \left[\cos(p\alpha + \mu_p) + \cos\left\{ p\left[\alpha - (k-1)\frac{\zeta}{i} \right] + \mu_p + a\xi_p \right\} \right] \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Cu notația

$$\varepsilon_p = \mu_p - \frac{1}{2} p \left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\,\xi_p}{p} \right], \tag{9}$$

se deduce după transformări

$$X_{\mathfrak{M}^*_p} = -2M_p \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{1}{2} p \left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p} \right] \sin(p\alpha + \varepsilon_p),$$

$$Y_{\mathfrak{M}^*_p} = 2M_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{1}{2} p \left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p} \right] \cos(p\alpha + \varepsilon_p).$$

Folosind notaţiile

$$A_{\mathfrak{M}_p^*} = -2M_p \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right], \tag{10}$$

$$B_{\mathfrak{M}_p^*} = 2M_p \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right], \tag{11}$$

expresiile celor două componente devin

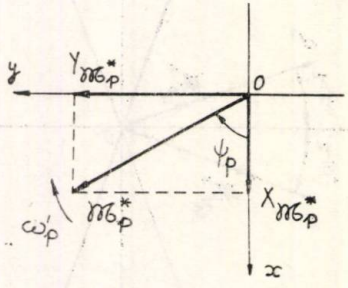


Fig. 3. — Interpretarea vectorială a momentului rezultant $\mathfrak{M}_p^*$.

$$\left.\begin{aligned} X_{\mathfrak{M}_p^*} &= A_{\mathfrak{M}_p^*}\sin(p\alpha + \varepsilon_p),\\ Y_{\mathfrak{M}_p^*} &= B_{\mathfrak{M}_p^*}\cos(p\alpha + \varepsilon_p). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Fiindcă $X_{\mathfrak{M}_p^*}$ şi $Y_{\mathfrak{M}_p^*}$ sînt componentele pe direcţiile Ox şi Oy ale vectorului moment rezultant, ele constituie, respectiv, momentele care acţionează în planul bisector exterior şi în planul bisector interior.

Vectorul moment rezultant formează cu axa Ox, în sensul pozitiv ales şi în momentul de timp considerat unghiul ψ_p definit de relaţia (fig. 3).

$$\psi_p = \operatorname{arc\,tg}\frac{Y_{\mathfrak{M}_p^*}}{X_{\mathfrak{M}_p^*}} = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{B_{\mathfrak{M}_p^*}}{A_{\mathfrak{M}_p^*}}\operatorname{etg}(p\alpha + \varepsilon_p)\right],$$

şi se roteşte cu viteza unghiulară

$$\omega_p' = \frac{\mathrm{d}\psi_p}{\mathrm{d}t}.$$

După transformări se obţine

$$\omega_p' = \omega_p^* \frac{-\dfrac{B_{\mathfrak{M}_p^*}}{A_{\mathfrak{M}_p^*}}}{1 + \left[\left(\dfrac{B_{\mathfrak{M}_p^*}}{A_{\mathfrak{M}_p^*}}\right)^2 - 1\right]\cos^2(p\alpha + \varepsilon_p)}, \tag{13}$$

relaţie care arată că vectorul moment rezultant se roteşte în acelaşi sens cu vectorii T_p sau în sens contrar, după cum coeficienţii $A_{\mathfrak{M}_p^*}$ şi $B_{\mathfrak{M}_p^*}$ au semne contrare, respectiv acelaşi semn.

3.3. ECHILIBRAREA MOMENTULUI EXTERN REZULTANT AL TERMENULUI DE UN ORDIN OARECARE

Deoarece pe de o parte $\gamma \neq 0$, iar pe de altă parte funcțiunile sinus și cosinus nu sînt simultan nule, relațiile (10) și (11) arată că echilibrarea momentului extern al termenului de ordinul p se poate obține numai dacă sînt îndeplinite simultan condițiile

$$\gamma = \pi,$$

$$\sin \frac{1}{2}\left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right] = 0.$$

Prima condiție elimină componenta momentului din planul bisector interior, iar a doua condiție elimină componenta momentului din planul bisector exterior. Înlocuind în a doua condiție $\zeta = \tau\pi$, unde τ este numărul de timpi ai ciclului motor, se obțin ordinele momentelor externe care pot fi echilibrate la motorul în V cu cilindri intercalați și opuși (dacă aceste momente subzistă în fiecare linie de cilindri)

$$p = \frac{\left(2\rho + a\frac{\xi_p}{\pi}\right) i}{\tau\,(k-1)}, \quad \rho = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

formulă în care se pot considera numai valorile lui ρ pentru care p este un număr întreg; în cazul $a \neq 0$, această condiție mai pretinde ca unghiul ξ_p să fie produsul dintre o fracție rațională și π.

Dacă $a = 0$, relația (14) devine

$$p = \frac{2\rho i}{\tau(k-1)}, \quad \rho = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Pentru motorul în patru timpi se obține din (15)

$$p = \frac{\rho i}{2\,(k-1)}, \quad \rho = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16}$$

Se constată deci că la motorul cu cilindri intercalați și opuși momentele termenilor ale căror ordine sînt un multiplu al jumătății numărului de cilindri sînt echilibrate, oricare ar fi valoarea lui k. Cînd $\frac{i}{2}$ se divide cu $k-1$ se echilibrează toate momentele termenilor ale căror ordine sînt un multiplu de $\frac{i}{2(k-1)}$. În cazul $k = \frac{i}{2} + 1$ sînt echilibrate toate momentele externe care subzistă în fiecare linie.

Pentru motorul în doi timpi relația (15) ia forma

$$p = \frac{\rho i}{k-1}, \quad \rho = 1, 2, 3, \ldots. \tag{17}$$

În consecinţă — dintre termenii care au o rezultantă în fiecare linie — nu produc momente externe cei ale căror ordine sînt un multiplu de i, dacă numărul de cilindri nu se divide cu $k-1$, sau termenii ale căror ordine sînt un multiplu de $\frac{i}{k-1}$, cînd i se divide prin $k-1$. Pentru $k=\frac{i}{2}+1$ sînt echilibrate toate momentele termenilor de ordin par.

În cazul $a=1$ şi $\xi_p=\pi$ se obţine din (14)

$$p=\frac{(2\rho+1)i}{\tau(k-1)},\quad \rho=0,1,2,3,\ldots. \tag{18}$$

Dacă i se divide prin $\tau(k-1)$, se echilibrează toate momentele termenilor ale căror ordine sînt un multiplu impar de $\frac{i}{\tau(k-1)}$. Cînd i se divide numai prin τ, sînt echilibrate momentele termenilor ale căror ordine sînt un multiplu de $\frac{i}{\tau}$; în acest caz k poate lua numai valori pare.

3.4. ECHILIBRAREA MOMENTULUI EXTERN REZULTANT AL TERMENILOR DE ORDINUL ÎNTÎI CU MASE ATAŞATE ARBORELUI COTIT

În cazul

$$A\mathfrak{M}_p^*=\pm B\mathfrak{M}_p^*, \tag{19}$$

rezultanta $\mathfrak{M}_p^*$ a componentelor $X\mathfrak{M}_p^*$ şi $Y\mathfrak{M}_p^*$ este un vector care are modulul $|A\mathfrak{M}_p^*|$, se roteşte cu viteza unghiulară $\omega_p'=\mp\omega_p^*$ [după cum rezultă din relaţia (13) ţinînd seama de (19)] şi face — în momentul de timp $\alpha=0$ — unghiul ε_p, măsurat în sensul său de rotaţie faţă de sensul pozitiv al axei Oy dacă $B\mathfrak{M}_p^*>0$ şi faţă de sensul negativ al axei Oy. dacă $B\mathfrak{M}_p^*<0$.

Condiţia (19) nu poate fi îndeplinită dacă $\gamma=\pi$, deoarece din (11) se obţine pentru această valoare a unghiului dintre liniile de cilindri $B\mathfrak{M}_p^*=0$. Prin urmare, dacă formula (19) este îndeplinită se obţine $A\mathfrak{M}_p^*=0$, ceea ce înseamnă că nu există moment extern rezultant de ordinul p şi deci problema analizată nu se pune. În cazul cercetat, unghiul dintre liniile de cilindri trebuie să fie cuprins între limitele $0<\gamma<\pi$.

Relaţiile (10) şi (11) arată că variaţia coeficienţilor $A\mathfrak{M}_p^*$ şi $B\mathfrak{M}_p^*$ este determinată de variaţia lui M_p iar din relaţiile (3) şi (4) se constată că M_p variază odată cu T_p. În consecinţă, dacă este îndeplinită condiţia (19), momentul rezultant $\mathfrak{M}_p^*$ poate fi echilibrat cu ajutorul unor mase ce se rotesc în acelaşi sens cu manivelele sau în sens contrar, după cum coeficienţii $A\mathfrak{M}_p^*$ şi $B\mathfrak{M}_p^*$ au semne diferite, respectiv acelaşi semn, cu o viteză unghiulară de p ori mai mare decît a manivelelor, p fiind ordinul termenului în cauză [3].

Ordinele termenilor care satisfac condiția (19) se obțin înlocuind în această relație expresiile coeficienților $A\mathfrak{M}_p^*$ și $B\mathfrak{M}_p^*$ din (10) și (11). Rezultă

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i}-\frac{a\xi_p}{p}\right]=\mp\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i}-\frac{a\xi_p}{p}\right],$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i}-\frac{a\xi_p}{p}\right]=\operatorname{tg}\left[\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right],$$

relații din care se obține

$$\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i}-\frac{a\xi_p}{p}\right]=\rho\pi\mp\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right),\quad \rho=0,1,2,3,\ldots$$

Explicitînd ordinul p rezultă

$$p=\frac{i}{\tau(k-1)}\left[2\rho\mp1\pm\frac{\gamma}{\pi}+\frac{a\xi_p}{\pi}\right],\quad \rho=0,1,2,3,\ldots. \tag{20}$$

Fiindcă p este un număr întreg, egalitatea (21) poate fi realizată numai cînd unghiurile γ și ξ_p sînt fiecare produsul dintre o fracție rațională și π; în acest caz pot fi considerate valorile lui ρ și k pentru care numărătorul se divide cu $\tau(k-1)$.

Din punct de vedere practic prezintă interes cazul în care relația (20) este satisfăcută pentru $p=1$, și vectorul care reprezintă momentul extern rezultant $\mathfrak{M}_1^*$ se rotește în sensul pozitiv, deoarece în această situație momentul $\mathfrak{M}_1^*$ poate fi echilibrat cu mase atașate arborelui cotit. Cea de-a doua condiție este îndeplinită cînd coeficienții $A\mathfrak{M}_1^*$ și $B\mathfrak{M}_1^*$ sînt de semne contrare; în formula (20) trebuie deci considerate semnele inferioare. Înlocuind $p=1$ în (20) și explicitînd unghiul dintre liniile de cilindri se obține:

$$\gamma=\pi\left[2\rho+1-\frac{\tau(k-1)}{i}+\frac{a\xi_1}{\pi}\right],\quad \rho=0,1,2,3,\ldots. \tag{21}$$

În formula (21) poate fi considerată numai valoarea $\rho=0$, deoarece unghiul ξ_1 este prin definiție pozitiv, iar termenul $\frac{\tau(k-1)}{i}$ are valoarea maximă 2 în cazul motoarelor în patru timpi (corespunzătoare valorii maxime $k=\frac{i}{2}+1$ posibile la acest motor) și valoarea maximă $\frac{2(i-1)}{i}<2$

la motorul în doi timpi. Prin urmare, la orice valoare întreagă $\rho > 0$, paranteza din (21) este mai mare sau cel puțin egală cu unitatea, situație care conduce la rezultatul imposibil $\gamma \geqslant \pi$. Avînd în vedere această constatare formula (21) devine

$$\gamma = \pi\left[1 - \frac{\tau(k-1)}{i} + \frac{a\xi_1}{\pi}\right]. \tag{22}$$

În (22) pot fi considerate numai valorile lui k pentru care $0 < \gamma < \pi$.

3.5. ORDINELE TERMENILOR ALE CĂROR MOMENTE EXTERNE REZULTANTE ACȚIONEAZĂ NUMAI ÎNTR-UNUL DIN PLANELE BISECTOARE ALE UNGHIULUI DINTRE LINIILE DE CILINDRI

Pentru unii termeni momentul rezultant poate acționa numai într-unul din planele bisectoare ale unghiului dintre liniile de cilindri.

Momentul rezultant va acționa numai în planul bisector interior cînd componenta în acest plan a vectorului $\mathfrak{M}_p^*$ este nulă, deci cînd $A\mathfrak{M}_p^* = 0$. Din (10) se deduce că această condiție este îndeplinită dacă $\gamma = 0$, prin urmare cînd motorul nu este în V, sau dacă

$$\sin\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right] = 0,$$

deci cînd termenii au ordinele date de formula (14). Dacă arborii cotiți ai celor două linii de cilindri sînt identici ($a = 0$) vor acționa numai în planul bisector interior momentele termenilor ale căror ordine sînt date de relațiile (16) sau (17), respectiv pentru motorul în patru sau în doi timpi; cînd $a \neq 0$ și $\xi_1 = \pi$ acționează numai în planul bisector momentele termenilor ale căror ordine sînt date de relația (18).

Momentul rezultant va acționa numai în planul bisector exterior cînd $B\mathfrak{M}_p^* = 0$. Din (11) se constată că această condiție este satisfăcută dacă $\gamma = \pi$, rezultat evident, deoarece la motorul cu cilindri opuși toți termenii acționează numai în planul bisector exterior și prin urmare momentul lor va acționa de asemenea în acest plan; condiția $B\mathfrak{M}_p^* = 0$ mai este îndeplinită cînd

$$\cos\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{\zeta}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right] = 0,$$

deci cînd

$$p = \frac{\left(2\rho + 1 + \frac{a\xi_p}{\pi}\right)i}{\tau(k-1)}, \quad \rho = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{23}$$

Din (23) se deduce că în cazul $a = 0$ momentul rezultant va acționa numai în planul bisector exterior pentru ordinele date de formula (18); în cazul

$\xi_1 = \pi$, momentul rezultant va acționa numai în planul bisector exterior pentru ordinele

$$p = \frac{2(\rho + 1)\, i}{\tau(k - 1)}, \quad \rho = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

4. ECHILIBRAJUL MOMENTULUI EXTERN REZULTANT, AL FORȚELOR DE INERȚIE ALE MASELOR CU MIȘCARE DE ROTAȚIE

În fiecare linie de cilindri echilibrarea momentului extern M_r al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație F_r are loc odată cu echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi [2]. Pentru ansamblul celor două linii de cilindri, echilibrarea momentului rezultat din sumarea momentului M_{r_s} al liniei din stînga, cu momentul M_{r_d} al liniei din dreapta se poate realiza prin mase atașate arborelui cotit, sau printr-o calare corespunzătoare a celor două linii de cilindri.

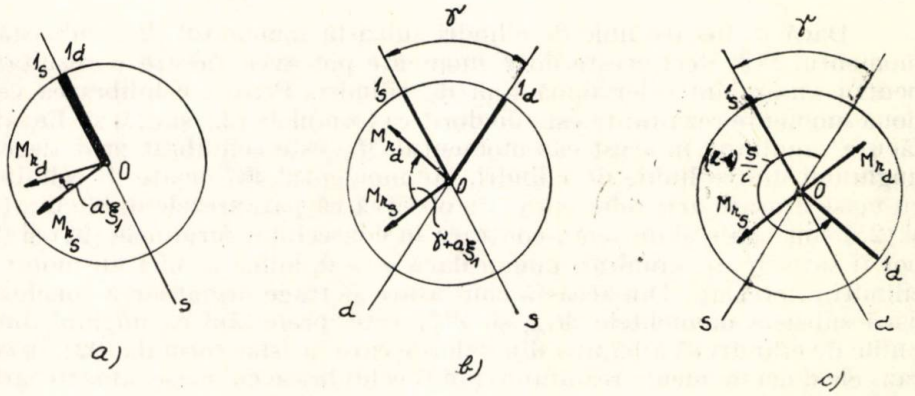


Fig. 4. — Determinarea condițiilor ce trebuie îndeplinite în vederea echilibrării reciproce a momentelor M_{r_s} și M_{r_d}.

Se cercetează în continuare problema determinării unghiului dintre liniile de cilindri la care se obține echilibrarea momentului rezultant $M_{r_{rez}} = M_{r_s} + M_{r_d}$. Deoarece arborii cotiți sînt identici sau simetrici în oglindă, momentele M_{r_s} și M_{r_d}, sînt egale și prin urmare — pentru a se echilibra — vectorii M_{r_s} și M_{r_d} trebuie să fie în opoziție. Se presupune că $\gamma = 0$ și că manivelele ce au numerele de ordine 1 sînt în fază și situate în dreptul planului care conține axa lor de rotație și este paralel cu axele cilindrilor; fiindcă steaua vectorilor T_1 este identică cu steaua vectorilor F_r, unghiul dintre vectorii M_{r_d} și M_{r_s} este egal cu unghiul $a\xi_1$ dintre vectorii M_{1_d} și M_{1_s} (fig. 4 *a*). Rotind cilindrii respectivi pentru a realiza linia din dreapta, vectorul M_{r_d} va fi și el rotit înainte cu unghiul γ și prin urmare în noua poziție el va face cu vectorul M_{r_s} unghiul $\gamma + a\xi_1$ (fig. 4 *b*). Dacă aprinderea în cilindrul 1 al liniei din dreapta are numărul de ordine k, arborele cotit al acestei linii trebuie rotit în urmă față de poziția precedentă cu unghiul $(k - 1)\frac{\zeta}{i}$ (fig. 4 *c*); în noua poziție vectorul M_{r_d} face

cu vectorul M_{r_s} unghiul $\gamma + a\,\xi_1 - (k-1)\,\frac{\zeta}{i}$ și pentru ca cei doi vectori să se echilibreze reciproc este necesar ca acest unghi să fie un multiplu impar de $-\pi$.

$$\gamma + a\xi_1 - (k-1)\frac{\xi}{i} = -(2\rho+1)\pi, \qquad \rho = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Din această egalitate se deduce

$$\gamma = \pi\left[\frac{\tau(k-1)}{i} - \frac{a\xi_1}{\pi} - (2\rho+1)\right], \qquad \rho = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{24}$$

Repetînd discuția făcută în legătură cu formula (21) se ajunge la concluzia că factorul ρ din (24) nu poate lua decît valoarea zero. În consecință, relația (24) devine

$$\gamma = \pi\left[\frac{\tau(k-1)}{i} - \frac{a\xi_1}{\pi} - 1\right]. \tag{25}$$

Dacă în fiecare linie de cilindri subzistă momentul M_r, subzistă și momentul $\mathfrak{M}_1^*$, deci aceste două momente pot avea fiecare o rezultantă pentru ansamblul celor două linii de cilindri. Pentru echilibrarea celor două momente rezultante este de dorit ca formulele (22) și (25) să fie satisfăcute simultan; în acest caz momentul $M_{r_{rez}}$ este echilibrat prin alegerea unghiului dintre liniile de cilindri, iar momentul $\mathfrak{M}_1^*$ poate fi echilibrat cu mase atașate arborelui cotit. Se observă că parantezele duble din (22) și (25) sînt egale și de semn contrar; în consecință, formulele (22) și (25) pot fi satisfăcute simultan numai dacă $\gamma = 0$, adică la nici un motor cu cilindri intercalați. Din această constatare se trage următoarea concluzie: dacă subzistă momentele $M_{r_{rez}}$ și $\mathfrak{M}_1^*$, este preferabil ca unghiul dintre liniile de cilindri să aibă una din valorile care satisfac formula (22), în care caz cele două momente rezultante pot fi echilibrate cu mase atașate arborelui cotit.

5. DEDUCEREA ECHILIBRAJULUI MOMENTELOR FORȚELOR DE INERȚIE AL MOTORULUI ÎN V NORMAL CU BIELE ARTICULATE DIRECT PE MANETOANELE ARBORELUI COTIT

Conform celor arătate în lucrarea [1] motorul în V normal cu biele articulate direct pe manetoanele arborelui cotit este un caz particular al motorului în V cu cilindri intercalați și anume primul rezultă din al doilea dacă cei doi arbori cotiți sînt identici și manivelele cu același număr de ordine coincid. Arborii cotiți sînt identici dacă

$$a = 0, \tag{26}$$

iar manivelele cu același număr de ordine coincid cînd [1]

$$\Delta = 0, \tag{27}$$

$$k = \frac{i\gamma}{\zeta} + 1. \tag{28}$$

Totodată, pentru realizarea repartiției uniforme a aprinderilor, unghiul dintre liniile de cilindri poate avea valorile

$$\gamma = \eta \frac{\tau\pi}{i}, \quad \eta = 1, 2, 3, \ldots, \leqslant \frac{i}{\tau}. \tag{29}$$

În cazul motorului în patru timpi această formulă este valabilă pentru $i > 2$, deoarece la motorul în V normal nu se poate realiza repartiția uniformă a aprinderilor pentru $i = 2$ și $\tau = 4$.

Pentru precizarea echilibrajului motorului în V normal cu biele articulate direct pe manetoanele arborelui cotit este suficient să se introducă în relațiile precedente condițiile (26) ... (29).

6. CONCLUZII

Din punctul de vedere al echilibrajului momentelor forțelor de inerție, motorul în V cu cilindri intercalați are cîteva avantaje remarcabile față de motorul în V normal:

— motorul în patru timpi poate fi complet echilibrat, oricare ar fi numărul de cilindri, dacă cilindrii sînt opuși și succesiunea aprinderilor între liniile de cilindri corespunzător aleasă $\left(k = \frac{i}{2} + 1\right)$

— este posibilă micșorarea oricît de mult a trepidațiilor dintr-unul din planele bisectoare, prin alegerea valorii unghiului dintre liniile de cilindri, în timp ce la motorul în V normal aceste posibilități sînt mai restrînse, unghiul γ neputînd lua decît anumite valori impuse de repartiția uniformă a aprinderilor

— este posibilă echilibrarea momentului extern al termenului de ordinul întîi cu mase atașate arborelui cotit în general pentru mai multe valori ale unghiului dintre liniile de cilindri.

Primită la redacție la 16 septembrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bărănescu, C. Silvestru, *Echilibrajul forțelor de inerție la motorul în V cu cilindri intercalați*, St. cerc. mec. apl., *6* (1973).
2. G. Bărănescu, *O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate*, St. cerc. mec. apl., *4* (1959).
3. G. Bărănescu, *Interpretări vectoriale ale forței de inerție a maselor cu mișcare de translație aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variației vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit*, St. cerc. mec. apl., *6* (1969).
4. G. Bărănescu, *Unele probleme privind echilibrajul momentului extern al termenilor de ordinul întîi la motorul în linie în doi timpi cu număr par de cilnidri și aprinderi uniform repartizate*, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" din București, *2* (1969).

UNELE ASPECTE EXPERIMENTALE ALE CERCETĂRILOR PRIVIND BIOMECANICA GENUNCHIULUI ŞI ANTEBRAŢULUI

de I. CONSTANTINESCU, D. ANTONESCU

Institutul politehnic, Institutul medico-farmaceutic Bucureşti

Se prezintă cîteva dispozitive şi metode de investigaţie elaborate şi utilizate de autori pentru studiul experimental al solicitărilor din ligamentele genunchiului şi din membrana interosoasă a antebraţului. Se expun, spre exemplificare, cîteva din rezultatele obţinute şi se formulează unele concluzii în legătură cu acestea.

1. INTRODUCERE

Fundamentală şi aplicativă, biomecanica este o ştiinţă interdisciplinară tînără, în plină dezvoltare, ale cărei cercetări vizează o mare diversitate de industrii şi domenii de activitate umană. Este cazul medicinei, industriei aerospaţiale şi a autovehiculelor, mergînd pînă la industria obiectelor de uz casnic şi a activităţilor sportive.

Implicaţiile biomecanicii în tot mai multe domenii decît cel al medicinei probabil că vor modifica în viitor optica potrivit căreia biomecanica este o ramură a acesteia. Lucrările efectuate au dovedit că, cel puţin în prezent, cercetările în biomecanică trebuie făcute de echipe mixte de medici şi ingineri, chestiune amplu dezbătută şi minuţios motivată în lucrările [1], [2].

Din punctul de vedere al inginerului, multe probleme de biomecanică (în special cele privind sistemul locomotor) prezintă particularităţi care fac necesare concepte şi metode de studiu care nu sînt proprii practicii inginereşti curente, dintre care citãm:

— sisteme spaţiale de corpuri cu un grad mare de mobilitate, avînd deformaţii şi deplasări mari;

— piesele anatomice ce se studiază trebuie considerate ca fiind constituite din materiale neomogene, anizotrope, neliniare, vîscoelastice etc.

În ceea ce priveşte cercetările experimentale, este necesară elaborarea unor metode şi dispozitive speciale, adecvate specificului biomecanicii, care apoi îşi vor găsi, desigur, aplicabilitate şi în alte domenii de cercetare.

În lucrarea de faţă se prezintă cîteva dispozitive şi metode de investigaţie elaborate şi utilizate de autori pentru studiul experimental al soli-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 1, 1977, P. 129–135

citărilor din ligamentele genunchiului şi din membrana interosoasă a antebraţului. Se expun sumar cîteva din rezultatele obţinute şi se formulează unele concluzii în legătură cu acestea.

2. DESCRIEREA DISPOZITIVELOR

În numeroase cercetări de biomecanică se utilizează traductoare tensometrice rezistive ce se lipesc direct pe ţesuturi osoase vii sau moarte, măsurile ce trebuie luate pentru funcţionarea corectă a acestora în diverse condiţii de efectuare a măsurătorilor fiind relativ bine cunoscute [3].

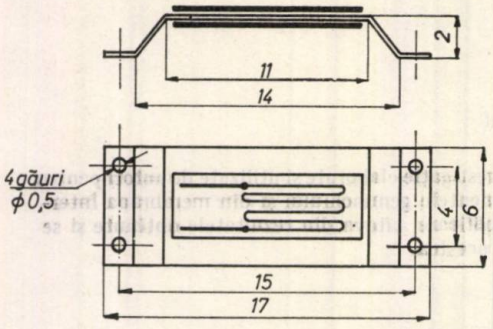


Fig. 1

Pentru măsurări asupra ligamentelor, structurilor fibroase sau muşchilor, nu este însă posibilă lipirea traductoarelor rezistive direct pe ţesutul ce se studiază, ci se utilizează o plăcuţă subţire de oţel, care constituie un captor tensometric [4].

Un astfel de captor s-a reprezentat în figura 1. El a fost realizat din tablă de oţel de arc cu grosimea 0,2 mm pe care s-au lipit două traductoare rezistive tip KP—3—A1—11, cu baza 3 mm, şi rezistenţa 120 Ω, fabricaţie Kyowa Electronic Instruments Co.

Prinderea captorului pe ţesutul ce se studiază se face prin trecerea unor fire de aţă chirurgicală prin cele patru găuri de diametru 0,5 mm şi „coaserea" lor în masa ţesutului respectiv. S-a avut în vedere ca fixarea captorului să se facă pe ţesutul aflat în starea cea mai relaxată din cele posibile în timpul experimentului. Etalonarea s-a făcut la sfîrşit, prin detaşarea ligamentului sau ţesutului pe care captorul a fost montat şi încărcarea acestuia cu o forţă cunoscută.

În vederea determinării variaţiilor solicitărilor în unele ţesuturi ale genunchiului şi antebraţului funcţie de diversele mişcări ale acestora, s-au realizat trei dispozitive pentru măsurarea unghiurilor de flexie-extensie, vlagus-varus şi rotaţie pentru genunchi, respectiv supinaţie-pronaţie pentru antebraţ.

Dispozitivul pentru măsurarea unghiurilor de flexie-extensie şi valgus-varus este reprezentat în figura 2. Cu ajutorul tijei *1* dispozitivul se prinde în lungul tibiei ale cărei unghiuri se măsoară faţă de tija *2* care este menţinută verticală de către contragreutatea *3*. În două eclise *4*, solidare cu tija *1* şi în două eclise *5*, solidare cu tija *2*, se află lagărele în care se roteşte cruceа cardanică *6* pe ale cărei axe se înfăşoară firele *7* şi *8* ce antrenează în deformaţie lamelele de oţel *9* şi *10*, proporţional cu unghiurile dintre direcţiile tijelor *1* şi *2* în cele două plane ale articulaţiei cardanice. Pe lamelele *9* şi *10* sînt lipite traductoarele tensometrice *11*, respectiv *12* ce se conectează în semi-punte la aparatura de măsurare şi înregistrare.

La proiectarea dispozitivului trebuie dimensionate lamelele pe care lipesc traductoarele tensometrice în vederea obținerii sensibilității dorite. Schema de calcul este cea din figura 3, în care lamela s-a presupus de lungime l, grosime h și lățime constantă b. Considerînd traductorul tenso-

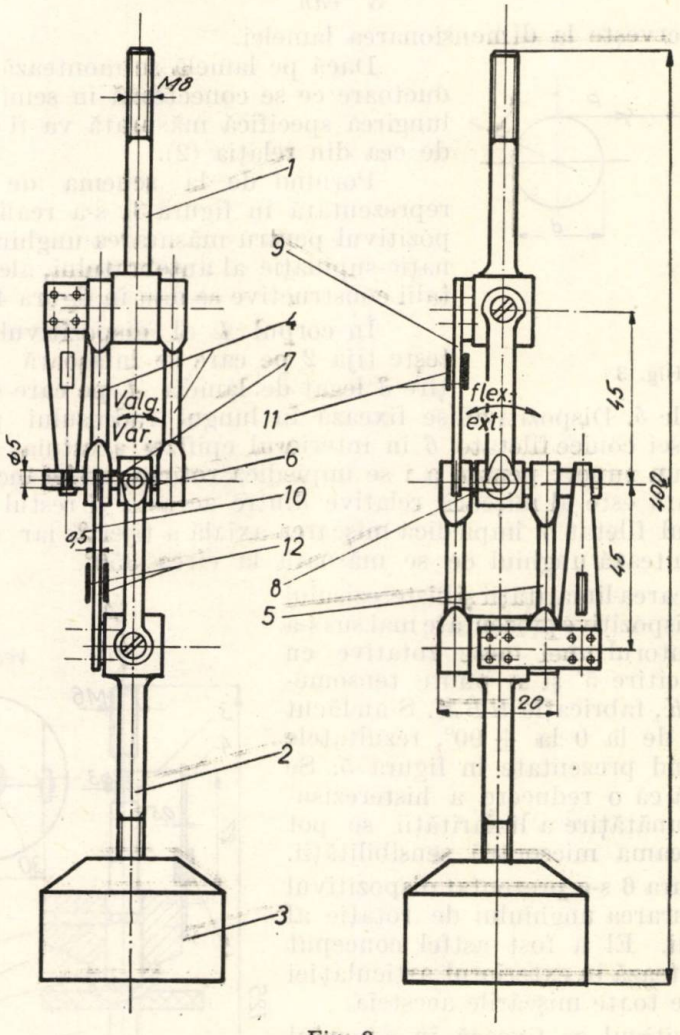


Fig. 2

metric lipit la distanța c de capătul liber al lamelei, săgeata acesteia produsă de o forță P este

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_z} = \frac{4}{Ebh^3} Pl^3 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{ch} \varepsilon_c, \qquad (1)$$

în care s-a notat cu ε, alungirea specifică pe suprafața lamelei în secțiunea unde este montat traductorul.

Dacă unghiul α ce se măsoară antrenează în rotație o tijă de diametru d pe care se înfășoară un fir subțire, inextensibil, legat de lamelă, trebuie ca $\alpha d/2$ să se egaleze cu relația (1), din care rezultă

$$\alpha = \frac{4}{3}\frac{l^3}{cdh}\varepsilon_c, \qquad (2)$$

relație ce servește la dimensionarea lamelei.

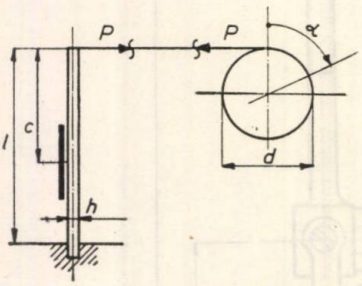


Fig. 3

Dacă pe lamelă se montează două traductoare ce se conectează în semi-punte, alungirea specifică măsurată va fi dublă față de cea din relația (2).

Pornind de la schema de principiu reprezentată în figura 3, s-a realizat și dispozitivul pentru măsurarea unghiului de pronație-supinație al antebrațului, ale cărui detalii constructive se dau în figura 4.

În corpul *1* al dispozitivului se rotește tija *2* pe care se înfășoară firul subțire *3* legat de lamela *4*, pe care sînt lipite traductoarele *5*. Dispozitivul se fixează în lungul radiusului prin înșurubarea piesei conice filetate *6* în interiorul epifizei acestuia. Tija *2* se fixează de un suport pentru a i se împiedica rotirea, astfel încît unghiul ce se măsoară este al mișcării relative dintre aceasta și restul dispozitivului. Știftul filetat *7* împiedică mișcarea axială a tijei *2*, iar știftul cilindric *8* limitează unghiul ce se măsoară la circa 350°.

Verificarea liniarității și histerezisului celor două dispozitive prezentate mai sus s-a făcut cu ajutorul unei mese rotative cu precizia de citire 5′ și o punte tensometrică tip *MK*, fabricație *HBM*. S-au făcut determinări de la 0 la $\pm$ 90°, rezultatele obținute fiind prezentate în figura 5. Se menționează că o reducere a histerezisului și o îmbunătățire a liniarității se pot obține pe seama micșorării sensibilității.

În figura 6 s-a prezentat dispozitivul pentru măsurarea unghiului de rotație al genunchiului. El a fost astfel conceput încît se montează în exteriorul articulației și lasă libere toate mișcările acesteia.

Dispozitivul se fixează în suportul reglabil *1*, de care este fixat rigid axul *2* în jurul căruia bara *3* execută liber mișcarea de valgus-varus. Barele *3*, *4*, *5*, eclisele rigide 6 și lamelele elastice *7* formează un mecanism articulat care permite efectuarea liberă a mișcării de flexie-extensie, ce se transmite dispozitivului de către bara *5* care se fixează cu două șuruburi solidară cu condilul tibial. Ca urmare a

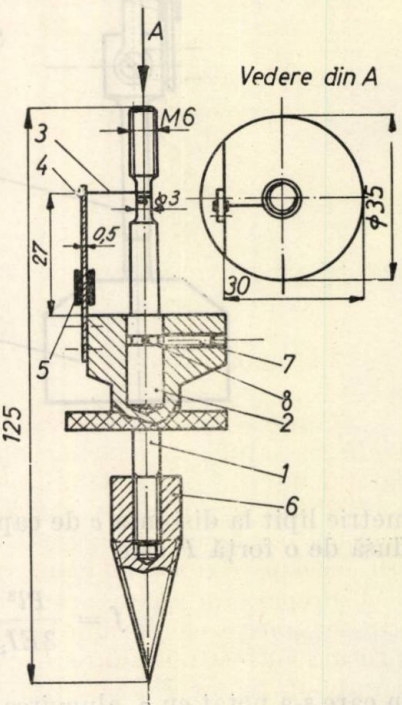


Fig. 4

mișcării de rotație ce urmează să se măsoare au loc deformații de încovoiere ale lamelelor elastice *7*, pe care sînt montate traductoarele rezistive *8*.

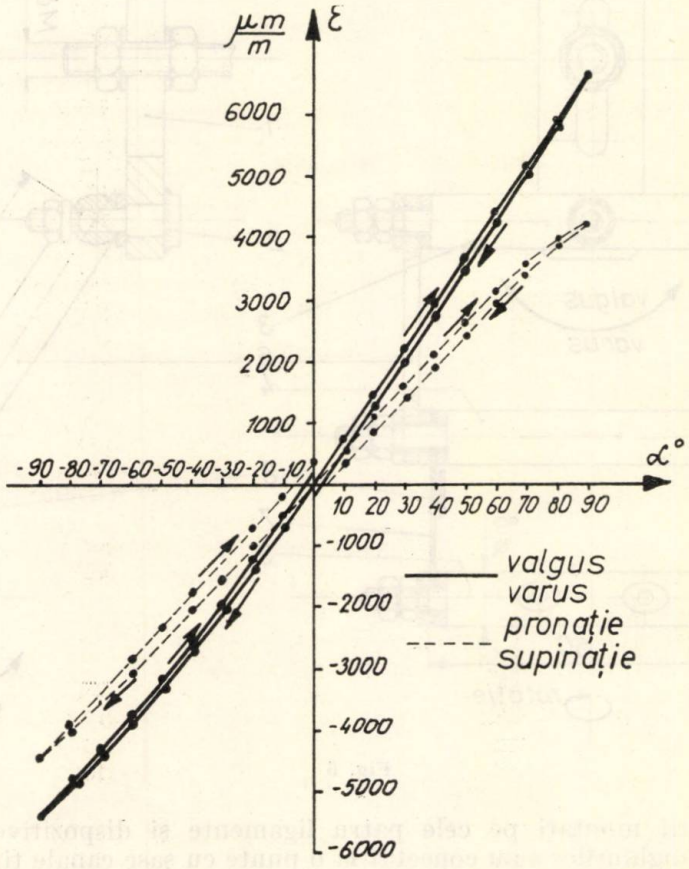


Fig. 5

3. STUDIUL VARIAȚIILOR EFORTURILOR DIN LIGAMENTELE GENUNCHIULUI

Cercetările experimentale întreprinse și-au propus să pună în evidență variațiile solicitărilor din cele patru ligamente ale genunchiului (lateral intern — *LLI*, lateral extern — *LLE*, încrucișat antero-extern — *LAE* și încrucișat postero-intern — *LPI*) ca urmare a diferitelor mișcări imprimate articulației normale sau a celei la care unele ligamente au fost secționate (modelînd un genunchi traumatizat).

Preparatele anatomice pe care s-au făcut cercetările au fost obținute prin secționarea femurului și tibiei în treimea medie a diafizei; mușchii și rotula au fost înlăturate. O vedere de ansamblu a montajului este prezentată în figura 7. Piesa anatomică s-a fixat într-un suport rigid prin imobilizarea femurului. Mișcările au fost imprimate manual tibiei.

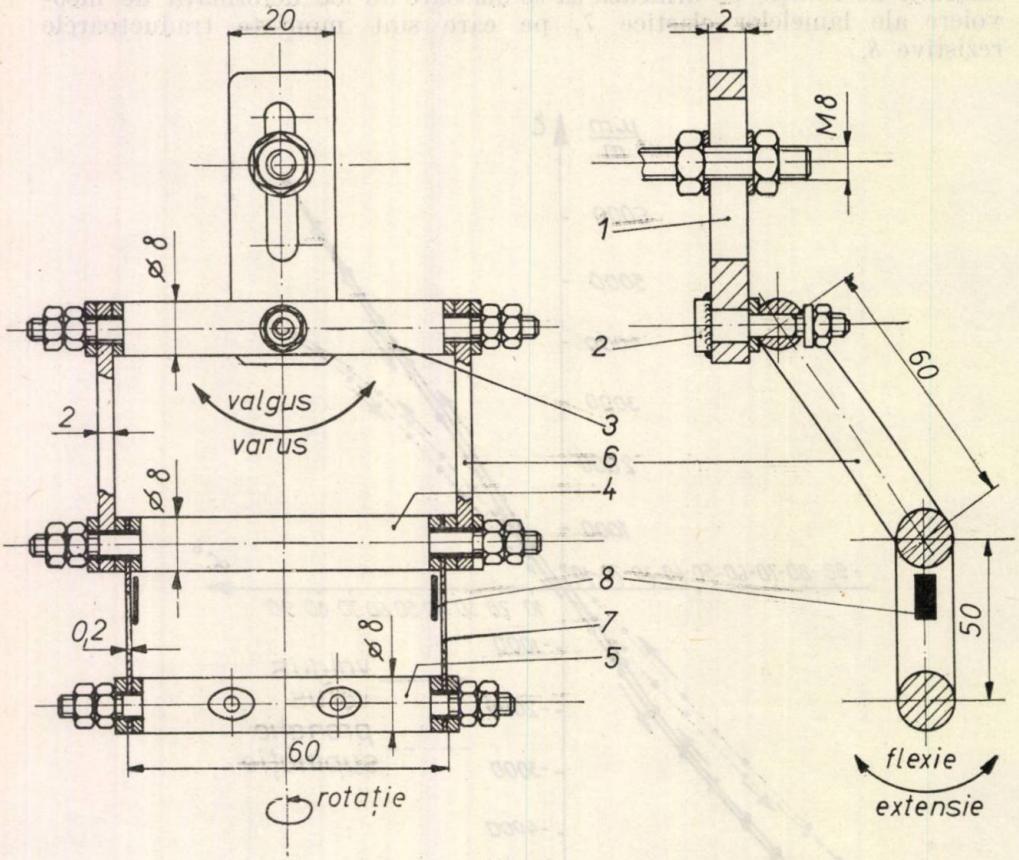


Fig. 6

Captorii montați pe cele patru ligamente și dispozitivele pentru măsurarea unghiurilor s-au conectat la o punte cu șase canale tip *KWS*/6 A—5 și o punte *KWS*/T—5 cu un canal, ambele fabricație *HBM*. Semnalele de ieșire obținute s-au introdus într-un înregistrator cu bucle cu 12 canale obținîndu-se diagrame cu variațiile simultane ale celor șapte mărimi precizate mai sus, pentru diverse mișcări ale tibiei. O astfel de înregistrare este redată, spre exemplificare, în figura 8, pe care se văd variațiile semnalelor date de captorii montați pe cele patru ligamente și unghiurile de valgus-varus și cel de rotație internă — rotație externă pentru articulația aflată în două poziții și anume :

— flexie-valgus — rotație externă ;

— flexie-varus — rotație internă.

În urma analizei rezultatelor obținute s-au formulat următoarele concluzii principale privind variațiile eforturilor din ligamentele genunchiului, funcție de diverse mișcări ale tibiei :

— la genunchiul normal, ligamentele laterale sînt solicitate de toate mișcările articulației, cu excepția celor stricte de lateralitate (valgus sau varus) care destind un ligament și-l tensionează pe cel contralateral ;

— solicitarea cea mai accentuată a fost înregistrată în ligamentul lateral intern (*LLI*), în cursul mișcării combinate de flexie-valgus — rotație externă ;

— după secționarea ligamentului încrucișat antero-extern (*LAE*) tensiunea în ambele ligamente laterale este mai mare și mai ales pentru ligamentul lateral intern (*LLI*), care preia o parte din sarcinile *LAE* secționat.

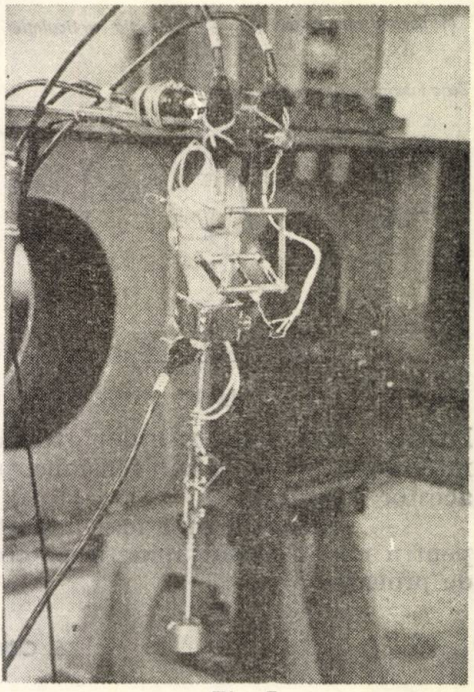


Fig. 7

4. STUDIUL VARIAȚIILOR SOLICITĂRILOR DIN MEMBRANA INTEROSOASĂ A ANTEBRAȚULUI

Între cubitus și radius este o membrană interosoasă inserată pe marginile anterioare ale celor două oase. Membrana este formată din fibre oblice în jos și înăuntru, de la radius la cubitus, realizînd o tipică structură funcțională.

Unul din scopurile cercetărilor întreprinse a fost elucidarea rolului membranei interosoase în limitarea mișcării de pronație-supinație pe care radiusul o descrie în jurul cubitusului, precum și în menținerea unei anumite distanțe între cele două oase ale antebrațului.

Preparatele anatomice pe care s-au făcut cercetările au fost obținute prin secționarea humerusului și articulației radiocarpiene în zonele mijlocii ale acestora ; mușchii au fost înlăturați. Piesa anatomică astfel obținută s-a fixat într-un suport rigid prin mobilizarea humerusului în poziție iorizontală. Antebrațul a rămas în poziție verticală, mișcarea de prono-supinație imprimîndu-se manual radiusului, prin intermediul dispozitivului prezentat mai sus.

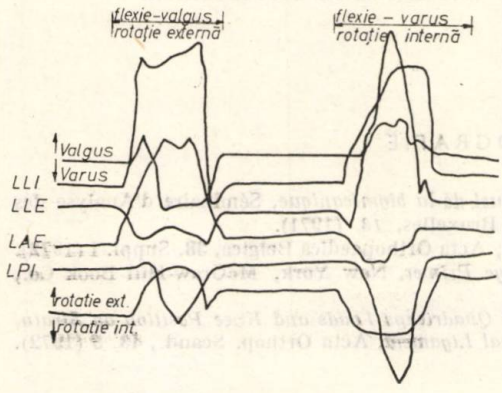


Fig. 8

S-au montat doi captori pe membrana interosoasă, unul în zona inferioară, celălalt în zona superioară. Aceștia, împreună cu dispozitivul de măsurare al unghiului de prono-supinație s-au conectat la o punte cu patru canale tip 4 *D* 3, fabricație *TPW*. Semnalele de ieșire obținute s-au introdus în două amplificatoare tip 8610 și apoi într-un înregistrator tip He—86 t, toate fabricație Hellige.

S-au obținut înregistrări cu variațiile simultane ale celor trei mărimi precizate mai sus, una din acestea fiind reprodusă în figura 9. În partea de jos a înregistrării s-au reprezentat semnalele de etalonare ale celor doi captori.

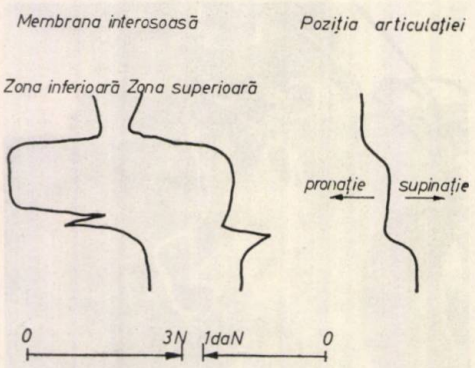


Fig. 9

În urma analizei rezultatelor obținute s-au formulat următoarele concluzii principale privind variațiile solicitărilor din membrana interosoasă a antebrațului, funcție de mișcarea de prono-supinație

— solicitările atît în zona superioară, cît și în cea inferioară a membranei interosoase cresc progresiv pe măsură ce mișcările extreme de pronație sau supinație ating limita maximă. Aceasta arată că deși spațiul interosos este mai mic în supinație sau pronație decît în poziția intermediară, rotirea relativă a celor două oase depărtează punctele de inserție ale membranei interosoase și o pun sub tensiune, participînd astfel și ea la limitarea acestor mișcări;

— solicitările sînt mai importante în zona inferioară a membranei pentru mișcările de supinație pe cînd în cea superioară pentru mișcările de pronație.

5. CONCLUZII

Metodele de investigație și dispozitivele elaborate și utilizate de autori pentru unele cercetări experimentale privind ligamentele genunchiului și membrana interosoasă a antebrațului, au corespuns în foarte bună măsură exigențelor impuse unor astfel de măsurări. Ele pot fi, desigur, utilizate cu succes și pentru alte studii de biomecanică.

Primită la redacție la 9 ianuarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. P. Halleaux, *L'ingénieur face a l'essor actuel de la biomécanique*, Séminaire d'Analyse des Contraintes, Université libre de Bruxelles, *13* (1971).
2. P. Halleaux, *La biomécanique de l'ingénieur*, Acta Orthopaedica Belgica, **38**, Suppl. 1 (1972).
3. C. C. Perry, H.R. Lissner, *The Strain Gage Primer*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1962.
4. A. A. White, J. C. Raphael, *The Effect of Quadriceps Loads and Knee Position on Strain, Measurement of the Tibial Colateral Ligament*, Acta Orthop. Scand., **43**, *3* (1972).

INTERPRETAREA INFORMAȚIEI ÎN INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICĂ *)

de V. I. VLAD

Institutul de fizică atomică București

În această lucrare se prezintă contribuțiile noastre teoretice și experimentale la interpretarea interferogramelor holografice mediate în timp (IHMT).

Interpretarea informației (franjelor) în interferometria holografică este una din problemele cele mai importante ale domeniului, care condiționează aplicarea lui în practică.

Cel mai general tip de interferometrie holografică este interferometria holografică mediată în timp (IHMT), în care obiectul investigat poate avea o mișcare arbitrară (dar mică, 0,1 — 50 μm) în timpul expunerii. Rezultatele importante ale cercetării noastre privind interpretarea informației din IHMT pentru obiecte reflectante și difuzante sînt expuse, pe scurt, în cele ce urmează [5], [6], [7], [8].

1. *Distribuția de intensitate în imaginea produsă de IHMT* are forma

$$< S_t >_{\text{imag}} = M_t S_{\text{imag}} + (\nabla_K M_t)(\nabla_R S_{\text{imag}}), \quad \begin{cases} \nabla_K = i \dfrac{\partial}{\partial k_{x2}} + j \dfrac{\partial}{\partial k_{y2}}, \\ \nabla_R = i \dfrac{\partial}{\partial x} + j \dfrac{\partial}{\partial y}, \end{cases} \tag{1}$$

unde S_{imag} este intensitatea imaginii obiectului și M_t este funcția caracteristică (franjelor). Astfel, imaginea produsă de IHMT poate fi considerată că apare prin filtrajul imaginii obiectului cu funcția de transfer M_t și printr-o perturbare a procesului cu termenul al doilea (zgomot). Caracteristicile IHMT rezultă a fi :

(a) Locul geometric al franjelor $M_t = 0$, (2)

(b) Localizarea franjelor $\nabla_K M_t = 0$, (3)

(c) Forma funcției caracteristice $M_t = M_t(\bar{r})$. (4)

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

Localizarea franjelor, o problemă foarte dificilă, ar putea fi făcută conform interpretării (1) folosind un *filtraj adaptat* pentru extragerea semnalului $M_t S_{\text{imag}}$ din zgomotul $(\nabla_K M_t)$ $(\nabla_R S_{\text{imag}})$, care îi permite vizualizarea numai în anumite regiuni ale spaţiului.

Locul geometric al franjelor şi localizarea lor depind de deformarea suprafeţei obiectului şi nu de funcţia de timp. Forma funcţiei caracteristice este determinată însă de funcţia de timp şi o etalonare absolută a franjelor pentru măsurarea microdeformărilor este de o mare importanţă. În acest scop, noi am propus şi experimentat *cuplarea IHMT cu detecţia optică prin heterodinare* (*D O.H.*) (Fig. 1), [5], [6], [8].

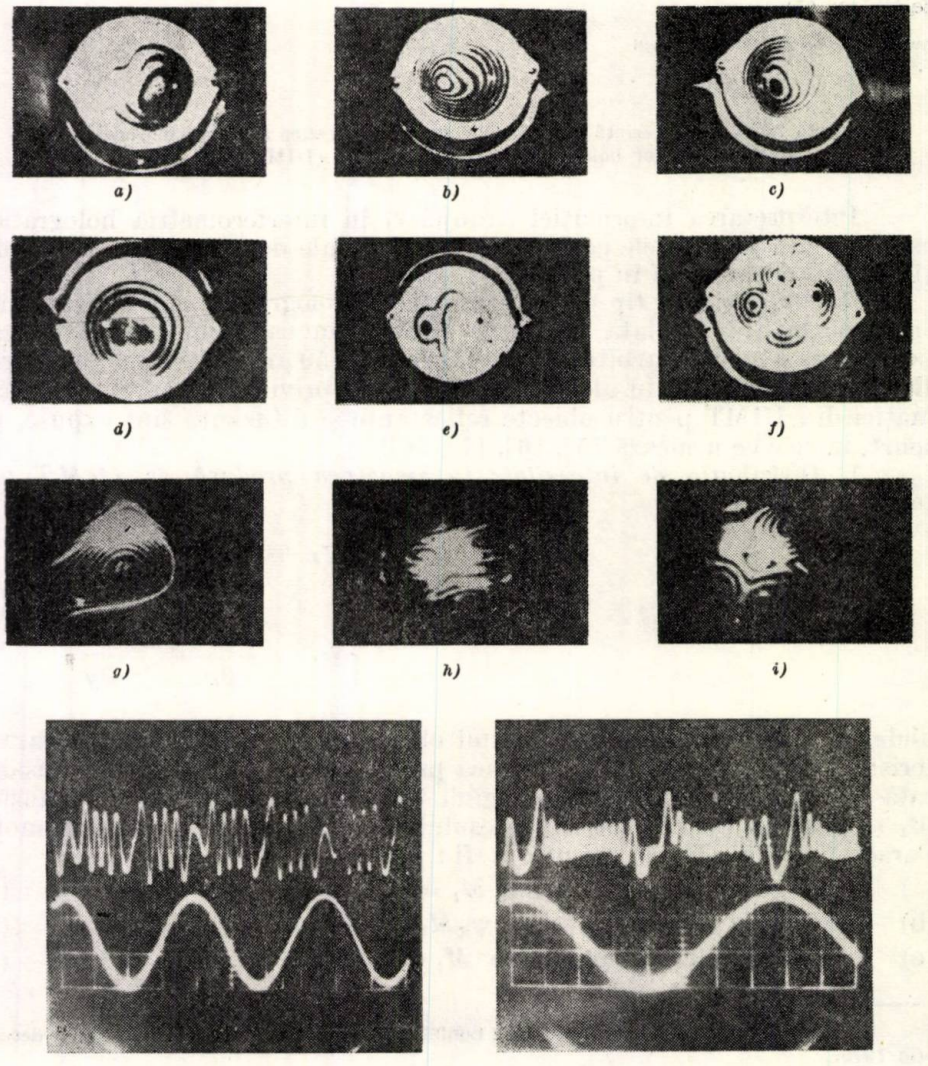
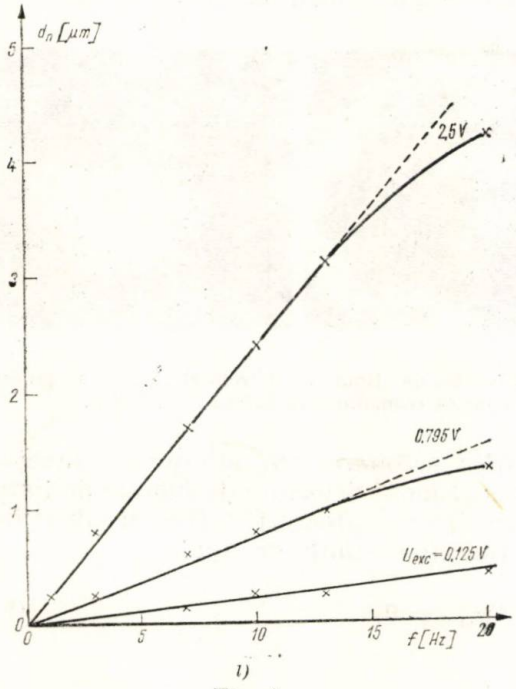


Fig. 1

2. Dacă *funcția de timp care animă obiectul investigat este nesinusoidală*, pentru determinarea funcției caracteristice, mulți autori folosesc dezvoltarea armonică Fourier, ceea ce conduce la o expresie complicată [1], [2].

$$M_t = e^{i\Omega<f>} \sum_{n=1}^{N} \prod_{m=1}^{M} i^{l_{mn}} J_{l_{nm}} [\Omega A_m] e^{il_{nm}\theta_m}. \tag{5}$$



i)

Fig. 1

Fig. 1. — Rezultate experimentale în metoda de analiză a vibrațiilor obținută prin cuplarea I.H.M.T. și D.O.H. a)—f) — Moduri de vibrație ale unei plăci circulare. g)—i) — Moduri de vibrație ale unor plăci cu forme complicate. j), k) — Semnale de etalonare a figurilor de interferență produse de D.O.H. l) — Amplitudinea normală de vibrație a unei plăci circulare în funcție de frecvență la diferite nivele de excitații infrasonore determinate prin IHMT. Rezultatele experimentale sînt într-o bună concordanță cu estimațiile teoretice.

Noi am propus aproximarea funcției de timp cu o funcție aproape-periodică, cu urmarea [7]

$$M_t = e^{i\Omega<f>} \prod_{m=1}^{M} J_0[\Omega A_m], \tag{6}$$

ceea ce reprezintă o simplificare considerabilă a calculului. Mai mult, pentru mai multe mișcări temporale independente,

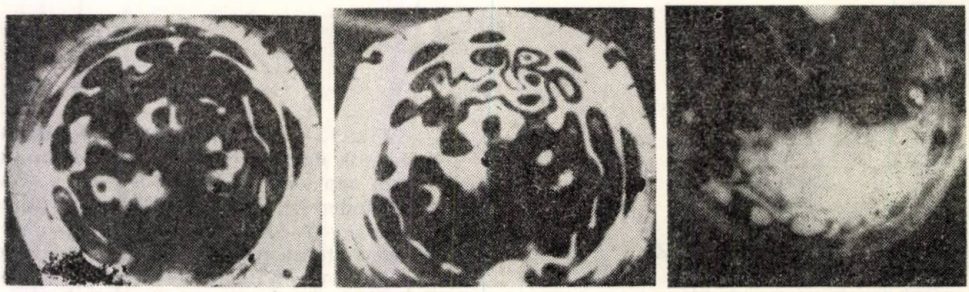
$$M_t = \prod_{i=1}^{N} M_i. \tag{7}$$

3. Dacă *funcția de timp a obiectului $f(t)$ este un proces aleatoriu normal, staționar*, am găsit [8],

$$<S_{imag}> = \frac{E_R T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin c^2(\omega T) S_0(\omega)\, d\omega \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{8}$$

unde S_0 este densitatea spectrală de putere a cîmpului obiectului și ω este frecvența Doppler.

Pentru a reuși să mai examinăm mișcarea obiectului, referința trebuie modulată temporal asemănător cu obiectul. Am propus extragerea referinței de pe o mică oglindă fixată pe obiect, ceea ce permite investigarea holografică a obiectelor industriale, care nu pot fi fixate pe o masă de holografie foarte stabilă mecanică (Fig. 2). Acest studiu ne-a condus la construirea unor aparate holografice simple pentru uz industrial.



a) b) c)

Fig. 2. — Imagini produse de IHMT cînd funcția de timp a obiectului este un proces aleatoriu normal și referința este modulată temporal asemănător cu obiectul.

4. Considerînd *cazul vibrațiilor neliniare*, am interpretat funcția caracteristică $M(\Omega)$ în termenii unei funcții densitate de funcția de timp $f(t)$, concept aparținînd teoriei semnalelor aleatoare [7]. Pentru vibrațiile neliniare separabile cu o singură funcție de timp, de tipul

$$\ddot{f} + Cg(f) = 0, \tag{9}$$

rezultă

$$M(\Omega) = C_0 \mathcal{F}^{-1}\{[1 - G(f)/G_0]^{-1/2}\}, \tag{10}$$

în care $G(f) = \int g(f)\mathrm{d}f$ și C_0, G_0 constante.

Concluzia este că, dacă cunoaștem elongația în funcție de forța excitatoare, $g(f)$, putem calcula funcția caracteristică $M(\Omega)$, *fără cunoașterea unei soluții explicite a ecuației diferențiale neliniare în f*. Invers, putem determina forța elastică din franjele IHMT produse de o vibrație neliniară.

$$g(f) = A_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\{\mathcal{F}[M(\Omega)]\}^{-2}. \tag{11}$$

Aceste rezultate de o mare importanță practică le-am particularizat pentru oscilatori neliniari existenți în industrie, de tip Duffing (neliniaritate dură sau moale), constatînd variații în intensitatea franjelor de ordin înalt de ordinul 2% față de cazul liniar.

5. În *cazul iluminării difuze a obiectului investigat sau a investigării unui obiect difuzant*, distribuția intensității în imagine are un aspect

specific, granular („speckle") produs de interferența aleatoare a fasciculelor difuzate de diferiți centri [4], [7]:

$$\langle S_{\text{imag}} \rangle = \mathcal{R}_0^2 + \sum_n h_n^2 A_n + \sum_n \sum_m 2h_n h_m (A_n A_m)^{1/2} \cos(\varphi_n - \varphi_m) +$$

$$+ \sum_n 2\mathcal{R}_0 J_0(\beta_n) h_n A_n^{1/2} \cos \varphi_n, \tag{12}$$

cu h răspunsul la impuls al sistemului de formare a imaginii;

A_n, φ_n sînt amplitudinea și faza undei difuzate de centrul n;

$\beta_n = 2\pi d_n/\lambda$; d_n este amplitudinea de vibrație în punctul n.

În acest calcul am considerat partea spațială a undei obiect ca un proces aleatoriu normal, staționar și funcția de timp sinusoidală. Contrastul imaginii granulare este raportul între deviația standard și componenta continuă spațială din imagine

$$C = \frac{[1 + 2\alpha J_0^2(2\pi \mathcal{I}/\lambda)]^{1/2}}{1 + \alpha}, \tag{13}$$

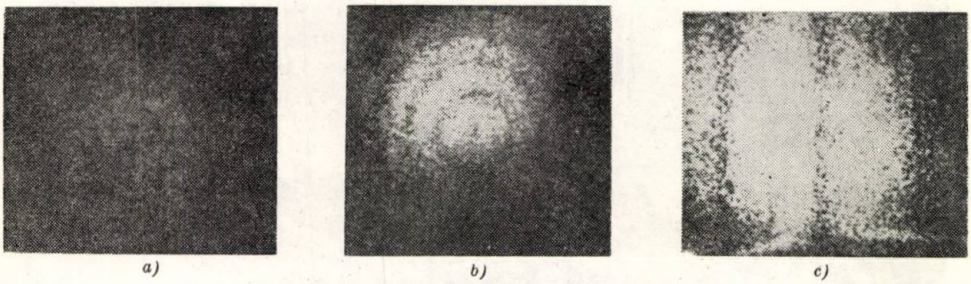
unde α este raportul intensităților fasciculelor referință și obiect.

Aceste rezultate sînt de mare importanță practică, deoarece observarea deformării se poate face *în timp real, cu ochiul liber* și argumentul funcției Bessel din (13) este același ca și în IHMT pentru obiecte reflectante (fig. 3).

6. Folosind studiile noastre de interpretare a informației din IHMT, am găsit *o metodă simplă de generare a funcțiilor bidimensionale* pe cale optică care își găsește un cîmp larg de aplicare în dispozitivul de calcul analogic cu laser CORAL—1 [7], [8], [3].

Astfel, dacă fasciculul de referință este modulat în amplitudine temporal cu funcția $f_r(t)$, funcția caracteristică franjelor care acoperă imaginea unei plăci vibrante este

$$M_t = \frac{1}{T}\int_0^T f_r^* \exp[\mathrm{i}\, \Omega_t(\overline{K}_2, \overline{R}, t)]\mathrm{d}t. \tag{14}$$



a) b) c)

Fig. 3. — IHMT cu lumină granulară pentru plăci circulare și dreptunghiulare. Se observă forma franjelor asemănătoare cu cea prezentată pentru plăcile circulare din figura 1 (funcții Bessel).

Pentru o singură funcție de timp $f(t)$,

$$\Omega_t = \Omega(\bar{K}_2, \bar{R})\, f(t) \tag{15}$$

și, în acest caz, funcția franjelor poate fi dezvoltată în seria

$$M_t = M(\Omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}^n A_n J_n(\Omega), \tag{16}$$

cu

$$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_r^*[f + (f^2 - 1)^{1/2}]^n \mathrm{d}t. \tag{17}$$

Deoarece $J_n(.)$ formează un set ortonormat complet, orice $M(\Omega)$ poate fi sintetizată cu ajutorul ecuațiilor (16) și (17).

Practic, trebuie să căutăm modulația referinței corespunzătoare obținerii coeficienților A_n căutați din (17). Dacă luăm, în particular, $f(t) = \sin\omega_0 t$

$$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T f_r^*(t)\,[\sin\omega_0 t + \mathrm{i}\cos\omega_0 t]^n \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f_r^*(t)\exp(\mathrm{i}n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[(T_0 \ll T)]{} \frac{1}{T} F_r^*(n\omega_0), \tag{18}$$

adică modulația referinței se obține simplu printr-o sinteză Fourier temporală, uzual folosită în teoria semnalelor. În plus, dacă lucrăm cu un vibrator la care deformarea este liniară (paletă vibrantă), problema generării semnalelor bidimensionale se simplifică și mai mult, avînd succesiunea

$$M_t(\bar{R}) \rightarrow A_n \rightarrow f_r(t). \tag{19}$$

Aceste rezultate au folosit la elaborarea unei instalații de interferometrie holografică IH—1, destinată controlului nedistructiv al pieselor și dispozitivelor industriale (fig. 4).

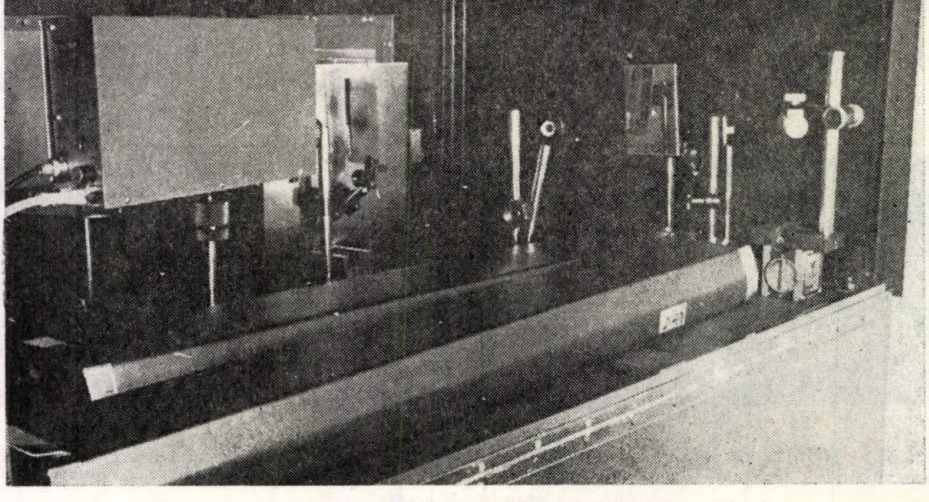


Fig. 4. — Instalație de interferometrie holografică IH—1.

Instalaţia IH—1 este realizată numai cu piese din ţară, se caracterizează printr-un înalt grad de versatilitate datorită suporţilor cu bază magnetică realizaţi la IMF Bucureşti şi dispune de o afişare a imaginilor modernă pe monitor TV (Electronica). Această instalaţie a fost expusă la EREN'74.

În final, doresc să mulţumesc fizicienilor J. Maurer, I. Popa şi tehn. pr. M. Popescu pentru sprijinul acordat în efectuarea unora dintre experimentele prezentate şi pentru discuţiile purtate în decursul unei îndelungate şi fructuoase colaborări.

BIBLIOGRAFIE

1. K. A. Stetson, J.O.S.A., **60**, 1378 (1970).
2. A. D. Wilson, J.O.S.A., **60**, 1068 (1970).
3. C. C. Aleksoff, Appl. Optics, 10, 1329 (1970).
4. L. Ek, E. N. Mollin, Opt. Commun,. 2, 419 (1971).
5. V. I. Vlad, et al., un Lucr. Simp. ,,Progrese în Electronică'', Academia RSR, Bucureşti, 1971 şi 1974.
6 V. I. Vlad et, al., Lucr. celei de-a IV-a Conf. naţ. de acustică, Bucureşti, mai 1973.
7 V. I. Vlad, Rapoarte Anuale 633/A Inst. de fizică atomică, Bucureşti, 1973 şi 1974.
8 V. I. Vlad, Introducere în holografie, Edit. Academiei RSR, Buc. 1973.

ASUPRA INTERPRETĂRII FRANJELOR ÎN INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICĂ

de I. CUCUREZEANU, R. CHIȘLEAG, P. SUCIU

Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă o metodă de îmbunătățire a procesului de interpretare a tabloului de franje macroscopice obținut prin interferometria holografică, metodă ce constă în introducerea, peste deformația studiată, a unei rotații suplimentare a obiectului în jurul unei axe normale pe direcția de observare, rotația respectivă fiind introdusă numai într-una din cele două expuneri holografice. Sînt prezentate, bineînțeles, avantajele acestei metode, cum ar fi, de exemplu, 1) mărirea preciziei de descriere a profilului deformației; 2 posibilitatea localizării franjelor pe obiect, evitîndu-se explorarea imprecisă și dificilă în adîncime; 3) posibilitatea utilizării aparatului matematic mai simplu privind rotația. În încheierea lucrării este prezentat locul acestei metode în suita etapelor urmate în cursul interpretării unui tablou de franje dat de interferometria holografică.

Ideea de bază în interferometria holografică constă în faptul că tabloul tridimensional de franje macroscopice care apare la reconstrucție este o consecință a modificărilor obiectului între două expuneri și poate fi interpretat pentru determinarea acestor modificări. Cum însă formele și modificările reale ale obiectelor pot fi foarte variate, tabloul de franje rezultat poate apare ca foarte complicat și procesul de interpretare devine extrem de laborios [1], [2], [3]. În schimb, sînt obținute simultan informații asupra modificărilor întregii zone observabile a obiectului, independent de materialul din care acesta este confecționat, de forma și de modul lui de prelucrare.

Pentru studiul obiectelor cu forme complexe este comod să se descompună suprafața reconstruită a obiectului în zone cu forme simple, dacă se poate plane, care, după ce suferă unele modificări elementare (translații, rotații, deformații), dau la reconstrucție grupuri de franje caracteristice cu aspect regulat, mai ușor de interpretat.

Pe baza analizei caracteristicilor tablourilor de franje generate de modificări elementare ale unor suprafețe plane și ținînd cont de stadiul actual al metodelor de interpretare, vom propune în lucrarea de față o metodă de mărire a preciziei și vitezei de interpretare a franjelor macroscopice produse în interferometria holografică și vom schița un program general al procesului de interpretare a unui astfel de tablou de franje.

O porțiune de suprafață plană Δ a obiectului, ale cărei modificări sînt studiate prin interferometria holografică, poate suferi următoarele modificări elementare mai importante față de direcția de observare,

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 1, 1977, P. 145—150

considerată normală pe suprafața studiată, presupunînd și că direcția de iluminare este aceeași cu direcția de observație :

a) rotire în jurul unei axe normale la direcția de observare (axă conținută în planul suprafeței);

b) translație normală la direcția de observare (translație laterală);

c) rotație în jurul unei axe paralele cu direcția de observare;

d) translație paralelă cu direcția de observare.

a) Rotația suprafeței studiate în jurul unei axe normale la direcția de observare și situată în planul suprafeței sau în apropierea acestuia generează franje de interferență liniare, localizate pe obiect sau în apropierea lui, franje paralele cu axa de rotație, cu un contrast bun chiar la aperturi largi ale sistemului optic de detecție a imaginii reconstruite. În figura 1 se văd astfel de franje localizate pe suprafața unui transistor, rotită cu 63 secunde. În domeniul studierii prin interferometrie holografică a modificărilor suprafețelor care conțin o rotație s-au făcut progrese însemnate atît din punct de vedere experimental [4], [5], cît și teoretic [6], [7], astfel încît interpretarea franjelor generate în acest caz este relativ rapidă.

În figura 2 este reprezentat cazul rotației cu un unghi α în jurul axei Oz a unei suprafețe plane Δ situată în planul yOz iluminată la înregistrare și observată la reconstrucție după o direcție paralelă cu axa Ox. Condiția ca în punctul A să apară la reconstrucție o franjă luminoasă de ordin k, numărat de la axa de rotație, este ca distanța $AA' = d$, cu care se deplasează punctul A cînd suprafața Δ se rotește cu unghiul α, să fie

$$d = k \cdot \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

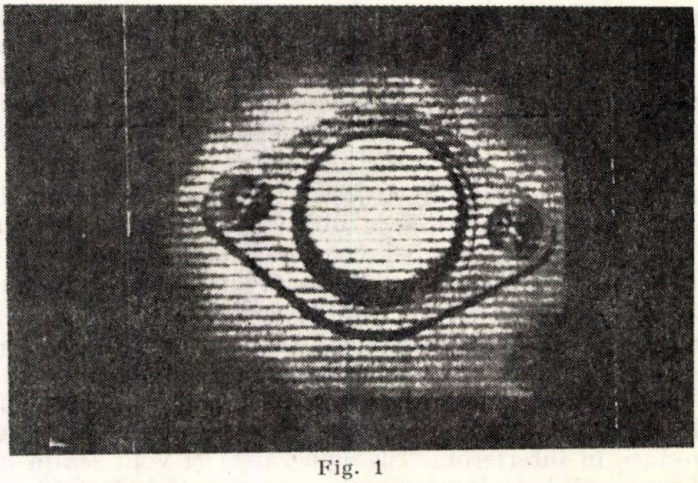


Fig. 1

unde λ este lungimea de undă a radiației laserului utilizat. Dacă s este interfranja observată, atunci, din triunghiul OAA' obținem

$$\alpha \cong \frac{AA'}{OA} = \frac{k \cdot \frac{\lambda}{2}}{k \cdot s} = \frac{\lambda}{2s}. \tag{2}$$

Urmează că unghiul α de rotație a suprafeței considerate Δ poate fi determinat experimental prin simpla măsurare a interfranjei s.

b) Translația laterală dă naștere unor franje de interferență normale la direcția de deplasare localizate într-un plan F distanțat de suprafața Δ și paralel cu aceasta, franje ușor sesizabile chiar cu instrumente optice cu apertură largă. În figura 3 este reprezentat cazul acestei translații de mărime $d = AA'$.

Planul F de localizare a franjelor se află la distanța D de suprafața Δ.

Din condiția de obținere a franjelor luminoase se ajunge la relația

$$d = \frac{D \cdot \lambda}{s}, \qquad (3)$$

adică deplasarea suprafeței Δ în planul ei, normal la direcția de observare poate fi determinată prin măsurarea interfranjei s și a distanței D dintre planul de localizare a franjelor F și planul suprafeței Δ.

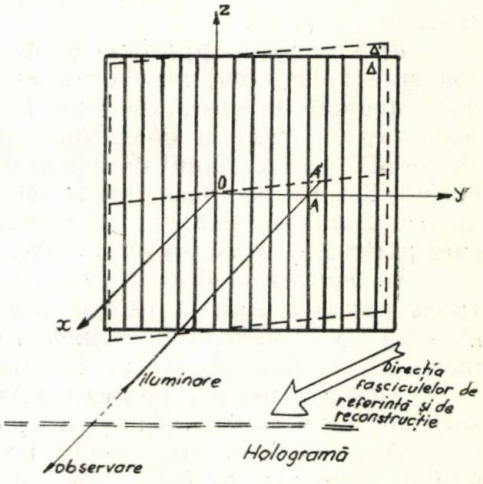


Fig. 2

Spre deosebire de cazul rotației normale a), în acest caz este necesară explorarea unui domeniu tridimensional, relativ întins, în care s-ar putea afla planul de localizare F, franjele nefiind localizate pe suprafața studiată.

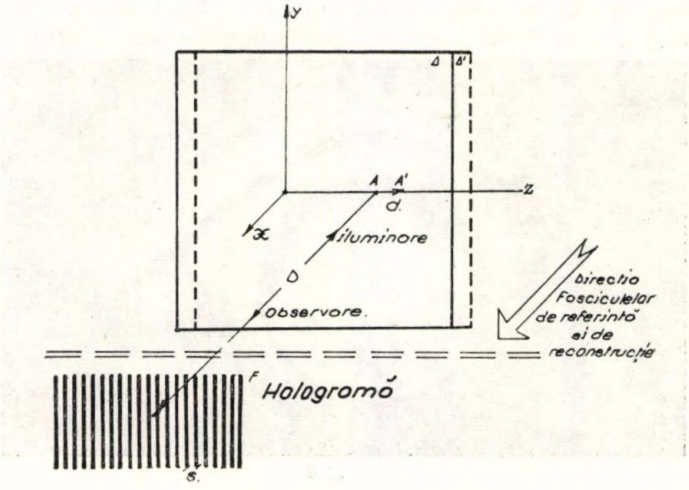


Fig. 3

Operația de explorare în adîncime prelungește procesul de interpretare, iar eroarea de determinare a poziției planului de focalizare se transmite asupra rezultatului obținut cu privire la deplasarea studiată.

c) Rotația în jurul unei axe paralele cu direcția de observare dă naștere la franje paralele, nelocalizate pe obiect, al căror contrast scade rapid cu creșterea aperturii sistemului de observație. Orientarea franjelor și frecvența lor spațială depind de porțiunea din hologramă care este iluminată în procesul de reconstrucție. Observarea franjelor și localizarea lor presupun un volum de muncă și un nivel al erorilor mai mari decît în cazurile a) și b).

d) Translația suprafeței pe direcția vectorului de observație (de la, sau spre hologramă) nu dă naștere unei figuri de interferență vizibilă dacă unghiul de observare este larg. Dacă însă se reduce substanțial porțiunea de lucru a hologramei, apar inele complete sau incomplete. Pe de altă parte, planul de localizare este dificil de definit și variază cu ordinul fiecărui inel observat. În plus, deplasarea poziției aperturii instrumentului optic de detecție dă naștere unei deplasări a sistemului de inele care păstrează totuși un punct fix.

În figura 4 se observă un asemenea sistem de franje generat de dilatarea carcasei unui transistor prin încălzire în timpul funcționării. Punctul fix al sistemului de inele este situat în stînga sus. În acest caz măsurătorile sînt laborioase și imprecise.

Aparatul teoretic pentru tratarea cazurilor b), c) și d) nu este încă suficient de dezvoltat pentru a-l putea discuta aici.

După cum se știe, specific pentru interferometria holografică este studiul deformațiilor foarte mici și de formă complexă deformații care în general nu pot fi studiate prin alte metode. Din cele discutate pînă acum a rezultat faptul că pentru astfel de deformații (mici) numărul de franje macroscopice este foarte mic, ceea ce face ca informația despre structura tridimensională a deformației să fie relativ săracă.

În scopul îmbunătățirii procedeelor de interpretare a franjelor macroscopice, obținute prin interferometria holografică, prezentăm în cele ce urmează o metodă destinată să îmbogățească informația necesară

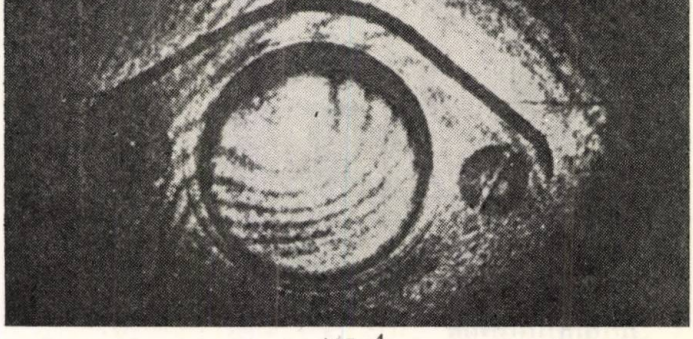


Fig. 4

în astfel de studii. O referire vagă asupra acestei idei a fost dată în lucrarea [8], iar un exemplu de utilizare practică va fi dat în lucrarea [3].

Din compararea tablourilor de franje produse de diferite modificări ale unei suprafețe, precum și pe baza analizei stadiului de dezvoltare a aparatului experimental și teoretic de interpretare a franjelor în interfero-

metria holografică, am observat că este avantajos ca modificării obiectului studiat să i se suprapună și o componentă de rotație în jurul unei axe normală la direcția de observare.

Introducerea unei asemenea rotații suplimentare în una din cele două expuneri se poate realiza practic pe una din următoarele căi:

1) prin rotirea convenabilă a obiectului față de restul componentelor montajului holografic;

2) prin înclinarea suplimentară a fasciculului de iluminare;

3) prin rotirea plăcii holografice și

4) prin rotirea fasciculului de referință.

Dacă o suprafață suferă mici deformații în adîncime, pe ea se observă, proiectate clar sau mai puțin clar, franje care, la iluminare și observare normale la suprafață, sînt curbe de nivel ale deformației suprafeței, provenite din intersecția suprafeței deformate cu suprafața inițială, la adîncimi crescînd din jumătate în jumătate de lungime de undă a radiației laser utilizate. Deformația suprafeței este măsurată plecînd de la aceste franje și în limitele informațiilor furnizate de acestea.

În figura 5 a, este reprezentat un corp a cărui suprafață plană Δ a fost deformată prin apăsare normală cu un poanson de formă piramidală pătratică. Interferograma cu dublă expunere va da franje de forma celor reprezentate teoretic în figura 5 *b*. Numărul acestor franje depinde de adîncimea deformației suprafeței, iar interfranja locală depinde de înclinarea suprafeței deformate în zona respectivă. Adîncimile relativ mici ale deformațiilor studiate fac ca numărul franjelor să fie mic și, după cum am mai spus, informația despre deformație relativ săracă.

În figura 5 *c* am construit franjele obținute ca rezultat al deformării obiectului ca în figura 5 *a*, și al rotirii acestuia în jurul unei axe conținută în planul Δ.

Aceste franje sînt localizate pe obiect și sînt mai numeroase decît în cazul din figura 5 *b*. Fenomenul se petrece ca și cum franjele de rotație

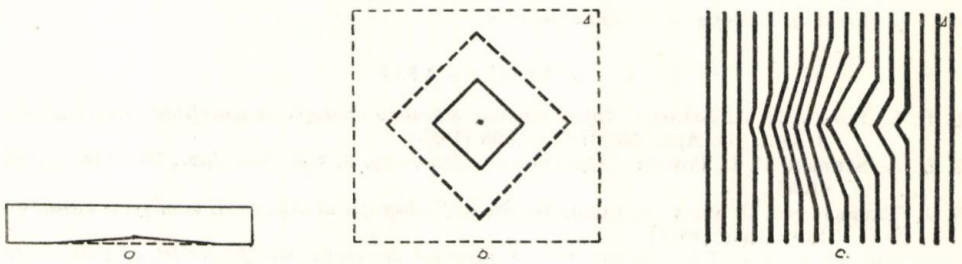


Fig. 5

ar explora întreaga suprafață studiată, cu un pas mult mai mic decît în cazul din figura 5*b*. Informația obținută despre deformație este mult mai completă.

Este evident că, în cazul cînd deformația suprafeței este neregulată, segmentele de dreaptă compunînd curbele din figurile 5*b* și 5*c*, vor deveni segmente de linii curbe, corespunzător liniilor de nivel ale deformației neregulate. Un exemplu de acest fel este prezentat de autori într-o altă lucrare [3].

Introducerea unei rotații controlate în una din cele două expuneri oferă următoarele avantaje mai importante:

1) localizează tabloul de franje în imediata vecinătate a obiectului, evitîndu-se în acest mod explorarea în adîncime;

2) permite creșterea preciziei de descriere a modificărilor suprafeței studiate prin creșterea numărului de franje (curbe de nivel) și deci a numărului total de date cunoscute.

Pînă acum ne-am ocupat de modificări tipice ale unor zone ale obiectului cu structuri foarte simple (suprafețe plane).

În cazul cînd sîntem în fața unui tablou de franje complicat produs de un obiect cu structură complexă, ale cărei porțiuni de suprafață suferă diferite modificări, procesul de interpretare implică o succesiune de operații care, în general, ar putea consta în următoarele:

1) observarea cu un instrument optic cu apertură mică (cu profunzime de cîmp mare) a tabloului de franje, în vederea identificării grupurilor de franje distincte prin regularitățile de formă, perioadă și domeniu de localizare ce le prezintă;

2) stabilirea unor corespondențe între grupurile de franje individualizate și diferitele porțiuni ale suprafeței obiectului;

3) aprecierea calitativă a tipurilor de modificări suferite de diferitele porțiuni ale suprafeței obiectului;

4) studiul grupurilor de franje cu instrumente optice cu aperturi largi, unidimensionale (fante) și bidimensionale (circulare, dreptunghiulare), în vederea determinării suprafețelor și liniilor de localizare;

5) fotografierea grupurilor de franje și măsurarea parametrilor lor;

6) construirea unui model al modificării studiate a corpului;

7) verificarea acestui model al modificării obiectului prin repetarea hologramei, dacă este posibil, cu introducerea unor modificări controlate (rotații normale în jurul uneia sau a două axe, translații etc.), și introducerea corecțiilor necesare;

8) reprezentarea grafică, tabelată sau prin funcții, a modificărilor obținute.

Primită la redacție la 5 ianuarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Powel, K. A. Stetson *Interferometric vibration analysis by wavefront reconstruction*, J. Opt. Sc. Am., **55**, 1593—1598 (1965).
2. K. A. Stetson, R. L. Powell, *Hologram interferometry*, J. Opt. Soc. Am., **56**, 1161—1166 (1966).
3. I. Cucurezeanu, P. Suciu, R. Chișleag, *Studiul holografic al deformării unor piese mecanice*, Sub tipar (1977).
4. N. Abramson, *The Holo-diagram. IV. A practical device for simulating fringe patterns in hologram interferometry*, Appl. Opt. **10**, 2155—2161 (1971) și lucrările anterioare citate aici.
5. Ch. Viénot, Cl. Froehly, J. Monneret, J. Pasteur, *Hologram interferometry. Surface displacement fringe analysis as an approach to the study of mechanical strains and other applications to the determination of anisotropy in transparent objects.* The Engineering Uses of Holography, sub redacția E. Robertson, J. Harvey, Cambridge University Press (1970).
6. K. Stetson, *Fringe interpretation for hologram interferometry of rigid body motions*, J. Opt. Soc. Am., **64**, 1—10 (1974).
7. G.M. Brown, R. M. Grant, G. W. Stroke, *Theory of holografic interferometry*, J. Acoust. Soc. Am., **44**, 1166 (1969).
8. J. Surget, *Banque pour l'interferometrie holographique*, Comunicare prezentată la cel de al 9-lea Colocviu internațional de control industrial, Paris, 27 nov.—3 dec. 1971.

NOTE

GRINZI RETICULATE DIN BETON ARMAT ŞI PRECOMPRIMAT*)

de A. IONESCU, AL. CĂTĂRIG

Institutul politehnic Cluj-Napoca

Lucrarea prezintă o metodă de calcul exactă a grinzilor plane reticulate din beton armat şi beton precomprimat.

1. GENERALITĂŢI

Prin grinzi plane reticulate înţelegem grinzile plane alcătuite din bare legate reciproc în noduri rigide, de tipul grinzilor cu zăbrele şi al grinzilor cadru, avînd topologie oarecare.

Metodele de calcul cunoscute pentru aceste tipuri de structuri conţin o serie de simplificări care se referă în principal la următoarele :

— nu se ţine seama de rigidităţile reale ale nodurilor, barele considerîndu-se cu secţiuni constante şi cu lungimi de interax noduri,

— nu se face diferenţiere între rigidităţile barelor întinse şi comprimate.

Metoda de calcul elaborată acoperă comportarea mecanică reală a acestor structuri prin aceea că ţine seama de rigidităţile reale ale barelor şi nodurilor la diferite tipuri de solicitări.

Calculele se efectuează în două etape principale : predimensionarea şi determinarea stărilor de eforturi şi deformaţii în structură.

2. PREDIMENSIONAREA

Se efectuează cu metodele cunoscute ale mecanicii construcţiilor urmărind rezolvarea următoarelor aspecte :

— conformarea structurală a grinzii reticulate,

— determinarea elementelor geometrice ale barelor,

— precizarea barelor întinse şi comprimate,

— determinarea secţiunilor de armătură şi a fasciculelor de precomprimare iniţiale.

---

*) Lucrarea prezentată la cea de-a IV-a Conferinţă Naţională de mecanică, Bucureşti, 18 — 20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 1, 1977, P. 151—153

În urma etapei de predimensionare rezultă, de exemplu, o grindă plană reticulată ilustrată în figura 1.

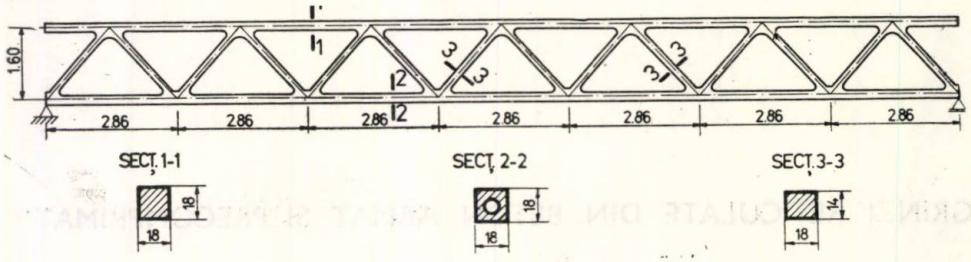


Fig. 1

3. DETERMINAREA STĂRILOR DE EFORTURI ȘI DEFORMAȚII ÎN STRUCTURĂ

Calculele se conduc prin metoda deplasărilor în formulare matriceală.

3.1. *Schema statică.* Pentru grinda reticulată din figura 1 se adoptă schema de calcul conform figurii 2, din care rezultă că structura este alcătuită din bare (fig. 3) legate reciproc în noduri rigide. Porțiunile îngroșate reprezintă zone cu rigiditate infinită la încovoiere. Formularea matematică a calculelor impune determinarea matricelor de rigiditate ale tuturor barelor. Matricea de rigiditate R (6×6) a unei bare cuprinsă între două noduri are forma

$$R = \left|\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array}\right|. \tag{1}$$

Se demonstrează că pentru a determina matricea R este suficientă cunoașterea submatricei $R_{11}(3 \times 3)$. Aceasta are forma

$$R_{11} = \left|\begin{array}{c|c|c} r_{11} & 0 & -\dfrac{r_{11}+r_{12}}{l} \\ \hline & r_{ax} & \\ \hline -\dfrac{r_{11}+r_{12}}{l} & & \dfrac{r_{11}+2r_{12}+r_{22}}{l^2} \end{array}\right| \tag{2}$$

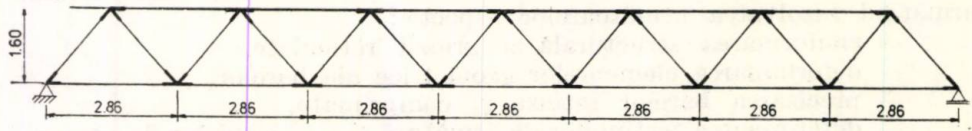


Fig. 2

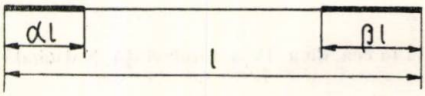


Fig. 3

Pentru tipul de bară din figura 3, coeficienţii din submatricea R_{11} au expresiile :

$$r_{11} = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{\alpha^2 + \alpha(1-\beta) + (1-\beta)^2}{(1-\alpha-\beta)^3}, \tag{3}$$

$$r_{22} = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{\beta^2 + \beta(1-\alpha) + (1-\alpha)^2}{(1-\alpha-\beta)^3}, \tag{4}$$

$$r_{12} = \frac{6EI}{l} \cdot \frac{1+\alpha-\beta}{(1-\alpha-\beta)^3} - r_{11}, \tag{5}$$

$$r_{ax} = \frac{EA}{l}. \tag{6}$$

Introducerea în calcule a rigidităţilor reale ale barelor se realizează prin considerarea elementelor fizico-geometrice din expresiile (3), (4), (5) şi (6) astfel :

— pentru bare comprimate şi încovoiate ;
  E — modulul de elasticitate al betonului conform prescripţiilor,
  I — momentul de inerţie al întregii secţiuni de beton,
  A — aria întregii secţiuni de beton ;
— pentru bare întinse şi încovoiate :
  E — modulul de elasticitate al armăturii,
  I — momentul de inerţie al secţiunii armăturii,
  A — aria secţiunii de armătură.

3.2. *Încărcări.* Încărcările pot fi forţe generalizate conţinute în planul structurii, aplicate în noduri.

3.3. Calculul eforturilor şi deformaţiilor

Pentru determinarea stărilor de eforturi şi deformaţii s-a elaborat programul GRIRETA în limbaj FORTRAN, care se află în biblioteca de programe a Facultăţii de construcţii Cluj-Napoca.

Introducerea datelor necesită un număr minim de cartele şi se referă la : coordonatele nodurilor, caracteristicile fizico-geometrice ale barelor şi încărcări.

Rezultatele obţinute sînt :
— eforturile (M, N, T) de la extremităţile barelor
— deplasările nodurilor.

BIBLIOGRAFIE

1. M.N. Keshava Rao, *Computer analysis of grids, grillages and interconnected girder systems,* The Indian Concrete Journal, January, 1969.
2. Al. Gheorghiu, *Statica construcţiilor II,* Edit. tehnică, Bucureşti, 1965.
3. Al. Gheorghiu, *Concepţii moderne în calculul structurilor,* Edit. tehnică, Bucureşti, 1975.
4. F. Gobesz, Al. Cătărig, *Calculul matriceal şi utilizarea lui la formularea matematică a rezolvării structurilor alcătuite din bare,* editată de CDCAS, 1973.

RECENZII

H.H. KLEIN — Fräsen (Frezarea) Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New York, 1974, 96 p., 108 fig.

Lucrarea face parte din colecţia Fertigung und Betrieb. Fachbücher für Praxis und Studium. Band 1. (Producţia şi fabrica. Cărţi tehnice pentru practică şi studiu. Vol. 1) fiind reeditarea într-o formă nouă a lucrării cu acelaşi titlu din colecţia „Werkstattbücher" (cărţi pentru atelier).

În primul capitol se dau noţiuni elementare asupra procesului tehnologic de frezare, asupra diferitelor tipuri de scule folosite în acest scop, precum şi unele indicaţii privind frezarea filetului, a danturii roţilor dinţate şi — arborilor canelaţi.

Capitolul al 2-lea, se referă la parametrii tehnologici ai procesului de aşchiere, indicîndu-se vitezele de aşchiere şi de avans pentru diferite materiale prelucrate, funcţie de calitatea suprafeţei şi de natura oţelului de scule. Tot aici se dau indicaţii privind puterea necesară frezării.

În capitolul al 3-lea, se dau indicaţii şi tabele privind calculul timpului de lucru.

Capitolul al 4-lea, se referă la măsuri pentru reducerea timpului de frezare, printre care se indică folosirea dispozitivelor de prindere, folosirea opritorilor şi a maşinilor de frezat cu comandă numerică.

Ultimul capitol, al 5-lea dă, indicaţii în alegerea maşinilor de frezat, a sculelor şi a lichidelor de răcire-ungere.

Lucrarea prezintă în numeroase tabele şi grafice, datele necesare pentru realizarea în condiţii optime a operaţiilor de frezare. Expunerea este succintă şi foarte clară. Prezentarea grafică în condiţii foarte bune.

E. Botez

E.A. ARN — Group Technology — (Tehnologia de grup) — Springer-Verlag. Berlin — 1975, 164 p., 134 fig.

Tehnologia de grup este un concept al industriei constructoare de maşini, care a devenit interesantă pe plan mondial, datorită perspectivei de folosire a calculatoarelor în procesul de proiectare, planificare a prelucrării şi producţiei, şi ca urmare, a optimizării întregii fabricaţii.

Originalitatea tehnologiei de grup se bazează pe gruparea pieselor, în familii asemănătoare, ceea ce permite elaborarea şi utilizarea unor tehnologii identice pentru piese diferite.

Lucrarea reprezintă rezultatul unor studii şi experimentări, de lungă durată efectuate într-o importantă întreprindere din Elveţia luîndu-se în considerare, în acelaşi timp lucrările ştiinţifice efectuate în universităţile engleze şi germane.

Conţinutul lucrării este repartizat în 11 capitole.

După o introducere în care printre altele se defineşte termenul Group Tehnology, utilizat în continuare sub forma simbolică GT, în capitolul al doilea se prezintă formele de bază ale sistemului GT şi anume: GT — Centre; GT—Cell şi GT Flow Line.

Prima formă se referă la tehnologia de grup, aplicată unei singure maşini-unelte, a doua, unui grup, iar a treia formă, unei lini de maşini-unelte. Capitolul se încheie cu aspecele psihologice privind sistemul de producţie GT.

Capitolul al treilea, denumit Sisteme inginereşti în procesul de producţie, se referă la probleme inginereşti privind proiectarea, planificarea, manufacturarea şi asamblarea producţiei în condiţiile GT şi a folosirii programării maşinilor cu NC (comandă numerică).

Sistemele de clasificare şi codificare a pieselor, formează cel de-al patrulea capitol, sisteme bazate pe clasificarea VDM elaborată de T.H. Aachen.

În capitolul al 5-lea, se prezintă problemele privind investiţiile şi studiul planificării, în cazul producţiei după sistemul GT, ţinînd seama de cerinţe şi oferte, prin determinarea aşa numitelor tipuri reprezentative de spectre, ale produselor.

Capitolul al 6-lea se ocupă de clasificarea desenelor pieselor, în baza a trei criterii; piese standardizate, piese de utilizare curentă şi piese similare.

Cu studiul programării tehnologiei în condiţiile GT, se ocupă capitolul al 7-lea, luîndu-se în considerare şi aspectele folosirii calculatoarelor în acest proces.

Capitolul al 8-lea se referă la calculul timpului de lucru în cazul tehnologiei de grup, cu şi fără ajutorul computerului.

Controlul producţiei formează tematica capitolului al 9-lea, control bazat pe structura familiilor de piese.

Structura preţului de cost, funcţie de calitatea şi cantitatea produselor, în producţia GT, este analizată în penultimul capitol al lucrării.

Concluziile autorului sînt formulate în ultimul capitol, care se încheie şi cu un număr de 56 referinţe bibliografice.

Lucrarea reprezintă o sinteză a metodologiei tehnologiei de grup, iniţiată de S. Mitrofanow (U.R.S.S.) şi dezvoltată în special de şcoala de la Aachen. Prin însăşi tematica sa, lucrarea este sistematizată şi prezentată succint, dar cu numeroase exemplificări.

E. Botez

H.H. KLEIN — Bohren und Aufbohren (Găurirea şi alezarea) Springer-Verlag. Berlin 1975, 133 p., 163 fig.

Lucrarea face parte din colecţia Fertigung und Betrieb. Fachbucher für Paxis und studium Band 7 (Producţia şi fabrica. Cărţi tehnice pentru practică şi studiu) fiind o reeditare într-o nouă formă a lucrării cu acelaşi titlu din fosta colecţie „Werkstattbucher" (cărţi pentru atelier).

În primul capitol se prezintă modurile de prelucrare a găurilor (prin procesul de aşchiere): găurirea, alezarea, zencuirea, găurirea adîncă etc., sculele folosite în aceste scopuri, precum şi diferitele dispozitive şi maşini-unelte care pot fi utilizate pentru obţinerea preciziei şi calităţii suprafeţelor prelucrate.

Capitolul al doilea se referă la procesul de aşchiere (pentru găurire) punînd la dispoziţia cititorului date privind: prelucrabilitatea unor materiale, viteze de aşchiere, avansuri, forţe de aşchiere, puterea consumată, lichidele de ungere şi răcire etc. precum şi unele indicaţii privind programarea numerică a maşinilor de găurit.

Ultimul capitol este rezervat calculului timpului de lucru, după metodologia REFA.

Lucrarea conţine tabele şi grafice necesare pentru stabilirea condiţiilor optime ale procesului de găurire şi alezare. Expunerea este succintă şi corespunzătoare cititorilor cărora este adresată lucrarea.

E. Botez

Ken'iti Kido (ed), Proceedings of the 1975 International Conference on Noise Control Engineering, "Inter-Noise 75", (Lucrările Conferinţei Internaţionale — 1975 — de Combatere a Zgomotului), Sasaki Publishing and Printing Co., Sendai, 1975, XXVI + 760 p., $28.

Volumul conţine lucrările prezentate în cadrul Conferinţei Internaţionale de Combatere a Zgomotului, care a avut loc la Sendai (Japonia), între 27 şi 29 august 1975. Această ediţie, organizată de Societatea de Acustică din Japonia (A.S.J.) în cooperare cu Institutul de Combatere a Zgomotului din S.U.A. (INCE) se înscrie în şirul de prestigioase manifestări internaţionale anuale care a debutat în 1972. Conferinţa a urmărit în mod deosebit prezentarea nivelului

la zi al modului de abordare și soluționare al unor aspecte esențiale privind metodele practice de combatere a poluării sonore și de vibrații, precum și eficiența unor programe naționale elaborate în acest sens.

În cadrul conferinței au fost prezentate 146 de comunicări, dintre care mai bine de jumătate reprezintă contribuția cercetătorilor din Japonia. Lucrările au fost grupate în 12 secțiuni specializate, după cum urmează: 1 — Zgomotul generat de transportul de suprafață; II — Zgomotul aparatelor de zbor; III — Combaterea zgomotului industrial; IV — Combaterea zgomotului mașinilor, V — Combaterea zgomotului în clădiri; VI — Zgomotul în comunități și evaluarea sa, VII — Combaterea poluării de vibrații; VIII — Standarde și dispoziții privind zgomotul și vibrațiile; IX — Metodologia și aparatura folosite la măsurările de zgomot și vibrații; X — Propagări; XI — Conducte și atenuatoare; XII — Complemente.

Făcîndu-se de la bun început ecoul atenției ce se acordă zgomotului de suprafață, un număr de 19 lucrări abordează într-o primă secțiune aspecte semnificative din acest domeniu. Astfel, sînt prezentate atît materiale generale împărtășind experiența dobîndită în acest sens în Japonia și S.U.A. precum și lucrări vizînd aspecte particulare cum ar fi efectul amplasării clădirilor asupra zgomotului urban, propagarea zgomotului în cazul unor căi de circulație obișnuite sau suspendate, acoperite parțial sau complet, probleme privind zgomotul structural generat de metrou, zgomotul provocat de neuniformitățile drumului, de interacțiunea roată-șină. De asemenea, sînt expuse soluții interesante de îmbunătățire a unor metode clasice de izolare în cazul transportului pe calea ferată. În sfîrșit, trebuie menționate lucrările în care este prezentată metoda de simulare în cazul zgomotului de trafic rutier atît în marile aglomerări urbane, cît și pe șosele sau pe calea ferată precum și studiile în care este prezentată reacția colectivității la zgomotul de suprafață.

Zgomotul aparatelor de zbor este analizat în 9 comunicări care se ocupă atît de considerentele generale legate de soluționarea pe plan național a acestei chestiuni în R.F.G., Japonia și S.U.A., cît și de soluțiile preconizate în vederea prezicerii expunerii la zgomotul în jurul aeroporturilor, atenuării zgomotului la decolare și reducerii zgomotului în colectivitățile urbane prin scăderea ponderii componentei provenite din zgomotul traficului aerian.

Zgomotul industrial reprezintă, evident, unul din factorii cu implicații dintre cele mai serioase datorită consecințelor sale negative, fapt subliniat de atenția cu care sînt studiate, pe parcursul a 17 lucrări, diferite posibilități de a fi redus. Spectrul problemelor abordate cuprinde, printre altele, prezentarea unei experiențe de reducere a nivelului de zgomot în interiorul halelor industriale (Polonia), rezultatele obținute în industria textilă (S.U.A.)și în stațiile de transformatoare de mare putere (Japonia), probleme specifice de reducere a nivelului de zgomot și vibrații la termocentrale și rafinării. În același timp se impun atenției și lucrările referitoare la modalitățile de evaluare a zgomotului încă din faza de proiectare și la posibilitățile de intervenție în cazul unor unități industriale ce urmează a fi implantate în aglomerările urbane. În sfîrșit, pot fi găsite informații utile privind efectul asupra auzului și stării normale a oamenilor a diferitelor tipuri de surse industriale de zgomot mai puțin studiate de obicei.

În cadrul secțiunii consacrate combaterii zgomotului mașinilor sînt incluse 15 lucrări. Se insistă îndeosebi asupra metodelor de evaluare și reducere a nivelului de zgomot la motoarele diesel: sînt expuse modele teoretice, noi concepții de proiectare, efectul parametrilor funcționali, al metodelor experimentale și generarea de infrasunete. Un interes aparte îl prezintă și expunerea modului de utilizare al structurilor fonoabsorbante pentru motoarele turboreactoare ca și prezentarea posibilităților de reducere a zgomotului în unele sisteme hidraulice, a zgomotului în cazul frecării uscate, la presele de perforat și la ciocanele pneumatice.

Un număr de 13 comunicări se referă la combaterea zgomotului în clădiri. După prezentarea, în cadrul unui studiu de sinteză a principalelor aspecte legate de zgomotul structural, alte lucrări se referă la chestiuni importante privind zgomotul structural generat de metrou în clădirile învecinate și la folosirea cu deosebit succes a materialelor cu comportare viscoelastică în reducerea solicitărilor acestora. Rezultatele cercetărilor privind calculul unor structuri amortizante de tip sandwich cu secțiuni transversale complexe, reducerea vibrațiilor diferitelor tipuri de conducte și la lifturile din construcțiile înalte, realizarea unor locuințe cu izolare fonică remarcabilă, destinate zonelor cu nivel ridicat de zgomot sînt extrem de interesante atît datorită eficienței lor, cît și modului explicit de prezentare.

Zgomotul în comunități, evaluarea și reducerea sa sînt studiate de numeroase lucrări — 16 la număr — atît din punctul de vedere al inconfortului provocat de zgomotul generat de traficul rutier, al efectului nociv al zgomotului discontinuu în unele sectoare industriale ca și al impulsurilor sonore în general. De asemenea, sînt expuse soluțiile preconizate în cadrul unor programe naționale în Anglia, Canada, Japonia și S.U.A. în vederea asigurării unor condiții normale de expunere la zgomot. În sfîrșit, mai pot fi menționate și lucrările referitoare la perfec-

ţionarea metodelor de măsură a zgomotului în comunităţi, estimarea efectelor fiziologice ale zgomotului aparatelor de zbor pe un aeroport şi elaborarea unor noi prevederi în privinţa reglementării poluării sonore în S.U.A.

Problemelor speciale legate de combaterea poluării de vibraţii le sînt consacrate 11 lucrări. Sînt prezentate rezultate interesante privind zgomotul şi vibraţiile în domeniul infra precum şi efectele fiziologice ale infrasunetelor, caracteristicile vibraţiilor şoselelor datorită diferitelor tipuri de autovehicule, vibraţiile clădirilor datorită metroului, parametrii de estimare în proiectarea preliminară şi folosirea unor materiale noi cu proprietăţi viscoelastice în reducerea nivelului de vibraţii. În plius, un număr de lucrări se ocupă de noi tipuri de dispozitive de măsură a nivelului de vibraţii elaborate în Japonia, creşterea preciziei rezultatelor oferite de accelerometre şi elaborarea unor reglementări raţionale privind nivelele de vibraţii.

Secţiunea consacrată standardelor şi dispoziţiilor legislative privind zgomotul şi vibraţiile cuprinde 5 lucrări în care sînt expuse rezultate interesante obţinute în acest domeniu în Canada, Israel, Japonia şi S.U.A.

Un număr de 11 lucrări sînt incluse în secţiunea privind metodologia şi aparatura folosită la măsurătorile de zgomot şi vibraţii. Sînt prezentate metodologii cu un grad sporit de precizie în legătură cu utilizarea camerei de reverberaţie pentru zgomotul de bandă îngustă, un sistem de detectare a poziţiei surselor de frecvenţe joase, verificarea sonometrelor pe baza unei noi metode japoneze, precum şi studii asupra proprietăţilor dispozitivelor de înregistrare grafică a nivelului de zgomot, un instrument de înregistrare şi prelucrare automată a nivelului de zgomot, un sonometru folosind metoda corelaţiei, un tip special de microfon destinat măsurărilor de zgomot, folosind elemente semiconductoare sensibile la deformaţii şi în sfîrşit, asupra posibilităţilor de implementare a unui sistem de afişare a spectrelor de benzi la analizorul digital de zgomot.

Importanţa atribuită cunoaşterii aspectelor caracteristice fenomenelor de propagare este reflectată şi de interesantul material cuprins în cele 11 comunicări prezentate în cadrul secţiunii cu acelaşi nume. Pot fi găsite o expunere sistematică a problemelor puse în general de utilizarea barierelor acustice, prezentarea de diferite tipuri de bariere şi eficacitatea lor în unele cazuri speciale, modelarea acustică în studierea problemelor de reducere a zgomotului din exterior şi a unor experienţe pe modele la scară pentru diferite configuraţii ale surselor de zgomot. Alte lucrări se referă la reducerea nivelului de zgomot folosind surse suplimentare, măsurarea fluctuaţiilor de zgomot cauzate de condiţiile atmosferice la combinatele siderurgice, măsurări de cîmp pentru propagarea zgomotului folosind o metodă de corelaţie şi în sfîrşit, rezultatele obţinute în realizarea unui microfon sensibil, special destinat studiilor în zone cu nivel ridicat de zgomot, respectiv a unui microfon utilizat pentru detectarea oscilaţiilor sonore în urechea umană.

Aspecte semnificative ridicate de problema reducerii zgomotului generat de circulaţia fluidelor în diferite tipuri de conducte sînt expuse într-o secţiune specială, cuprinzînd zece lucrări. Problematica cuprinde atît studii ale performanţelor atenuatoarelor exhaustoarelor, caracteristicilor acustice ale zonelor de intrare şi evacuare de la sistemele de ventilaţie şi condiţionare a aerului, posibilităţilor de reducere eficientă a zgomotului unor dispozitive pneumatice, la turbinele cu gaz cît şi date utile referitoare la caracteristicile de atenuare ale conductelor liniare şi folosirea unor materiale speciale pentru izolarea fonică a pereţilor conductelor. Alte lucrări furnizează date noi asupra atenuatoarelor de infrasunete şi generării zgomotului de corpurile cu profile ascuţite la viteze reduse.

În încheierea volumului sînt prezentate nouă comunicări asupra unor probleme exprimînd opiniile unor foruri naţionale de decizie privind locul actual şi viitor al chestiunilor privind zgomotul şi vibraţiile în legislaţia de protecţie a mediului înconjurător. Lucrările cuprind exemplificări privind aspecte generale şi speciale referitoare la traficul aerian (S.U.A.), legislaţia corespunzătoare din Anglia, Danemarca, R.F.G., Japonia şi U.R.S.S., cu referiri directe şi la unele neajunsuri şi posibilităţi de reevaluare.

Atenţia şi competenţa cu care sînt analizate numeroasele şi complexele probleme legate de reducerea nivelelor de zgomot şi vibraţii, de sporirea calităţii mediului înconjurător, diferitele unghiuri de abordare justifică pe deplin interesul deosebit, în continuă creştere, cu care sînt aşteptate manifestările de acest tip. Un motiv în plus ca materialele din acest volum să răspundă interesului şi exigenţelor unui mare număr de specialişti.

H. Paven

I. PEREPECHKO, Acoustic Methods of Investigating Polymers (Metode acustice de cercetare a polimerilor). Mir Publ., Moscova, 1975, 312 p., 87 fig.

Monografia de față — constituind o versiune îmbunătățită a primei ediții apărute în limba rusă, sub același titlu, în anul 1973 — este consacrată descrierii metodelor acustice de cercetare utilizate pentru studierea mecanismelor legate de procesele de relaxare și a structurii fizico-chimice ale polimerilor.

În mod firesc primele două capitole sînt consacrate expunerii noțiunilor fundamentale privind proprietățile acustice ale polimerilor precum și teoriei fenomenologice a relaxării parametrilor acustici corespunzători. Astfel, pot fi găsite prezentări interesante asupra dependenței tensiune-deformație, a vitezei de propagare și coeficientului de absorbție al undelor mecanice în polimeri precum și informații privind relațiile existente între parametrii acustici, structura fizico-chimică și diferitele stări ale polimerilor. De asemenea, se insistă asupra unor tipuri de comportare viscoelastică (Kelvin — Voigt, Maxwell, Zener) în cazul propagării undelor longitudinale, respectiv transversale și, în sfîrșit, asupra dependenței de temperatură și frecvență a proprietăților acustice făcîndu-se referiri la diferitele mecanisme implicate la scară moleculară.

Capitolele al III-lea și al IV-lea cuprind, mai întîi, descrierea sistematică a metodelor de studiu experimental a proprietăților acustice, expunîndu-se comparativ avantajele și dezavantajele diferitelor metode de lucru. Un aspect remarcabil îl constituie prezentarea posibilităților de perfecționare și automatizare a lanțului de măsură. În continuare, sînt analizate amănunțit dependența de temperatură a diferiților parametri caracteristici, mobilitatea moleculară și particularitățile proceselor de relaxare la polimerii amorfi.

Pe parcursul următoarelor patru capitole, autorul examinează comportarea viscoelastică și proprietățile acustice în cazul unor situații tipice— polimeri cu plastifianți, polimeri cristalini, polimeri orientați și, în sfîrșit, polimeri cu structură spațială. Sînt avute în vedere atît chestiuni legate de mecanismele la scară moleculară, cît și dependența proprietăților acustice de anumite caracteristici fizico-chimice, cu exemplificări concrete.

Ultimul capitol — al IX-lea — vizează corelațiile existente între proprietățile acustice și alte proprietăți fizice ale polimerilor. Este remarcată asemănarea cu relaxarea dielectrică, legătura cu proprietățile termice și cele de rezistență mecanică. În acest mod autorul pune la îndemîna celor interesați și unele aspecte interesante legate de utilizarea unor astfel de materiale în structurile destinate funcționării într-un larg domeniu de solicitări, frecvențe și temperaturi.

Lucrarea conține cîte un index alfabetic pe autori și noțiuni, precum și o bibliografie consistentă, conținînd peste 400 de titluri.

Maniera în care autorul se ocupă de subiectul propus, bogata cantitate de informație conținută, fac această monografie să fie utilă unui larg cerc de interesați atît în domeniile vizînd aspecte fundamentale ale problematicii expuse cît și din cele vizînd reducerea nivelului de zgomot și vibrații în cazul diferitelor tipuri de structuri mecanice.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 36, nr. 2 martie-aprilie 1977

SUMAR

STUDII

E. CARAFOLI, C. BERBENTE, P. MARINESCU, Curgeri supersonice în jurul conului circular cu sau fără suflu prin suprafaţă 163
TEODOR HUIDU, Asupra unui model matematic şi experimental al fotoviscoelasticităţii liniare 181
I. CONSTANTINESCU, T. TACU, Algoritm şi limbaj pentru calculul tensiunilor în structuri izotrope, axial simetrice 193
GH. IORDACHE, Asupra presiunii în maşinile de extrudere cu disc, tip con-placă 205
AUREL P. STOICESCU, Contribuţii privind metodele de înlăturare a tangajului automobilului la demarare sau frînare 213
I. MINOIU, N. POSEA, N. ANTONESCU, N. TATU, Contribuţii la cercetarea la oboseală a lanţurilor de transmisie simple şi multiple, avînd zalele executate cu asamblări cu strîngere elastică 229
CSABA GYENGE, Studiul tehnologiei prelucrării suprafeţelor elicoidale cu ajutorul versorilor triedrului lui Frenet 245
TRAIAN GLIGOR, IVAN ORGOVICI, Studiul nivelului vibraţiilor laterale ale locomotivei Diesel-electrice 060-DA 253
A. PAVEL, Parametrii funcţionării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcţie de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. II 263
PETRE DODOC, Contribuţii la calculul dispozitivelor pentru iluminarea critică la microscoape 277

NOTE

V. I. VLAD, Anemometrie cu laser 291

RECENZII 297

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

CURGERI SUPERSONICE ÎN JURUL CONULUI CIRCULAR CU SAU FĂRĂ SUFLU PRIN SUPRAFAȚĂ

de E. CARAFOLI, C. BERBENTE, P. MARINESCU
Institutul politehnic București

În lucrarea de față este studiată curgerea în jurul conului circular drept cu sau fără suflaj în prezența unui curent supersonic paralel cu direcția axei de simetrie. La început se consideră cazul conului circular solid pentru care se găsește o soluție aproape exactă a ecuației de mișcare. Se obțin astfel formule de calcul simple pentru determinarea unghiului undei de șoc, a cîmpului de viteze și de presiuni. Rezultatele obținute concordă foarte bine cu cele date de alți autori, utilizînd metode numerice și cu datele experimentale. Acest fapt a permis extinderea metodei la cazul curgerii în jurul conului permeabil poros cu sucțiune sau injecție normale pe suprafață.
Rezultatele obținute au o aplicabilitate directă la calculul fuselajului avioanelor supersonice și a rachetelor, sau la protecția termică a vîrfului aeronavelor prin injectarea unui lichid sau gaz. De asemenea, utilizarea sucțiunii efectuate prin perete reduce intensitatea undelor de șoc pe anumite perioade ale zborului, înlăturînd o serie de efecte nocive ale acestora.

1. MIȘCAREA ÎN JURUL CONULUI SOLID FĂRĂ SUFLU

Să considerăm un con circular așezat într-un curent supersonic de viteză U_∞ (fig. 1).

Notînd cu $V(\theta)$ componenta vitezei după raza vectoare, vom scrie

$$V_R = V(\theta) = V,$$

$$V_\theta = \frac{dV}{d\theta} = V', \qquad (1)$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = V''.$$

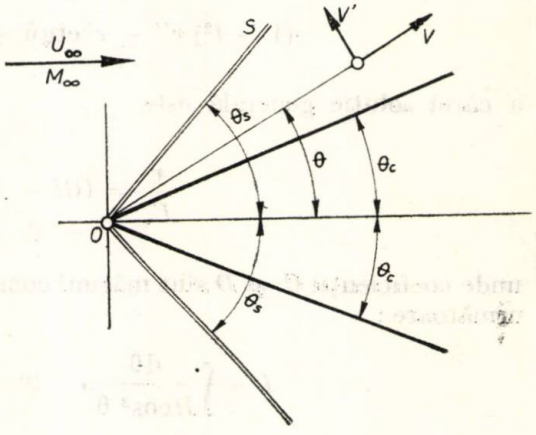


Fig. 1

Mișcarea fiind conică, cîmpul de viteze este dat de ecuația Taylor-Maccoll,

$$\left(1 - \frac{V'^2}{a^2}\right)V'' + V'\operatorname{ctg}\theta + \left(2 - \frac{V'^2}{a^2}\right)V = 0, \qquad (2)$$

în care a reprezintă viteza locală a sunetului, dată de relaţia

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(U_\infty^2 - V^2 - V'^2), \tag{3}$$

iar γ raportul căldurilor specifice ($\gamma = 1{,}4$ pentru aer).

Introducînd viteza de perturbaţie v, dată de relaţia

$$v = V = U_\infty \cos\theta, \; (v' = V' + U_\infty \sin\theta, \quad v'' = V'' + U_\infty \cos\theta) \tag{4}$$

ecuaţia (2) devine

$$\left(1 - \frac{V'^2}{a^2}\right) v'' + v' \operatorname{ctg}\theta + \left(2 - \frac{V'^2}{a^2}\right) v = 0. \tag{5}$$

Rezolvarea ecuaţiilor (2) sau (5) nefiind simplă, ne propunem să le liniarizăm prin înlocuirea termenului neliniar V'^2/a^2 cu o funcţie $t^2(\theta)$,

$$\frac{V'^2}{a^2} \approx t^2, \tag{6}$$

convenabil aleasă, astfel încît soluţia care rezultă să aibă o formă cît mai simplă şi să conducă, în acelaşi timp, la rezultate cît mai exacte.

Prin urmare, în locul ecuaţiei (5) vom rezolva ecuaţia

$$(1 - t^2)\, v'' + v' \operatorname{ctg}\theta + (2 - t^2) v = 0, \tag{7}$$

a cărei soluţie generală este

$$\frac{v}{U_\infty} = (CI + D) \cos\theta, \tag{8}$$

unde coeficienţii C şi D sînt mărimi constante, iar I rezultă din integralele următoare :

$$I = \int \frac{d\theta}{H \cos^2\theta}, \quad \ln H = \int \frac{\operatorname{ctg}\theta \, d\theta}{1 - t^2}. \tag{9}$$

Din ecuaţia (8) se deduce imediat :

$$\frac{v'}{U_\infty} = \frac{C}{H \cos\theta} - \frac{v}{U_\infty} \operatorname{tg}\theta. \tag{10}$$

Pentru a determina constantele C și D, vom utiliza condițiile la limită pe con ($\theta = \theta_c$) și pe unda de șoc ($\theta = \theta_s$). Deoarece viteza normală la suprafața conului este nulă, vom avea

$$\theta = \theta_c, \quad V_c' = v_c' - U_\infty \sin\theta_c = 0. \tag{11}$$

Din ecuațiile de conservare a masei și impulsului rezultă relațiile

$$\theta = \theta_s, \quad v_s = 0, \tag{12a}$$

$$\theta = \theta_s, \quad v_s' = U_\infty(1 - k)\left(1 - \frac{1}{K_s^2}\right), \tag{12b}$$

unde

$$k = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \qquad K_s = M_\infty \sin\theta_s. \tag{13}$$

Aplicînd condițiile (11), (12a) și (12b) se deduce succesiv :

$$\frac{C}{H_c \cos\theta_c} - (CI_c + D)\sin\theta_c = \sin\theta_c, \tag{14a}$$

$$CI_s + D = 0, \tag{14b}$$

$$\frac{C}{H_s \cos\theta_s} - (CI_s + D)\sin\theta_s = (1 - k)\left(1 - \frac{1}{K_s^2}\right)\sin\theta_s. \tag{14c}$$

Mai departe se obțin :

$$\frac{v}{U_\infty} = C(I - I_s)\cos\theta \quad (D = -CI_s), \tag{15a}$$

$$C = \frac{H_c \sin\theta_c \cos\theta_c}{1 + H_c(I_s - I_c)\sin\theta_c \cos\theta_c}, \tag{15b}$$

$$\sin^2\theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{C\,\mathrm{tg}\,\theta_s}{(1 - k)\,H_s}, \tag{15c}$$

$$\frac{v'}{U_\infty} = C\left(\frac{1}{H_c \cos\theta} - (I - I_s)\sin\theta\right), \tag{16}$$

unde H_c, H_s, I_c, I_s reprezintă valorile lui H și I pentru $\theta = \theta_c$ și $\theta = \theta_s$.

Pentru determinarea funcției t^2, vom observa că (fig. 2) funcția V^{12}/a^2, ca și prima ei derivată, se anulează la $\theta = \theta_c$, iar curgerea după unda de șoc are componenta normală subsonică. În cazul în care mișcarea ar fi chiar incompresibilă, vom avea $t^2 = 0$, și din ecuația (9) se obține

$$H_0 = \sin\theta, \quad I_0 = \frac{1}{\cos\theta} + \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \tag{17}$$

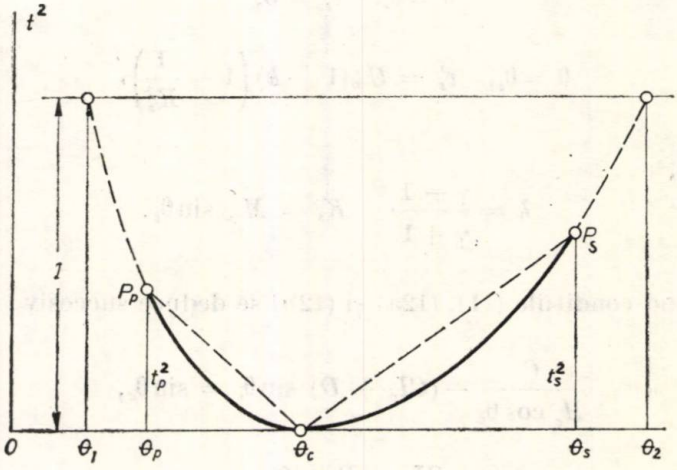


Fig. 2

Se remarcă faptul că relația (17) furnizează rezultate apropiate de cele reale, ceea ce ne permite să alegem o expresie simplă pentru t^2, de forma

$$t^2 = b(x-1), \quad x = \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

unde

$$b = \frac{t_s^2}{x_s - 1}, \quad t_s^2 = \frac{V_s'^2}{a_s^2} = \frac{kK_s^2 + 1 - k}{(1+k)K_s^2 - k}, \tag{19}$$

valoarea lui t_s^2 fiind determinată pe baza condițiilor la limita (12a) și (12b).

Expresia (18), așa cum rezultă din aplicații, furnizează valori aproape exacte și conduce la expresii aplicabile practic. Aceste expresii sînt simple, fiind construite sub forma unor corecții aduse soluției incompresibile (17).

Introducînd expresia (18) în (9), rezultă

$$\ln H = \int \frac{\operatorname{ctg} \mathrm{d}\theta}{1 - t^2} = \frac{1}{n} \int \frac{\mathrm{d}x}{x[1 - b(x-1)]}. \tag{20}$$

Integrala (20) se efectuează imediat și rezultă expresia :

$$\frac{1}{H} = \frac{(1-\sigma x)^{\nu}}{(\sin\theta)^{n\nu}} = \frac{(\sin\theta)^{\sigma}(1-\sigma x)^{\nu}}{\sin\theta}, \tag{21}$$

în care s-a renunțat la unele constante care pot fi incluse în constanta generală C și s-a notat

$$\sigma = \frac{b}{1+b}, \quad n\nu = 1-\sigma, \quad \sigma x < 1. \tag{22}$$

Pentru calculul integralei I vom observa că expresia (21) poate fi dezvoltată sub forma

$$\frac{1}{H} = \frac{[1-(1-\sin\theta)]^{\sigma}(1-\sigma x)^{\nu}}{\sin\theta} = \frac{[1-\delta_{\sigma}(1-\sin\theta)]\,(1-\delta_{\nu}\sigma x)}{\sin\theta} \approx$$

$$\approx \frac{1-\delta_{\sigma}}{\sin\theta} + \delta_{\sigma} - \frac{\sigma\delta_{\nu}(1-\delta_{\sigma})}{\sin^{n}\theta_{c}}\sin^{n-1}\theta - \frac{\sigma\delta_{\nu}\delta_{\sigma}}{\sin^{n}\theta_{c}}\varepsilon\sin^{n}\theta, \tag{23}$$

unde δ_{σ} și δ_{ν} sînt constante convenabil alese pentru a reprezenta cît mai bine dezvoltarea celor două binoame ale expresiei (23). Se observă că pentru $\delta_{\sigma} = \delta_{\nu} = 0$ se obține expresia (17) a lui H_0. Prin urmare δ_{σ} și δ_{ν} reprezintă termeni corectivi față de integralele de bază H_0 și I_0.De aceea se poate pune funcția H sub o formă și mai simplă, reținînd numai termenii importanți din (23) și anume termenul în $1/\sin\theta$ și termenul în $\sin^{n-1}\theta$ care are un coeficient mai mare față de ultimul termen. Prin urmare vom scrie

$$\frac{1}{H} = \frac{1-\delta}{\sin\theta} + \varepsilon\sin^{n-1}\theta, \tag{24}$$

unde coeficienții δ și ε se determină din condiția ca funcția (24) să treacă prin punctele $\theta = \theta_c$ și $\theta = \theta_s$, unde valorile lui H în aceste puncte sînt date de (21) :

$$\frac{1}{H_c} = \left(\frac{1-\sigma}{\sin^{n}\theta_c}\right)^{\nu}, \qquad \frac{1}{H_s} = \left(\frac{1-\sigma x_s}{\sin^{n}\theta_s}\right)^{\nu}. \tag{25}$$

Din condițiile la $\theta = \theta_c$ și $\theta = \theta_s$ rezultă

$$\frac{1}{H_c} = \frac{1-\delta}{\sin\theta_c} + \varepsilon\sin^{n-1}\theta_c, \qquad \frac{1}{H_s} = \frac{1-\delta}{\sin\theta_s} + \varepsilon\sin^{n-1}\theta_s. \tag{26}$$

și prin urmare se obține

$$1-\delta = \frac{H_s x_s \sin\theta_c - H_c\sin\theta_s}{H_c H_s(x_s-1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{H_c\sin^{n-1}\theta_c} - \frac{1-\delta}{\sin^{n}\theta_c}. \tag{27}$$

Subliniem faptul că expresia (24) o folosim numai pentru calculul integralei I, singurul loc unde este necesară și că abaterile sînt și mai reduse, ca urmare a integrării.

Cu ajutorul expresiei (24) obținute pentru $1/H$ integrala (9) poate fi efectuată cu ușurință obținîndu-se

$$I = (1-\delta)\, I_0 + \varepsilon \int \frac{\sin^{n-1}\theta \mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}. \tag{28}$$

După cum se vede, termenul de bază al integralei I este I_0, ceilalți constituind termeni corectivi, fapt care permite simplificarea calculelor. Astfel, toate expresiile de mai sus sînt ușor de manipulat și conduc la rezultate care, practic, corespund cu calculele numerice.

Verificările efectuate au arătat că cele mai bune rezultate valabile pe întregul regim de curgere în care unda de șoc rămîne atașată — inclusiv regimul transonic — corespunde la $n = 4$ și conduce la o expresie pentru I dedusă din (28) de forma

$$I = (1 - \delta)\, I_0 + \varepsilon\left(\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right). \tag{29}$$

Determinarea unghiului undei de șoc. Pentru determinarea unghiului θ_s al undei de șoc, vom aplica relația (15c), care conduce la expresia

$$\sin^2\theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{H_c \sin\theta_c \cos\theta_c \operatorname{tg}\theta_s}{(1-k) H_s [1 + H_c (I_s - I_c) \sin\theta_c \cos\theta_c]}. \tag{30}$$

Această ecuație poate fi rezolvată într-o manieră mai simplă sau mai complicată, spre exemplu numeric. Este mai ușor însă să folosim o metodă de iterații succesive, care conduc, chiar din a doua aproximație, la valoarea exactă. În acest scop vom căuta o expresie de plecare cît mai apropiată de valoarea reală utilizînd pentru H, în primă aproximație, expresia dată de (17), adică $H_c = \sin\theta_c$, $H_s = \sin\theta_s$. Vom scrie

$$\sin^2\theta_s^* \approx \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\sin^2\theta_c}{1-k} \frac{1}{1 + (I_{0s} - I_{0c}) \sin^2\theta_c \cos\theta_c} \cdot \frac{\cos\theta_c}{\cos\theta_s^*}. \tag{31}$$

Mai departe, observînd că ultimii doi factori din al doilea termen al membrului drept din ecuația (31) se compensează reciproc, tinzînd spre valoarea 1, vom scrie, în primă aproximație,

$$\sin^2\theta_s^* = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\sin^2\theta_c}{1-k}. \tag{32}$$

În ecuațiile de mai sus (31) și (32) a fost introdus indicele $(*)$ pentru a desemna valoarea de plecare a lui θ_s^*. După calculul lui θ_s^* din (32)

vom introduce această valoare în (15b) și (21) și vom recalcula valoarea lui θ_s din (15c) sub forma

$$\sin^2 \theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{C^* \operatorname{tg} \theta_s^*}{(1-k) H_s^*}. \tag{33}$$

Cu această valoare a lui θ_s, vom calcula din nou caracteristicile mișcării C, H, I.

Calculul presiunilor. După saltul de presiune prin unda de șoc (transformare însoțită de pierderi), gazul efectuează o compresiune isentropică, atingînd presiunea maximă la $\theta = \theta_c$.

Notînd cu p_s presiunea imediat după unda de șoc, avem

$$\frac{p_s}{p_\infty} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \sin^2 \theta_s - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = (1+k) K_s^2 - k = \lambda, \tag{34}$$

raport pe care l-am notat cu λ, pentru a simplifica scrierea formulelor care urmează.

Deoarece după unda de șoc transformările gazului sînt izentropice, raportul dintre presiunea p la un unghi curent θ și presiunea p_∞ poate fi scris sub forma

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{p}{p_s} \frac{p_s}{p_\infty} = \lambda \left(\frac{W^2 - V^2 - V'^2}{W^2 - V_s^2 - V_s'^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{35}$$

unde W reprezintă viteza maximă, dată de relația [7]

$$\frac{W^2}{U_\infty^2} = 1 + \frac{1-k}{k M_\infty^2}. \tag{36}$$

Din condițiile la limită (12a) și (12b) rezultă

$$\frac{W^2 - V_s^2 - V_s'^2}{U_\infty^2} = \frac{1-k}{M_\infty^2} \left(1 + \frac{1-k}{k K_s^2} \right) \lambda. \tag{37}$$

În acest fel, pentru presiunea la un unghi oarecare θ și pe suprafața conului solid ($\theta = \theta_c$, $V = V_c$, $V_c' = 0$) avem, respectiv,

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \lambda \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{V^2 + V'^2}{U_\infty^2} \right)}{\lambda \left(k + \frac{1-k}{K_s^2} \right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{38}$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \lambda \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \left(1 - \frac{V_c^2}{U_\infty^2} \right)}{\lambda \left(k + \frac{1-k}{K_s^2} \right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{39}$$

Cunoscînd raportul presiunilor, dat de relaţiile (35) sau (38), se poate calcula coeficientul de presiune C_p definit de relaţia

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right). \tag{40}$$

Verificări şi comparaţii. Comparaţiile s-au făcut pentru doi parametrii importanţi ai curgerii şi anume unghiul undei de şoc θ_s (ecuaţia 33) şi coeficientul de presiune pe corp C_{pc} (ecuaţiile 39 şi 40).

Din figurile 3 şi 4 se observă că rezultatele obţinute practic pentru θ_s şi C_{pc} coincid cu valorile obţinute prin integrarea numerică a ecuaţiei (2) [3], [4] pentru un interval larg de numere Mach ($M_\infty = 1{,}25 - 5{,}7$) şi deviaţii ($\theta_c = 10° - 50°$), acoperind întregul interval supersonic-hipersonic moderat.

Se constată că metoda este aplicabilă şi în cazurile cînd regimul de curgere este transonic, aşa cum se întîmplă, spre exemplu, la $M_\infty = 1{,}25$, $\theta_c = 20°$ sau la $M_\infty = 2$, $\theta_c = 40°$. În ultimul caz curgerea este foarte apropiată de punctul de detaşare a undei de şoc ($\theta_{detaş} = 41{,}5°$).

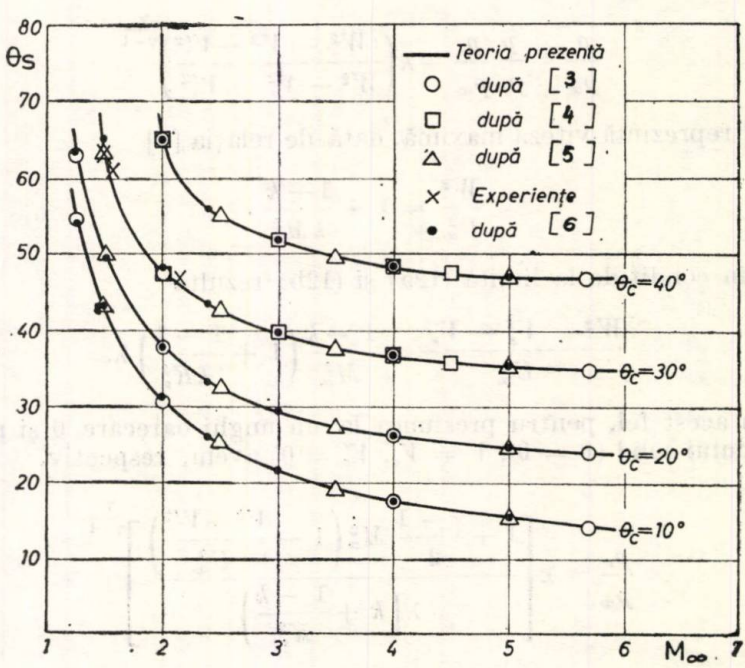


Fig. 3

Se poate observa deci o bună concordanţă a formulelor analitice cu rezultatele obţinute prin integrarea numerică, cît şi cu datele experimentale, ceea ce implică o foarte bună acurateţe a distribuţiei de viteze.

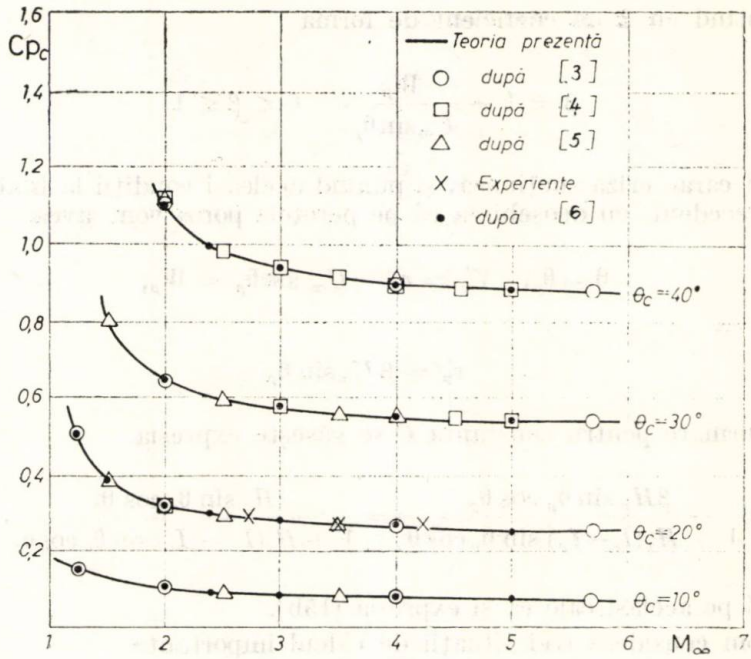


Fig. 4

2. CURGEREA ÎN JURUL CONULUI PERMEABIL POROS CU SUCCIUNE *)

Să presupunem că prin peretele conului, avînd semiunghiul la vîrf $\theta = \theta_p$ (fig. 5), se efectuează o sucțiune de viteză normală W_p. Pe o rază

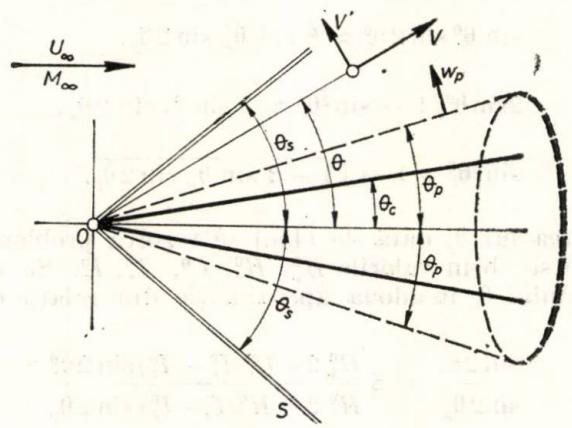


Fig. 5

vectoare $\theta = \theta_c$ viteza normală este nulă, și, ca urmare, conul format cu acest unghi îl putem defini drept con echivalent solid prin analogie cu cazul precedent.

*) Un articol similar, „Supersonic cone with blowing", E. Carafoli și C. Berbente a fost publicat în The Aeronautical Quarterly, Londra, noiembrie, 1976.

Notînd cu β un coeficient de forma

$$\beta = 1 + \frac{W_p}{U_\infty \sin\theta_p}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{41}$$

pentru a caracteriza sucțiunea, și punînd aceleași condiții la limită ca în cazul precedent, cu deosebirea că pe peretele poros vom avea

$$\theta = \theta_p, \quad V'_p = v'_p - U_\infty \sin\theta_p = W_p, \tag{42}$$

rezultă că

$$v'_p = \beta U_\infty \sin\theta_p \tag{43}$$

și prin urmare pentru constanta C se găsește expresia

$$C = \frac{\beta H_p \sin\theta_p \cos\theta_p}{1 + H_p(I_s - I_p)\sin\theta_p \cos\theta_p} = \frac{H_c \sin\theta_c \cos\theta_c}{1 + H_c(I_s - I_c)\sin\theta_c \cos\theta_c}, \tag{44}$$

obținută pe aceiași cale ca și expresia (15b).

Vom considera trei situații de calcul importante :

a. *Problema directă.* Se dă unghiul θ_p și viteza de succiune W_p sau parametrul $\beta(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ împreună cu numărul Mach al curgerii M_∞.

Din ecuația (44) se calculează unghiul θ_c^0 al conului echivalent, utilizînd pentru H expresia $H^\circ = \sin\theta$.

Vom obține succesiv, observînd că numitorii nu diferă mult de unitate,

$$\sin\theta_c^0 \sin 2\theta_c^0 \approx \beta \sin\theta_p \sin 2\theta_p, \tag{45a}$$

$$2\sin\theta_c^0 \sqrt{1 - \sin^2\theta_c^0} \approx \beta \sin\theta_p \sin 2\theta_p, \tag{45b}$$

$$\sin^2\theta_c^0 \approx 1 - \sqrt{1 - \beta \sin\theta_p \sin 2\theta_p}. \tag{45c}$$

Cu valoarea lui θ_c dată de (45c) se rezolvă problema ca în cazul conului solid și se obțin valorile H_p^0, H_c^0, C^0, I_s^0, I_c^0. Se calculează apoi expresia unghiului θ_c în adoua aproximație din relația (44) sub forma

$$\frac{\sin 2\theta_c}{\sin 2\theta_p} = \beta \frac{H_p^0 2 + H_c^0(I_s^0 - I_c^0)\sin 2\theta_c^0}{H_c^0 2 + H_p^0(I_s^0 - I_p^0)\sin 2\theta_p}. \tag{46}$$

Această nouă valoare a lui θ_c, dedusă din (46), este suficient de exactă și nu mai sînt necesare noi corecții. Indicele superior (0) a fost introdus pentru a desemna prima aproximație.

b. *Problema indirectă.* Se dau parametrii β și θ_c și se cere unghiul θ_p la care trebuie realizată succiunea definită de parametrul β. În acest

scop se calculează din (45b) valoarea unghiului θ_p într-o primă aproximaţie, pe care o notăm cu θ_p^0. Vom obţine, în mod asemănător cu (45c),

$$\sin^2\theta_p^0 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\beta}\sin\theta_c \sin 2\theta_c}\,. \tag{47}$$

Corecţia unghiului θ_p se face utilizînd din nou ecuaţia (44) sub forma

$$\frac{\sin 2\theta_p}{\sin 2\theta_c} = \frac{1}{\beta}\frac{H_c}{H_p^0}\frac{2 + H_p^0(I_s - I_p^0)\sin 2\theta_p^0}{2 + H_c(I_s - I_c)\sin 2\theta_c}\,. \tag{48}$$

Viteza de succiune necesară se calculează cu ajutorul relaţiei (41),

$$W_p = (\beta - 1)\, U_\infty \sin\theta_p\,. \tag{49}$$

c. *Problema mixtă.* Se observă că unghiul conului solid echivalent θ_c poate fi utilizat ca parametru al succiunii. Fiind dat θ_p, putem indica intensitatea succiunii alegînd unghiul $0 < \theta_c < \theta_p$. În acest fel, curgerea este determinată şi ne rămîne numai să calculăm viteza de succiune la $\theta = \theta_p$ din relaţiile (42) şi (16);

$$\frac{W_p}{U_\infty} = C\left[\frac{1}{H_p\cos\theta_p} - (I_p - I_s)\sin\theta_p\right] - \sin\theta_p\,. \tag{50}$$

Rezultă că cel mai simplu de rezolvat este acest de al treilea caz.

3. CURGEREA ÎN JURUL CONULUI POROS CU INJECŢIE

Dacă prin peretele poros se injectează fluid cu o viteză constantă ($W_p > 0$) — spre exemplu în scopul protecţiei termice — va apare o suprafaţă de separaţie între fluidul injectat şi cel datorită curentului de

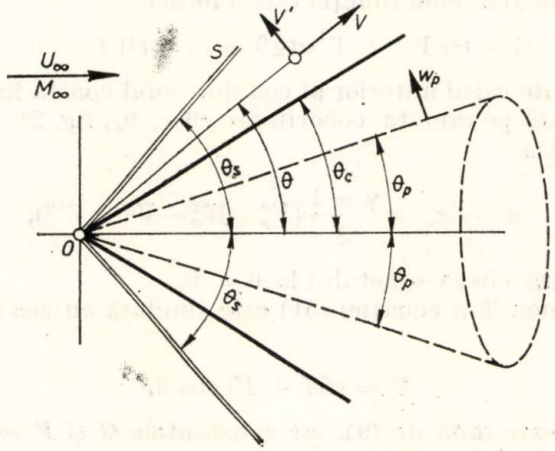


Fig. 6

la infinit, situată la un unghi $\theta_c > \theta_p$ (fig. 6). Pe această suprafaţă de separaţie, componenta normală a vitezei se anulează ($V_c' = 0$) şi putem defini

astfel ca şi în cazul sucţiunii un *con echivalent*. Totuşi, vom observa că, componenta radială a vitezei, adică V, poate prezenta un salt la $\theta = \theta_c$. Acest salt se produce chiar dacă fluidul injectat este identic cu cel din exterior, dar are o presiune de stagnare diferită. Prin urmare suprafaţa conică $\theta = \theta_c$ reprezintă o pînză conică care îşi păstrează forma stabilă dacă presiunile în cele două curgeri, interioară şi exterioară conului θ_c, sînt egale ($p_{ci} = p_{ce}$).

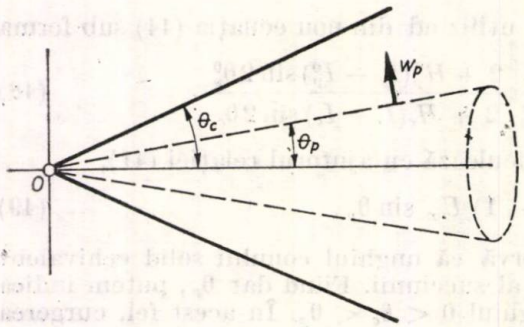


Fig. 7

Mişcarea exterioară în jurul conului echivalent la semiunghiul θ_c a fost studiată anterior (§ 1). Vom studia mai jos mişcarea din interiorul conului echivalent, care poate fi tratată în mod independent de cea exterioară. Problema se reduce astfel la studiul mişcării în interiorul unui con solid de semiunghi θ_c ca urmare a injecţiei unui fluid printr-un con poros de semiunghi θ_p coaxial cu cel solid (fig. 7).

Curgerea în interiorul unui con solid ca urmare a suflajului subsonic printr-un con poros interior coaxial.

Să considerăm un con poros, de semiunghi $\theta = \theta_p$ în interiorul unui con solid de semiunghi θ_c (fig. 7). Prin peretele poros se realizează o injecţie de fluid, după normală, de viteză $W_p > 0$, constantă după rază. În cele ce urmează vom presupune că viteza W_p *este subsonică*. ($t_p^2 < 1$). Problema este legată de rezolvarea ecuaţiei (2), pe care o vom liniariza ca mai înainte, introducînd funcţia t^2 sub forma

$$(1 - t^2)\, V'' + V' \operatorname{ctg}\theta + (2 - t^2)\, V = 0. \tag{51}$$

Deosebirea faţă de cazul anterior al conului solid constă în faptul că funcţia t^2 trebuie luată pe ramura coborîtoare ($\theta < \theta_c$, fig. 2), iar viteza sunetului are expresia

$$a^2 = a_p^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\,(V_p^2 + W_p^2 - V^2 - V'^2), \tag{52}$$

unde θ_p reprezintă viteza sunetului la $\theta = \theta_p$.

Soluţia generală a ecuaţiei (51) este similară cu cea dată de ecuaţia (8). Vom scrie

$$V = (GI + F)\cos\theta, \tag{53}$$

unde funcţia I este dată de (9), iar constantele G şi F se determină din următoarele condiţii la limită:

$$\theta = \theta_p, \quad V_p' = W_p, \quad a = a_p, \tag{54a}$$

$$\theta = \theta_c, V_e' = 0. \tag{54b}$$

Din aceste două ecuații (54) rezultă imediat :

$$G = \frac{W_p}{\sin\theta_p} \frac{H_c H_p \sin 2\theta_c \sin 2\theta_p}{2H_c \sin 2\theta_c - 2H_p \sin 2\theta_p + (I_c - I_p) H_c H_p \sin 2\theta_c \sin 2\theta_p}, \quad (55.a)$$

$$F = G\left(\frac{2}{H_c \sin 2\theta_c} - I_c\right). \quad (55.b)$$

Pentru funcția t^2 vom alege o expresie de forma

$$t^2 = b\left(\frac{1}{x} - 1\right), \quad x = \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \quad (56)$$

care este similară cu forma (18) însă pentru n negativ.

Coeficientul b se determină din relațiile

$$b = \frac{t_p^2 x_p}{1 - x_p}, \quad t_p^2 = \frac{V'^2}{a_p^2} = \frac{W_p^2}{a_p^2}. \quad (57)$$

Pentru $t^2 = 0$, se obțin expresiile (17) pentru funcțiile H_0 și I_0 de forma

$$H_0 = \sin\theta, \quad I_0 = \frac{1}{\cos\theta} + \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \quad (58)$$

Pentru acest caz, care corespunde unei mișcări incompresibile, constantele, pe care le vom nota cu F_0 și G_0 rezultă din expresiile (55). O asemenea mișcare poate avea loc dacă se injectează un lichid pentru răcire.

Să considerăm unghiul $\theta = \theta_1$ corespunzător $t_1^2 = 1$, (fig. 2), unde θ_1 reprezintă o valoare limită care nu este atinsă însă niciodată în suflajul subsonic, adică vom avea întotdeauna $\theta_p > \theta_1$. Punînd

$$\sigma = \left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_c}\right)^m = \frac{b}{1+b}, \quad m\nu = 1 - \sigma, \quad (59)$$

vom putea scrie

$$\ln H = \frac{1-\sigma}{m}\int \frac{dx}{x - \sigma}; \qquad \frac{1}{H} = \frac{\text{const.}}{(x - \sigma)^\nu}. \quad (60)$$

sau încă, alegînd convenabil constanta,

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{(\sin\theta)^{m\nu}} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\sin^m\theta_1}{\sin^m\theta}\right)^\nu} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{[1-(1-\sin\theta)]^\sigma}{\left(1 - \dfrac{\sin^m\theta_1}{\sin^m\theta}\right)^\nu}. \quad (61)$$

Deoarece ν și σ au valori mici, expresia (61) poate fi dezvoltată într-o formă convenabilă, care, întocmai ca și expresia (23), va fi utilizată numai pentru integrare.

Astfel, utilizînd constantele convenabil alese δ_ν, δ_σ, vom putea scrie

$$\frac{1}{H} \approx \frac{1}{\sin\theta} \frac{1-\delta_\sigma(1-\sin\theta)}{1-\delta_\nu \dfrac{\sin^m\theta_1}{\sin^m\theta}} = \frac{1-\delta_\sigma}{\sin\theta} + \delta_\sigma + \\ + \frac{2\delta_\nu\delta_\sigma \sin^m\theta_1}{\sin^m\theta} + \frac{2\delta_\nu(1-\delta_\sigma)\sin^m\theta_1}{(\sin\theta)^{m+1}}. \tag{62}$$

Ca și în cazul precedent, putem considera o valoare convenabilă pentru δ_σ și δ_ν, în scopul unei cît mai bune reprezentări a expresiei (61). Observînd că primul și ultimul termen din (62) sînt preponderenți, expresia de mai sus poate fi suficient de bine aproximată sub o formă similară cu (24):

$$\frac{1}{H} = \frac{1-\delta'}{\sin\theta} + \frac{\varepsilon'}{(\sin\theta)^{m+1}}. \tag{63}$$

Constantele δ' și ε' vor fi determinate din condițiile ca la capetele intervalului $\theta = \theta_p$ și $\theta = \theta_c$ expresia (63) să coincidă cu (61), adică H să aibă valorile H_p și H_c,

$$H_c = (\sin\theta_c)^{m\nu}(1-\sigma)^\nu, \quad H_p = (\sin\theta_p)^{m\nu}\left(1 - \frac{\sin^m\theta_1}{\sin^m\theta_p}\right)^\nu. \tag{64}$$

Pe această cale se deduce fără dificultate că

$$1-\delta' = \frac{H_p \sin\theta_c - H_c x_p \sin\theta_p}{H_c H_p (1-x_p)}, \quad \varepsilon' = \sin^m\theta_c\left[\frac{\sin\theta_c}{H_c} - (1-\delta')\right]. \tag{65}$$

Prin urmare, integrala I va avea forma

$$I = (1-\delta')I_0 + \varepsilon' \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta \sin^{m+1}\theta}. \tag{66}$$

Rezultate foarte apropiate de cele exacte se obțin pentru $m = 3$, în care caz expresia (66) ne conduce la

$$I = (1-\delta')I_0 + \varepsilon'\left(2\,\mathrm{tg}\theta + \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\theta - \mathrm{ctg}\,\theta\right). \tag{67}$$

Calculul presiunilor. Să notăm cu p_p presiunea pe conul interior $\theta = \theta_p$ și cu p_c presiunea pe conul exterior $\theta = \theta_c$. Notînd cu p presiunea într-un punct curent, vom avea

$$\frac{p}{p_p} = \left(\frac{W_i^2 - V^2 - V'^2}{W^2 - V_p^2 - V_p'^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{p_c}{p_p} = \left(\frac{W_i^2 - V_c^2}{W_i^2 - V_p^2 - V_p'^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{68}$$

unde viteza maximă W_i este dată de expresia

$$W_i^2 = V_p^2 + V_p'^2 + \frac{2a_p^2}{\gamma - 1}. \tag{69}$$

Mai departe se calculează coeficientul de presiune :

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_p^2}\left(\frac{p}{p_p} - 1\right), \tag{70}$$

M_p fiind numărul Mach la $\theta = \theta_p$.

Determinarea liniilor de curent. Este util să cunoaştem forma liniilor de curent în regiunea din interiorul celor două conuri în vederea unor multiple aplicaţii. În primul rînd vom da expresia unghiului α de înclinare al vitezei totale, faţă de suprafaţa conului poros :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W_p}{V_p} = \frac{2/(H_p \sin 2\theta_p) - 2/(H_c \sin 2\theta_c) + (I_c - I_p)}{2/(H_c \sin 2\theta_c) - (I_c - I_p)} \operatorname{tg}\theta_p. \tag{71}$$

În continuare vom determina funcţia de curent ψ folosind ecuaţia liniilor de curent în coordonate sferice, pentru cazul particular al mişcării conice :

$$\frac{\mathrm{d}R}{V} = \frac{R\mathrm{d}\theta'}{V'}. \tag{72}$$

Funcţia de curent se introduce sub forma

$$\psi = R^2 \int_{\theta_c}^{\theta} \frac{\rho}{\rho_1} \sin\theta V \,\mathrm{d}\theta = R^2 \int_{\theta_c}^{\theta} \frac{\rho}{\rho_1} (GI + F) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta, \tag{73}$$

unde pentru $\theta = \theta_c$ se obţine linia de curent $\psi = 0$, iar ρ_1 reprezintă o densitate de referinţă putîndu-se lua $\rho_1 = \rho_c$. În cazul curgerii incompresibile $\rho = \rho_1 = \text{const.}$ avem $t^2 = 0$ şi se obţine pentru funcţia de curent următoarea expresie :

$$\psi_0 = R^2 \int_{\theta_c}^{\theta} (G_0 I_0 + F_0) \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{R^2}{2}\left[G_0\left(\sin^2\theta \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right) + \right.$$

$$\left. + F_0 \sin^2\theta + \text{const}\right], \tag{74}$$

unde constanta se determină din condiţia $\psi_0 = 0$.

Pentru cazul general, pe baza expresiei (67) şi (73), observînd că se poate lua pentru ρ_1 o valoare medie şi deci, raportul ρ/ρ_1 variază puţin ($\rho/\rho_1 \approx 1$), avem

$$\psi = \frac{R^2}{2}\left[(1 - \delta')\, G\left(\sin^2\theta \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} G\varepsilon'(\operatorname{tg}\theta - 2\sin 2\theta) + F \sin^2\theta + \text{const.}\right]. \tag{75}$$

S-a obținut astfel o expresie analitică pentru funcția de curent, care poate fi aplicată fără nici o dificultate.

Exemple de calcul și alegerea parametrilor injecției

În cazul în care se consideră mișcarea între două conuri coaxiale, (fig. 7) la care se cunoaște semiunghiul conului solid $\theta = \theta_c$ și semiunghiul conului permeabil interior $\theta = \theta_p$ împreună cu viteza sunetului a_p la nivelul peretelui poros ($\theta = \theta_p$) pentru o viteză de suflaj W_p după normală, se poate calcula t_p^2 lîngă perete după relația

$$t_p^2 = \frac{W_p^2}{a_p^2} \quad (t_p^2 < 1),$$

verificîndu-se dacă suflajul este subsonic. În acest caz toate relațiile de calcul sînt explicite și nu există dificultăți în aplicarea lor.

În cazul în care fluidul se injectează într-un curent de la infinit (fig. 6) conul $\theta = \theta_c$ reprezintă o suprafață de separație între cele două curgeri, una interioară ($\theta \leqslant \theta_c$) și alta exterioară ($\theta > \theta_c$). Se pot neglija efectele vîrtejurilor, localizate la $\theta = \theta_c$, precum și transferul de căldură, deoarece acestea au, în general, un caracter secundar și reprezintă doar corecții care pot fi aduse ulterior. Problema se rezolvă considerînd simultan cele două curgeri, cea exterioară, a cărei soluție are forma (8) și cea interioară, dată de ecuația (53).

Stabilirea mărimilor care caracterizează curgerea conduce la următoarele situații de calcul :

a. *Problema directă.* Se dau caracteristicile curentului exterior : U_∞, M_∞, p_∞, unghiul θ_p, viteza sunetului a_p, viteza de injecție W_p și presiunea p_p, și se cere să se determine poziția conului echivalent θ_c și poziția undei de șoc, θ_s, odată cu întregul cîmp de mișcare. Împreună cu constantele C, D, G, F avem șase necunoscute pentru care dispunem de 6 ecuații date de două condiții la $\theta = \theta_s$ (ec. 12a și 12b), trei condiții la $\theta = \theta_c$ (ec. 11 și 54b pentru curgerea exterioară și curgerea interioară și egalitatea presiunilor) și o condiție la $\theta = \theta_p$. Ținînd seama de expresiile constantelor de integrare (15a, 15b, 55a și 55b), problema revine la găsirea unghiurilor conului solid θ_c și a unghiului undei de șoc θ_s din sistemul de ecuații :

$$\sin^2 \theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\operatorname{tg} \theta_s}{(1-k_e) H_{se}} \cdot \frac{H_{ce} \sin 2\theta_c}{2 + H_{ce}(I_{se} - I_{ce}) \sin 2\theta_c}, \tag{76}$$

$$\frac{p_e}{p_\infty} = \lambda \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{V_{ce}^2}{U_\infty^2}\right)}{\lambda \left(k_e + \frac{1-k_e}{k_s^2}\right)} \right]^{\frac{\gamma_e}{\gamma_e - 1}} = \frac{p_p}{p_\infty} \left(\frac{W_i^2 - V_{ci}^2}{W_i^2 - V_p^2 - V_p'^2} \right)^{\frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1}} \tag{77}$$

unde indicii e și i se referă respectiv la curgerea exterioară și cea interioară. Din expresia (77) se constată apariția unui nou parametru important : raportul p_p/p_∞.

Sistemul de ecuații (76) și (77) se rezolvă ușor prin încercări, observînd că, la o valoare aleasă pentru unghiul $\theta_c (\theta_c > \theta_p)$, atît curgerea interioară, cît și cea exterioară, este complet determinată. Această valoare inițială se modifică pînă cînd ecuația (77) este verificată.

b. *Problema indirectă.* Se dau mărimile care caracterizează curgerea interioară a_p, W_p, p_p, θ_p și unghiul θ_c și se cere să se determine caracteristicile curgerii exterioare cu suprafața de separație la $\theta = \theta_c$.

Curgerea interioară fiind complet determinată și deoarece unghiul θ_c este dat, rămîn de determinat constantele C și D împreună cu parametrii curgerii exterioare M_∞, U_∞, p_∞, și unghiul θ_s, adică șase necunoscute. În acest scop dispunem de patru ecuații date de cele două condiții la $\theta = \theta_s$ (ec. 12a și 12b) și două condiții la $\theta = \theta_c$ (ec. 11 și 77). Rezultă că doi dintre parametrii curgerii exterioare trebuie să fie aleși. Dacă se dă M_∞ și U_∞, atunci unghiul θ_s se calculează din relațiile (15c) sau (76), iar din (77) rezultă presiunea p_∞ și deci presiunile de stagnare în curgerea exterioară (înainte de unda de șoc și după unda de șoc). În acest fel, în problema indirectă, relațiile de calcul devin explicite. Vom observa că viteza U_∞ nu poate fi determinată din relațiile care se referă la curgerea exterioară, ea reprezentînd numai o scară a mișcării. Prin urmare, în problema indirectă nu se poate considera simultan cunoscute valorile M_∞ și p_∞. Dacă se dau valorile lui p_∞ și U_∞, atunci M_∞ și unghiul θ_s se determină prin încercări cu ajutorul sistemului de ecuații (76) și (77).

Comparații cu alte metode. În figurile 8 și 9 sînt reprezentate diagramele rezultatelor obținute pe baza metodei analitice propuse și sînt comparate cu valorile determinate prin integrarea numerică de către Emanuel [2]. Se observă o concordanță foarte bună atît în ceea ce privește unghiul de

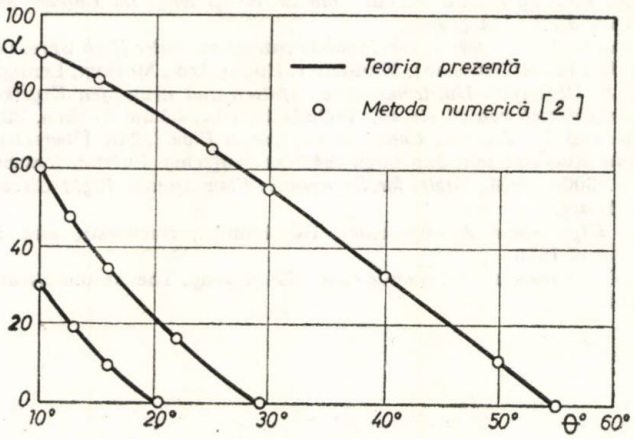


Fig. 8

suflaj α, (formula 71), cît și raportul presiunilor p_p/p_∞. Parametrii aleși au fost θ_p, t_p^2 și θ_c pentru care s-au luat trei valori:

$$\theta_p = 10°, \quad t_p^2 = 0{,}375, \quad \theta_c = 20°,$$
$$\theta_p = 10°, \quad t_p^2 = 0{,}50, \quad \theta_c = 30°,$$
$$\theta_p = 10°, \quad t_p^2 = 0{,}125, \quad \theta_c = 55°.$$

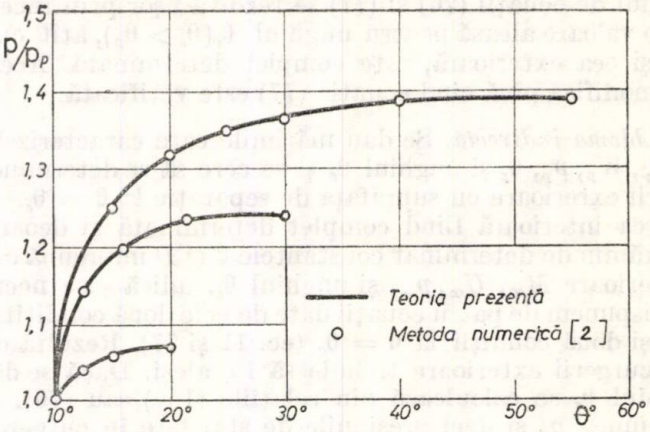


Fig. 9

Pentru aceste valori s-au verificat valorile lui α după (71) şi p_p/p_∞ (formula 77), luînd $\gamma_e = \gamma_i = 1{,}4$. Concordanţa este bună şi în cazul valorilor mari ale lui t_p^2.

Primită la redacţie la 9 noiembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. G. I. Taylor, J. W. Maccoll, Proc. Roy. Soc. 1933, vol. A 139, p. 278.
2. G. Emanuel, *Blowing from a Porous Cone or Wedge when the Contact Surface is Straight*, AIAA *J.*, *5*, 534 (1967).
3. Yu. A. Kubardin et al., *Atlas of Gasdynamic Functions under High Speeds and Temperatures of the Flow* (in Russian), Gosudarst, Energ. Izd., Moskva, Leningrad, 1961.
4. W. Langefeld, *Überschall-Umströmung von spitzen und strumpfen Kegelkörpern im Anstellwinkebereich von o° bis 45*, Technische Hochschule Aachen, 20.07.1971.
5. W. Hantsche and H. Wendt, *Cones in Supersonic Flow* („Mit Überschallgeschwindigkeit angeblasene Kegelspitzen, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrforschung p. 180—190).
6. N.A.S.A., S.P. 3004, 1964, *Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack.*
7. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics*, Ed. tehnică, Bucureşti, and Pergamon Press, London, 1956.
8. E. Carafoli, C. Berbente, *Supersonic cone with blowing*, The Aeronautical Quarterly, 1976, Nov.

STUDII

ASUPRA UNUI MODEL MATEMATIC ŞI EXPERIMENTAL AL FOTOVISCOELASTICITĂŢII LINIARE*)

de TEODOR HUIDU

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de matematică

În lucrare sînt prezentate rezultatele unor cercetări privind modelarea proceselor de deformare viscoelastică cu ajutorul metodei fotoelasticităţii. După o prezentare sintetică a bazelor matematice privind un model al fotoviscoelasticităţii, se aplică acest model la determinarea funcţiilor de fluaj şi de relaxare pentru materialul viscoelastic transparent ales, care posedă birefringenţă atunci cînd este supus la solicitări exterioare. Este prezentată şi schema de tratare a unei probleme concrete de fotoviscoelasticitate bidimensională. Calculele au fost efectuate la calculatorul electronic IBM.

1. INTRODUCERE

Numeroase probleme din mecanica corpului solid deformabil (metale încălzite, materiale ceramice încălzite etc.) pot conduce la analiza tensiunilor şi deformaţiilor unui material viscoelastic liniar. Cercetarea unor astfel de materiale sau corpuri, care au în plus şi nişte contururi neregulate (deci dificultăţi în privinţa condiţiilor la limită), face adesea imposibilă tratarea acestor probleme prin metode pur matematice. Problema devine abordabilă dacă se obţin unele informaţii pe cale experimentală privind comportarea mecanică a corpului de studiat.

Prima cercetare pur matematică de fotoviscoelasticitate liniară, pe un model idealizat, a fost făcută de Mindlin [1]. Odată cu acumularea de date experimentale, problema a fost abordată într-o manieră mai realistă de către alţi autori [2]—[5].

Intenţia lucrării de faţă — ca şi a lucrărilor anterioare [6], [7] — este de a răspunde unor necesităţi practice, elaborînd o bază teoretică — matematică şi experimentală — necesară tratării problemelor referitoare la studiul stării de tensiune mecanice din izolatorii ceramici produşi de industria electrotehnică, a căror comportare este viscoelastică atunci cînd sînt solicitaţi mecanic în regim termic. Pînă în prezent, în astfel de probleme, comportarea viscoelastică a fost neglijată. Cele prezentate aici pot fi folosite şi la tratarea altor probleme concrete de comportare viscoelastică.

---

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferinţă de mecanică, Bucureşti, 18—20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 2, 1977, P. 181—192

Un prim studiu privind comportarea optică-mecanică a unui material fotoelastic românesc (o rășină epoxidică numită DINOX) a fost publicat în anul 1967 [8]. Datele epperimentale care complectează studiul de față au fost obținute ulterior pe un material numit „Columbia Resine CR-39", a cărui comportare optică-mecanică se apropie destul de mult de comportarea rășinii Dinox.

2. ECUAȚIILE CONSTITUTIVE ALE VISCOELASTICITĂȚII LINIARE

În cadrul unor notații frecvent utilizate în literatura de specialitate și a valabilității principiului suprapunerii efectelor al lui Boltzmann, pentru corpul viscoelastic liniar, omogen și izotrop, se pot scrie ecuațiile [2], [4], [6], [7]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{rr}\delta_{ij}, \qquad \sigma_{rr} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \tag{3}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{rr}\delta_{ij}, \qquad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \tag{4}$$

$$S_{ij}(t) = 2\int_0^t G(t-\tau)\frac{\mathrm{d}e_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

$$\frac{1}{3}\sigma_{rr}(t) = \int_0^t K(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{rr}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

Inversînd ecuațiile (5) și (6) se obțin ecuațiile:

$$2e_{ij}(t) = \int_0^t I(t-\tau)\frac{\mathrm{d}S_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{rr}(t) = \frac{1}{3}\int_0^t B(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

În cazul solicitării la întindere după o singură direcție se scrie:

$$\sigma_{11}(t) = \int_0^t E(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{11}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

$$\varepsilon_{11}(t) = \int_0^t D(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma_{11}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

Comportarea mecanică a materialelor viscoelastice liniar este caracterizată de șase funcții de timp, care poartă următoarele denumiri: funcțiile (complianțele) de fluaj de: întindere $D(t)$, forfecare $I(t)$, volum $B(t)$; funcțiile (modulii) de relaxare de: întindere $E(t)$, forfecare $G(t)$, volum $K(t)$. Materialul fiind presupus omogen, toate funcțiile de fluaj și de relaxare sînt independente de coordonatele spațiale, în timp ce mărimile tensoriale sînt funcții și de aceste coordonate, ceea ce rămîne să se subînțeleagă în această lucrare, deoarece va fi folosită o scriere mai simplificată.

După cum se știe, sistemul complet de ecuații din care se determină soluția problemei viscoelasticității liniare, este dat de ecuațiile (1)—(4) și o pereche de relații tensiune-deformație, ca de exemplu, (5) și (6) sau (7) și (8), la care se atașează și anumite condiții la limită.

3. DETERMINAREA FUNCȚIILOR DE FLUAJ ȘI DE RELAXARE

În experiențe, o deosebită importanță o are considerarea cîmpului uniaxial de tensiune [3], care este aproximat de o solicitare la tracțiune după o singură direcție a unei epruvete simple (fig. 1), adică numai $\sigma_{11} \neq 0$, toate celelalte componente $\sigma_{ij} = 0$ ($\sigma_{11}(t) = \sigma_c \cdot H(t)$, $H(t)$ fiind funcția lui Heaviside, σ_c este tensiunea constantă aplicată).

Definind, din motive experimentale, funcția de fluaj de întindere simplă și funcția lui Poisson de fluaj axial de întindere (contracție), respectiv, prin

$$D(t) = \frac{\varepsilon_{11}(t)}{\sigma_c}, \qquad \nu(t) = -\frac{\varepsilon_{22}(t)}{\varepsilon_{11}(t)}, \tag{11}$$

ecuațiile constitutive conduc la relațiile

$$I(t) = 2[1 + \nu(t)]\, D(t), \qquad B(t) = 3[1 - 2\nu(t)]\, D(t) \tag{12}$$

sau

$$B(t) = \frac{3[1 - 2\nu(t)]}{2[1 + \nu(t)]}\, I(t). \tag{13}$$

Formulele (11) și (12), împreună cu datele experimentale, sînt utilizate pentru determinarea funcțiilor D, ν, B, I, pentru materialul ale cărui proprietăți urmează să fie studiate.

Pentru determinarea funcțiilor de relaxare E, G, K, și a funcției de fluaj inversă $[\nu(t)]^{-1}$, s-a folosit un procedeu numeric propus de Hopkins și Hamming [9], [6], modificat ulterior [7].

Dacă se notează cu $\varphi(t)$ funcţia de fluaj, iar cu $\psi(t)$ funcţia de relaxare (sau de fluaj inversă) corespunzătoare, se ştie că aceste funcţii satisfac următoarele ecuaţii integrale de tip Volterra :

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = t, \qquad \int_0^t \psi(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = t. \tag{14}$$

Introducînd funcţia

$$f(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau,$$

astfel încît $f(0) = 0$, $f'(\tau) = \varphi(\tau)$, unde se presupune că $\varphi(\tau)$ nu se anulează pentru nici o valoare a lui $\tau > 0$; şi dacă se notează cu $t_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ timpii pentru care funcţia $\varphi(t)$ este cunoscută $(t_0 = 0)$, iar $\varphi(t)$ este considerată constantă în intervalele $[t_i, t_{i+1}]$, s-a obţinut formula de calcul a funcţiei $\psi(t)$ [9] pentru timpii $t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i)$:

$$\psi(t_{n+\frac{1}{2}}) = \frac{t_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \psi(t_{i+\frac{1}{2}})\,[f(t_{n+1} - t_i) - f(t_{n+1} - t_{i+1})]}{f(t_{n+1} - t_n)}, \tag{15}$$

unde

$$\psi(t_{\frac{1}{2}}) = \psi_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{f(t_1)}. \tag{16}$$

Considerînd o aproximaţie liniară a funcţiei $f(t)$ pentru $t \in [t_i, t_{i+1}]$, pentru funcţiunea ψ s-a obţinut o formulă modificată [7] :

$$\psi(t_{n+\frac{1}{2}}) = \frac{t_{n+1} - \frac{1}{2}\,[\varphi(t_{n+1}) + \varphi(t_n)] \sum_{i=0}^{n-1} \psi(t_{i+\frac{1}{2}})\,(t_{i+1} - t_i)}{f(t_{n+1} - t_n)}; \tag{17}$$

unde $\psi(t_{\frac{1}{2}})$ este dat de (16), iar

$$f(t_{n+1} - t_n) = f(t_n) + \frac{1}{2}\,[\varphi(t_{n+1}) + \varphi(t_n)]\,(t_{n+1} - 2t_n). \tag{18}$$

Formulele (16), (17) şi (18) au fost utilizate în aplicaţiile considerate. Calculele s-au făcut la calculatorul electronic.

4. MODELUL FOTOVISCOELASTIC

Pentru scrierea relaţiilor dintre tensorii mecanici şi tensorul efect optic (tensorul refracţie sau birefringenţă N_{ij}, sau tensorul deviator corespunzător R_{ij}) s-au folosit ipotezele şi consideraţiile care au condus la scri-

erea relațiilor dintre tensorii tensiune σ_{ij} și deformație ε_{ij} (sau tensorii deviatori respectivi S_{ij} și e_{ij}). Astfel se obțin

$$R_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{3} N_{rr}\delta_{ij}, \tag{19}$$

$$R_{ij}(t) = \int_0^t \bar{I}(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\,S_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{20}$$

$$N_{rr}(t) = \int_0^t \bar{B}(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\,\sigma_{rr}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{21}$$

unde cu $\bar{I}(t)$ și $\bar{B}(t)$ s-au notat formal funcțiile de fluaj optic de forfecare și, respectiv, de volum. Considerînd cazul cîmpului uniaxial de tensiune și definind birefringența de tensiune prin relația

$$N(t) = N_1(t) - N_2(t),$$

s-a obținut [6], [7]:

$$N(t) = \sigma_c \bar{I}(t) = \sigma_c C_\sigma(t),$$

adică funcția optică de tensiune sau funcția optică de fluaj

$$C_\sigma(t) = \frac{N(t)}{\sigma_c} \tag{22}$$

și atunci, în locul ecuațiilor (20) și (21), se obține ecuația

$$R_{ij}(t) = \int_0^t C_\sigma(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\,S_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{23}$$

și inversa acesteia

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \mathscr{C}_\sigma(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\,R_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{24}$$

unde $\mathscr{C}_\sigma(t)$ este funcția optică de fluaj inversă. Relații analoge se pot obține între tensorii optic R_{ij} și al deformației e_{ij} [6], [7]. Ca și la modelul mecanic, și aici avem relații de forma (14), de exemplu,

$$\int_0^t C_\sigma(t-\tau)\,\mathscr{C}_\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t. \tag{25}$$

Relațiile (23) și (24) au fost obținute și de alți autori [2], [4], dar pe alte căi mai ocolite.

5. CAZUL STĂRII PLANE DE TENSIUNE

Particularizînd cele scrise mai sus pentru cazul stării plane de tensiune și ținînd seama de caracterul tensorial al mărimilor S_{ij} și R_{ij}, se obțin relațiile [6]:

$$[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] \cos 2\xi(t) = \int_0^t \mathscr{C}_\sigma(t-\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} [N(\tau) \cos 2\zeta(\tau)]\, \mathrm{d}\tau, \quad (26)$$

$$[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] \sin 2\xi(t) = \int_0^t \mathscr{C}_\sigma(t-\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} [N(\tau) \sin 2\zeta(\tau)]\, \mathrm{d}\tau, \quad (27)$$

unde ξ este parametrul (funcția) „izoclinei mecanice", indicînd direcția tensiunii principale σ_1 în planul (x_1, x_2), iar ζ este parametrul (funcția) „izoclinei optice", indicînd direcția de birefringență a lui N_1, în același plan. În aceste relații $\xi \neq \zeta$ în cazul general, iar mărimile ξ și ζ depind atît de timp, cît și de coordonatele carteziene (x_1, x_2) ca și mărimile σ_1, σ_2, N. Evident că, dacă se cunosc mărimile optice N, ζ și $\mathscr{C}_\sigma$, se pot determina mărimile mecanice $(\sigma_1 - \sigma_2)$ și ξ. În cazul în care $\xi = \zeta$ se obțin formule mai simple.

6. SCHEMA DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME CONCRETE

Tratarea unor probleme concrete de fotoviscoelasticitate liniară bidimensională, pe modelul din material polimer, se face în felul următor:

a) Se determină funcția C_σ pe o epruvetă unde numai $\sigma_{11} \neq 0$, cu ajutorul formulei [6], [7]:

$$C_\sigma(t) = \frac{\lambda}{h\sigma_c} m(t), \quad (28)$$

unde λ este lungimea de undă a sursei de lumină folosită, h este grosimea epruvetei, m este ordinul izocromatei corespunzător tensiunii constante σ_c aplicată și timpului t considerat.

b) Se determină funcția $\mathscr{C}_\sigma$ cu ajutorul ecuației (25) și a metodei numerice enunțată mai sus, adică cu ajutorul formulei (17).

c) Din datele experimentale, adică din cunoașterea funcțiilor: $m = m(x_1, x_2, t)$, $\zeta = \zeta(x_1, x_2, t)$ și a funcției $\mathscr{C}_\sigma(t)$, se calculează mărimele: $[\sigma_{11}(x_1, x_2, t) - \sigma_{22}(x_1, x_2, t)]$ și $\sigma_{12}(x_1, x_2, t)$ cu ajutorul formulelor [6], [7]:

$$\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) = \int_0^t \mathscr{C}_\sigma(t-\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} [N(\tau) \cos 2\zeta(\tau)]\, \mathrm{d}\tau, \quad (29)$$

$$\sigma_{12}(t) = \int_0^t \mathscr{C}_\sigma(t-\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} [N(\tau) \sin 2\zeta(\tau)]\, \mathrm{d}\tau, \quad (30)$$

unde

$$N(t) = N(x_1, x_2, t) = \frac{\lambda}{h} m(x_1, x_2, t), \quad (31)$$

se determină pe modelul bidimensional, geometric asemenea cu prototipul.

Mărimile optice determinate experimental (m și ζ) (se obțin prin procedee bine cunoscute în fotoelasticitate [10], [11], iar separarea componentelor σ_{11} și σ_{22} se face utilizînd procedee clasice, sau procedeul indicat în lucrările [7], [12]. Problema similitudinii, adică problema trecerii valorilor de la model la prototip, nu face obiectul acestui studiu.

7. OBȚINEREA DATELOR EXPERIMENTALE, PRELUCRAREA ȘI INTERPRETAREA LOR

Pentru determinarea funcțiilor care caracterizează din punct de vedere mecanic și optic fluajul și relaxarea, s-a considerat un model (epruvetă) confecționat dintr-un material polimer viscoelastic, transparent, numit „Columbia Resine CR-39", de forma și dimensiunile indicate în figura 1, solicitat la o întindere uniaxială cu o forță de tracțiune constantă $P = 84$ daN, realizînd o tensiune uniformă $\sigma_c = 104$ daN/cm^2. S-a considerat și valori ale forței P mai mici și mai mari decît valoarea dată, obținîndu-se pentru funcțiile caracteristice determinate valori foarte apropiate de acelea reprezentate de curbele din figurile ce urmează. Experiențele au fost făcute la o temperatură considerată constantă $T = 21°C \pm 1°$.

Pentru timpii $t_i = \{0{,}5, 15, 30, 60, 120, 240 \text{ minute}\}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, 6)$ și sarcina constantă P au fost înregistrate simultan valorile corespunzătoare ale componentelor deformației $\varepsilon_{11}(t)$ și $\varepsilon_{22}(t)$. Pentru măsurarea acestor mărimi s-a folosit o punte tesometrică și mărci tensometrice care au fost lipite (fixate) pe epruvetă conform cu figura 1. Metoda tensometriei electrice de măsurare a deformațiilor (la fluaj) din materiale polimere — folosită din lipsa bazei materiale pentru altă metodă mai potrivită — nefiind prea fericit aleasă, a fost necesară repetarea de mai multe ori a acelorași experiențe, astfel încît să se poată selecta date experimentale cît mai conforme cu realitatea. Măsurătorile efectuate, împreună cu formulele

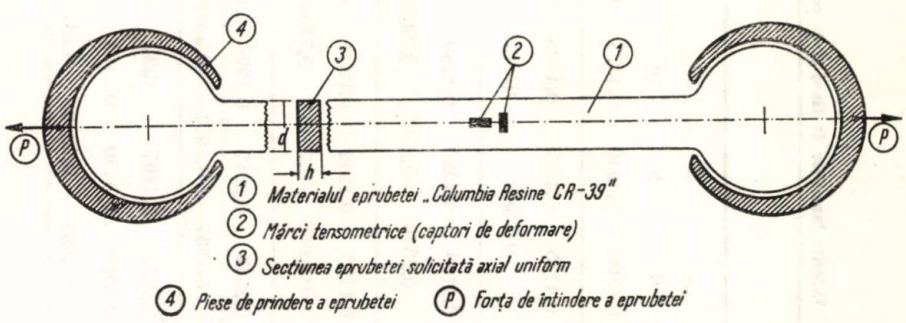


Fig. 1. — Epruveta folosită pentru studiul fluajului mecanic și optic.

corespunzătoare prezentate anterior, au permis calculul funcțiilor „mecanice" de fluaj ν, D, I, B și de relaxare E, G, K (și de fluaj inversă ν^{-1}).

Ordinul izocromatei (funcția $m(t)$) pentru timpii t_i indicați mai sus, a fost măsurat folosind aceeași epruvetă solicitată (fig. 1), plasată într-un cîmp de lumină polarizată circular, utilizînd metoda de compensație a lui

Tabela 1

Valorile funcțiilor de fluaj și de relaxare (sau de fluaj invers) corespunzătoare momentelor de timp considerate

								Observații
i	1	2	3	4	5	6	7	indici
t_i	0	5	15	30	60	120	240	minute
$\varepsilon_{11}(t_i)$	0,4300	0,4540	0,4675	0,4760	0,4850	0,4950	0,5050	înmulțite cu 10^{-2}.
$D(t)$	0,4135	0,4365	0,4495	0,4577	0,4663	0,4760	0,4856	înmulțite cu 10^{-4} cm²/daN.
$E(t)$	0,2353		0,2261	0,2202	0,2161	0,2122	0,2077	„ 10^5daN/cm².
$\nu(t)$	0,4180	0,4230	0,4260	0,4290	0,4320	0,4360	0,4400	—
$[\nu(t)]^{-1}$	0,2378	0,2367	0,2334	0,2322	0,2305	0,2283		înmulțite cu 10.
$I(t)$	0,1173	0,1242	0,1282	0,1308	0,1336	0,1367	0,1398	înmulțite cu 10^{-3}cm²/daN.
$G(t)$	0,8282	0,7946	0,7704	0,7549	0,7396	0,7221		„ 10^4daN/cm².
$B(t)$	0,2034	0,2017	0,1996	0,1950	0,1903	0,1828	0,1748	„ 10^{-4}cm²/daN.
$K(t)$	0,4937	0,4991	0,5072	0,5185	0,5353	0,5572		„ 10^5daN/cm².
$m(t)$	0,3972	0,4167	0,4222	0,4305	0,4362	0,4416	0,4500	„ 10 franje.
$C_\sigma(t)$	0,2389	0,3450	0,3496	0,3564	0,3612	0,3656	0,3726	„ 10^{-5}cm². franje/daN.
$C_\sigma(t)$	0,2968	0,2886	0,2835	0,2780	0,2751	0,2708		„ 10^6daN/cm². franje.

Tardy [10]. Ca sursă de lumină a fost folosită o lampă cu vapori de mercur cu filtru verde 77A, astfel încît lungimea de undă a radiației monocromatice emisă de sursă a fost $\lambda = 5461$ Å $= 546{,}1$ mμ $= 546{,}1 \times 10^{-6}$ mm.

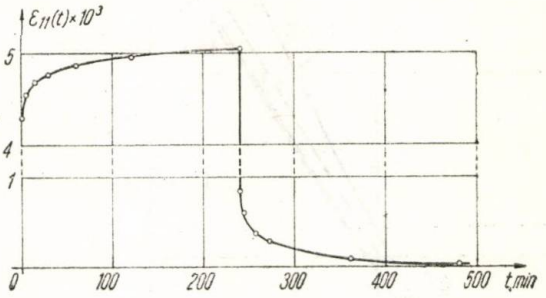


Fig. 2. — Curbele de variație a deformației ε_{11} cu timpul t, la încărcare cu tensiunea constantă $\sigma_c = 104$ daN/cm² și la descărcare ($\sigma_c = 0$).

Funcția „optică" de fluaj (tensiune) $C_\sigma(t)$ a fost calculată cu ajutorul formulei (27), unde $\sigma_c = \frac{P}{hd} = 104$ daN/cm² ($h = 0{,}635$ cm reprezintă grosimea epruvetei, $d = 1{,}27$ cm este lățimea aceleiași epruvete).

Îndată ce funcțiile de fluaj au fost găsite, s-a precedat la calcularea funcțiilor de relaxare (sau de fluaj inverse) conform cu metodologia descrisă în paragraful 3. Calculele au fost efectuate la calculatorul electronic IBM de la Centrul de Calcul al Universității din București, iar pentru sprijinul acordat la întocmirea programului pentru calculator se cuvine să mulțumim colegului nostru D. Drăghiciu.

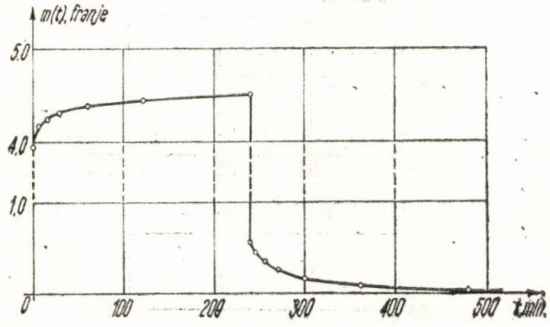


Fig. 3. — Curbele de variație a ordinului de izocromată m cu timpul t, la încărcare cu tensiunea constantă $\sigma_c = 104$ daN/cm² și la descărcare ($\sigma_c = 0$).

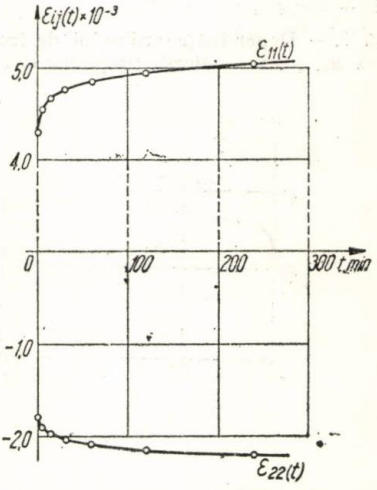


Fig. 4. — Curbele de variație ale componentelor normale a deformației ε_{11} și ε_{22} în funcție de timpul t, la încărcare constantă.

Datele experimentale precum și funcțiile de fluaj și de relaxare calculate, corespunzătoare timpilor t_i considerați, sînt reprezentate în tabela 1 și în figurile 2—10. Figurile prezentate sînt suficient de grăitoare

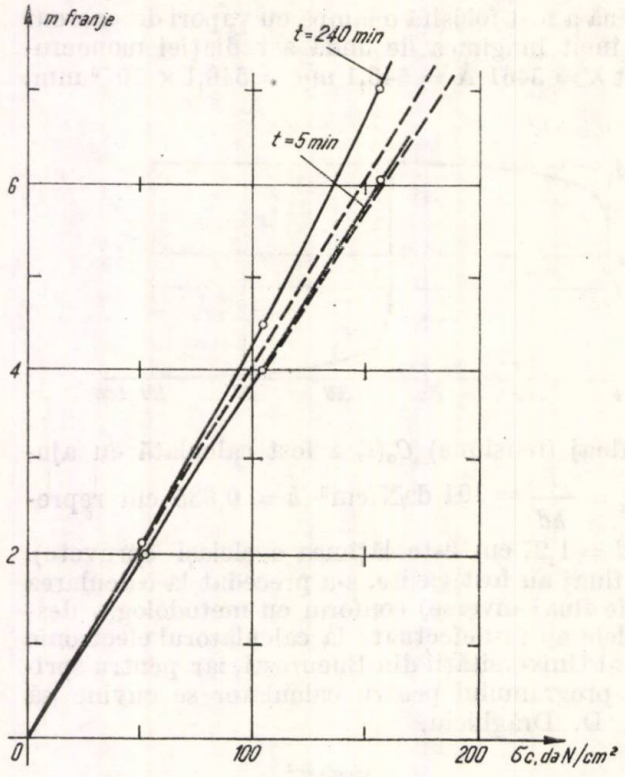


Fig. 5. — Dependența ordinului de izocromată m de tensiunea σ_c, pentru valorile timpilor $t = 5$ min. și $t = 240$ min.

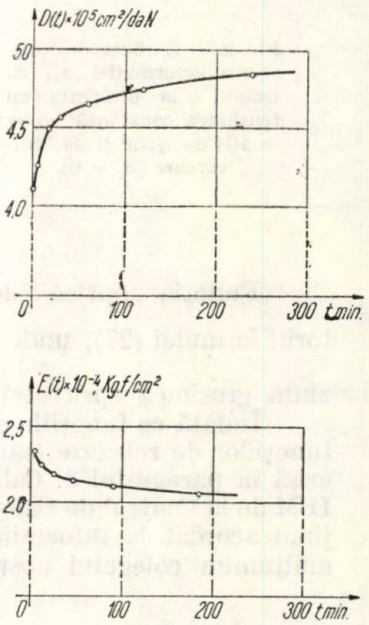


Fig. 6. — Curbele funcțiilor de fluaj $D(t)$ și de relaxare $E(t)$ de întindere

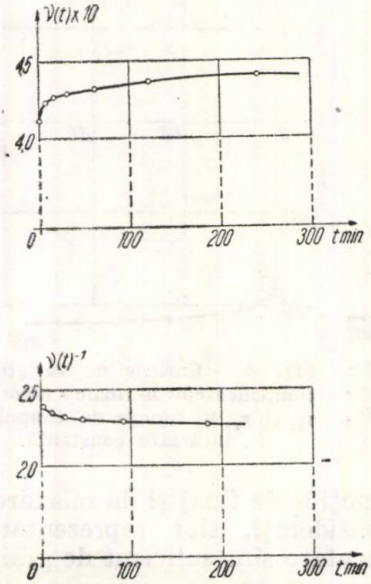


Fig. 7. — Curbele funcțiilor lui Poisson (contracției transversale) de fluaj, directă $\nu(t)$ și inversă $[\nu(t)]^{-1}$.

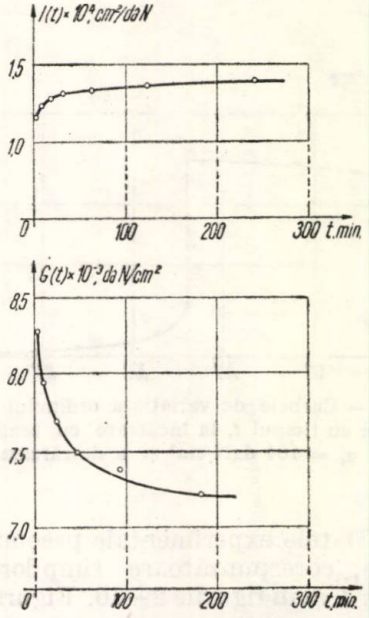


Fig. 8. — Curbele funcțiilor de fluaj $I(t)$ și de relaxare $G(t)$ de forfecare.

și nu necesită comentarii suplimentare. Ne vom opri totuși asupra unor aspecte. În figura 5 se observă variația neliniarității dependenței mărimii optice $m(t)$ de sarcina aplicată P și de timpul de constanță a aceleiași

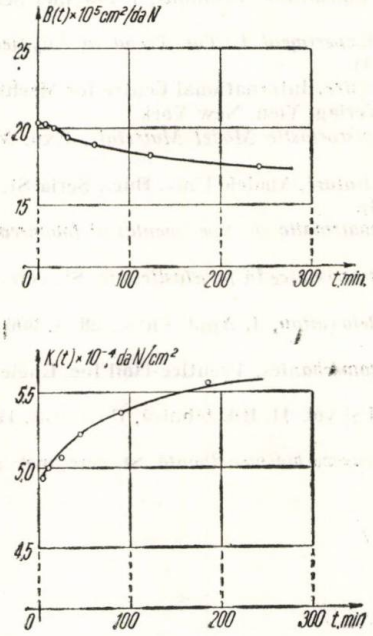


Fig. 9. — Curbele funcțiilor de fluaj $B(t)$ și de relaxare $K(t)$ de volum.

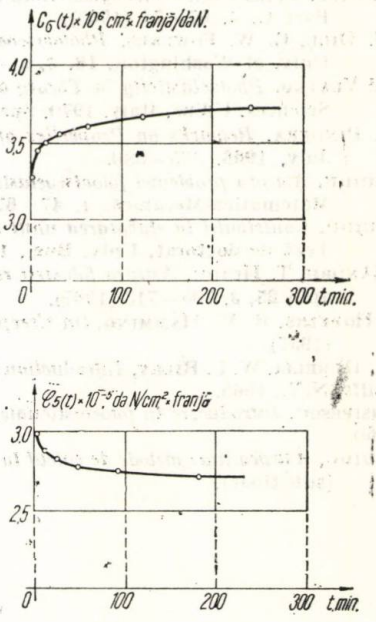


Fig. 10. — Curbele funcțiilor de fluaj optic, directă $C_\sigma(t)$ și inversă $\bar{C}_\sigma(t)$.

sarcini P (pentru $t = 5$ min. și $t = 240$ min.). Se constată că neliniaritatea relației $m \sim \sigma$ (același lucru se poate afirma și despre dependența $\varepsilon \sim \sigma$) crește odată cu creșterea timpului t și cu creșterea sarcinii (solicitării) P. Din aspectul celorlalte curbe (figuri) reiese ca o concluzie mai importantă faptul că atît la timpul inițial($t = 0$), cît și pentru timpi mai mari ($t > 240$ min.) soluția problemei viscoelastice poate fi dedusă din soluția problemei elasticității clasice.

8. CONCLUZII

Modelul matematic și experimental prezentat permite determinarea atît a funcțiilor de fluaj și de relaxare pe o epruvetă supusă la o solicitare de întindere uniaxială, cît și a stării de tensiune și de deformație pe un corp bidimensional din material polimer viscoelastic liniar (ca și epruveta), care posedă suficientă birefringență accidentală atunci cînd este solicitat mecanic. Pentru determinarea funcțiilor „optice"de relaxare sînt necesare experiențe suplimentare în care se consideră deformația constantă.

BIBLIOGRAFIE

1. R. D. MINDLIN, *A Mathematical Theory of Photoviscoelasticity*, J. Appl. Phys., **20**, *2*, 206—216 (1949).
2. E. H. DILL, *On the Phenomenological Rheo-Optical Constitutive Relations*, J. Polymer Science, Part C, *5*, 67—74 (1963).
3. E. H. DILL, C. W. FOWLKES, *Photoviscoelastic Experiment I, The Trend in Engineering*, Univ. of Washington, **16**, *3*, 5—9 (1964).
4. BRČIĆ VLATKO, *Photoelasticity in Theory and Practice*, International Centre for Mechanical Sciences, Udine, Italy, 1970, Springer-Verlag, Vien, New York.
5. J. T. PINDERA, *Remarks on Properties of Photoviscoelastic Model Materials*, Exp. Mech., July, 1966, 375—380.
6. T. HUIDU, *Asupra problemei fotovtscoelasticității liniare*, Analele Univ. Buc., Seria St. nat., Matematică-Mecanică, *1*, 47—67 (1973).
7. T. HUIDU, *Contribuții la elaborarea unui model matematic și experimental al fotomecanicii*, Teză de doctorat, Univ. Buc., 1975.
8. IL. MÂNDRU, T. HUIDU, *Asupra folosirii rășinilor epoxidice în fotoelasticitate*, St. cerc. mec. apl., **25**, *3*, 705—713 (1967).
9. I. L. HOPKINS, R. W. HAMMING, *On Creep and Relaxation*, J. Appl. Phys., **28**, *8*, 906—909 (1957).
10. A. J. DURELLI, W. F. RILEY, *Introduction to Photomechanics*, Prentice-Holl Inc. Englewood Chiffs, N.Y., 1965.
11. N. IOSIPESCU, *Introducere în fotoelasticitate*, Vol. I și vol. II, Ed. tehnică, București, 1958 și 1960.
12. T. HUIDU, *Asupra unei metode de calcul în fotomecanica bidimensională*, St. cerc. mec. aplic. (sub tipar).

ALGORITM ŞI LIMBAJ PENTRU CALCULUL TENSIUNILOR ÎN STRUCTURI IZOTROPE, AXIAL SIMETRICE

de I. CONSTANTINESCU, T. TACU

Institutul politehnic Bucureşti

Se prezintă un algoritm pentru calculul tensiunilor în structuri axial simetrice formate din plăci plane şi curbe subţiri, solicitate la încovoiere statică, în regim elastic. Algoritmul se bazează pe metoda elementelor finite şi pornind de la acesta s-a elaborat un limbaj de programare orientat, ale cărui comenzi şi instrucţiuni se prezintă pe scurt în lucrare.

1. INTRODUCERE

Instalaţiile industriale şi utilajele tehnologice, conţin foarte frecvent elemente care pot fi schematizate, pentru calculul de rezistenţă, ca structuri axial simetrice, formate din plăci plane şi curbe subţiri, asamblate în special prin sudură. Este cazul recipientelor sub presiune, reactoarelor, separatoarelor, schimbătoarelor de căldură, carcaselor unor maşini etc.

Abordarea problemei calculului stărilor de tensiune din structuri avînd forme geometrice oricît de generale, încărcate cu orice fel de sarcini este în principiu posibilă prin folosirea metodei elementelor finite, a metodei relaxării, a diferenţelor finite sau a altor metode numerice, dar se ajunge la necesitatea manipulării unui mare volum de date de intrare.

Dacă generalitatea problemei se restrînge, este posibilă elaborarea unui limbaj de programare orientat, care să permită o introducere mai suplă a datelor cît şi a comenzilor. Se ajunge astfel în situaţia ca utilizatorul să poată scrie lista completă a datelor problemei care îl interesează, chiar dacă nu are cunoştinţe de programare [1].

În lucrarea de faţă se prezintă un astfel de limbaj orientat, destinat programării calculului tensiunilor în structuri izotrope, axial simetrice. Cum însă limbajul nu este decît un instrument de lucru, el trebuie să răspundă cerinţelor algoritmului pe care îl deserveşte, ceea ce dovedeşte că elaborarea algoritmului şi limbajului sînt două laturi inseparabile ale problemei ce se rezolvă.

2. DELIMITAREA PROBLEMEI. IPOTEZE

Structura axial-simetrică pentru care urmează să se determine tensiunile s-a considerat formată din plăci plane şi curbe subţiri, solicitate la încovoiere statică, în regim elastic, în cadrul ipotezelor ce stau la baza teoriei elasticităţii liniare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 2, 1977, P. 193–204

13–c. 7003

Pe de altă parte, s-au făcut ipoteze asupra geometriei și încărcărilor structurii ce se studiază :

a. Structura este izotropă și axial simetrică. În lungul axei longitudinale a structurii pot avea loc variații ale mărimilor de intrare sau de ieșire. În orice punct al structurii tensiunile principale au direcțiile : longitudinală, circumferențială și radială.

b. Structura este formată dintr-un număr oarecare de elemente simple care pot fi de următoarele tipuri : placă plană circulară, placă plană inelară, înveliș cilindric lung, înveliș cilindric scurt, înveliș conic, înveliș sferic cu două margini și înveliș sferic cu o margine (calotă sferică).

Alte tipuri de învelișuri — de exemplu toroidal, eliptic etc. — pot fi calculate prin descompunere în conuri suficient de mici [2].

c. Pentru structura în ansamblu, s-a considerat un sistem staționar de sarcini care, la nivelul fiecărui element , are :

— presiune interioară (sau exterioară) uniformă ;

— forță axială (suplimentară față de cea datorită presiunii uniforme) ;

— forțe centrifuge radiale, ca urmare a rotirii structurii cu viteză unghiulară constantă în jurul axei ;

— variație a temperaturii în lungul generatoarei ;

— variație liniară a temperaturii pe grosimea peretelui.

d. Parametrii geometrici și de material, precum și parametrii sarcinilor sînt constanți pentru un același element dar pot fi diferiți de la un element la altul.

e. Structura este static determinată în lungul axei.

3. ALGORITMUL DE REZOLVARE A STRUCTURILOR IZOTROPE, AXIAL SIMETRICE

Principalele etape ale rezolvării unei structuri sînt :

— descompunerea structurii în elemente simple, de tipurile încorporate în program ;

— scrierea condițiilor de continuitate ale deplasărilor și de echilibru ale eforturilor de legătură, pe contururile de îmbinare ale elementelor ;

— calculul constantelor de integrare din expresiile analitice ale deplasărilor, eforturilor și tensiunilor fiecărui element al structurii ;

— calculul tensiunilor principale.

Algoritmul, limbajul și programul au fost elaborate astfel încît utilizatorul nu efectuează decît prima etapă, celelalte revenind calculatorului. Deci utilizatorul trebuie doar să descrie structura, folosind limbajul elaborat în acest scop, să precizeze datele referitoare la geometria structurii, constantele de material și sarcini și să facă unele opțiuni privind introducerea datelor și redactarea rezultatelor.

Scrierea condițiilor de continuitate s-a făcut, în esență, ca în lucrările [3] și [4].

Dacă pe un contur oarecare se îmbină k_e elemente, ca în figura 1 *a*, după desfacerea legăturilor, pentru conturul respectiv se scriu următoarele condiții de continuitate și de echilibru (vezi fig. 1 *b*) :

a. Egalitatea deplasărilor radiale

$$w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_{k_e}. \tag{1}$$

b. Egalitatea rotirilor normalelor la suprafețele mediane

$$\theta_1 = -\theta_2 = -\theta_3 = \ldots = \theta_{k_e}. \tag{2}$$

c. Ecuația de echilibru a momentelor axiale

$$-M_{x_1} - M_{x_2} + M_{x_3} + \ldots + M_{x_{k_e}} = 0. \tag{3}$$

d. Ecuația de echilibru a forțelor pe direcție radială

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 + \ldots + Q_{k_e} = 0. \tag{4}$$

La scrierea condițiilor (1) — (4) trebuie avute în vedere și sensurile mărimilor respective, așa cum rezultă ele din calcul pentru fiecare element sau cum se modifică aceste sensuri pentru o anumită poziție relativă a elementului față de conturul de îmbinare. În acest scop, s-a adoptat o con-

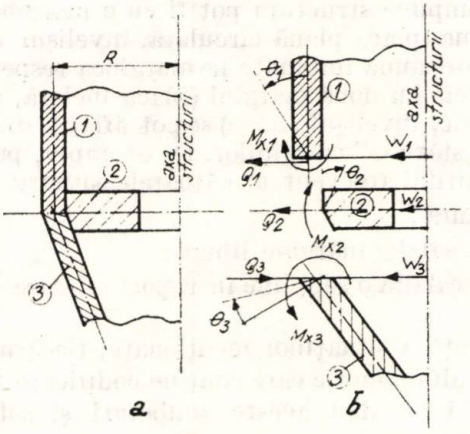


Fig. 1

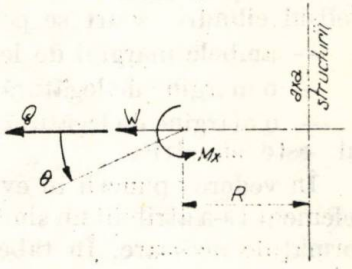


Fig. 2

venție de semne pentru sensurile pozitive ale mărimilor w, θ, M_x, Q, ca în figura 2.

Se menționează că termenii relațiilor (1) — (4) sînt de fapt niște expresii analitice, care conțin un număr de constante de integrare provenite din ecuațiile diferențiale, scrise în deplasări, pentru fiecare tip de element.

Condiția a, de egalitate a deplasărilor radiale, înseamnă scrierea a $k_e - 1$ ecuații, tot atîtea fiind obținute și prin scrierea condiției b. Adău-

gînd la acestea cele două ecuații reprezentate de condițiile c și d, rezultă că pentru un contur pe care se îmbină k_e elemente, se scriu $2\,k_e$ ecuații de continuitate.

Pentru considerarea efectului poziției relative a unui element față de conturul de îmbinare, se introduce un coeficient de „orientare" a ele-

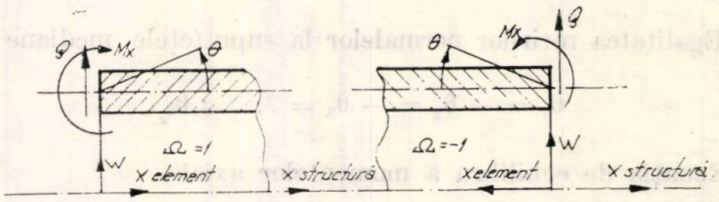


Fig. 3

mentului. Se stabilește că $\Omega = 1$, dacă poziția elementului este „normală" și $\Omega = -1$, dacă poziția elementului este „inversă".

Se poate stabili valoarea lui Ω dacă se admite că axa structurii este orientată (de exemplu de la stînga la dreapta). Atașînd fiecărui element un sens pozitiv în lungul axei proprii, se admite regula că elementul are o orientare „normală" ($\Omega = 1$) dacă sensul axei proprii coincide cu sensul axei structurii, și elementul are o orientare „inversă" ($\Omega = -1$) în caz contrar.

În figura 3 se exemplifică regula de mai sus pentru un înveliș cilindric lung.

Elementele în care se descompune structura pot fi cu o margine sau cu două margini. Cele cu o margine (placa plană circulară, învelișul cilindric lung, calota sferică) vor fi totdeauna îmbinate pe marginea respectivă cu alte elemente ale structurii. Cele cu două margini (placa inelară, învelișul cilindric scurt, învelișul conic, învelișul sferic) se pot afla în diferite situații din punctul de vedere al „stărilor" marginilor. De exemplu, pentru învelișul cilindric scurt se pot întîlni frecvent următoarele situații:

— ambele margini de legătură;

— o margine de legătură și cealaltă margine liberă;

— o margine de legătură și cealaltă o secțiune în raport cu care învelișul este simetric.

În vederea punerii în evidență a situațiilor menționate, fiecărui tip de element i s-a atribuit un simbol alfanumeric care conține codificate toate informațiile necesare. În tabelul 1 se dau aceste simboluri și schițele corespunzătoare situațiilor respective.

Pe schița fiecărui element din tabelul 1 (coloana 6) s-au reprezentat eforturile de legătură, rotirea și deplasarea radială, numai pe marginile de legătură. Marginile fără săgețile eforturilor și deplasărilor, sînt margini libere, iar cele desenate cu linie punct sînt secțiuni în raport cu care elementele sînt simetrice. De asemenea, pe schițele elementelor cu două margini de legătură — de subtipurile 1 și 2 — s-au notat cu I și E cele două margini, în vederea identificării.

Relaţiile de calcul utilizate în program au fost transformate astfel încît toate mărimile referitoare la geometria structurii, sarcini, constante de material, precum şi variabilele, constantele de integrare, eforturile, tensiunile etc., sînt adimensionale.

Ecuaţiile diferenţiale, scrise în deplasări, pentru tipurile de elemente menţionate, sînt de ordinul patru, ceea ce face ca în soluţiile acestora să apară patru constante de integrare. Dacă un element are ambele margini de legătură, pentru el vor trebui determinate patru constante de integrare, iar pentru un element cu o singură margine de legătură, două constante, celelalte două determinîndu-se din condiţii scrise pentru cealaltă margine, independent de ansamblul structurii propriu-zise. Aceasta înseamnă că numărul constantelor de integrare al unei structuri este egal cu dublul numărului marginilor de legătură ale elementelor componente.

Ca urmare a scrierii condiţiilor de continuitate pentru toate contururile de îmbinare ale structurii, se obţine un sistem de ecuaţii algebrice liniare în care necunoscutele sînt constantele de integrare adimensionale.

Fiecare element al structurii este solicitat la întindere (sau compresiune) cu eforturile normale N şi la încovoiere cu momentele M. La acestea se adaugă tensiunile termice de membrană şi cele de încovoiere, care, de obicei, se calculează separat, adică

$$\sigma = \frac{N}{Eh} \pm \frac{6M}{Eh^2} \pm \Delta\sigma, \tag{5}$$

în care E este modulul de elasticitate al materialului elementului respectiv ;

h — grosimea peretelui ;

$\Delta\sigma$ — tensiunile termice.

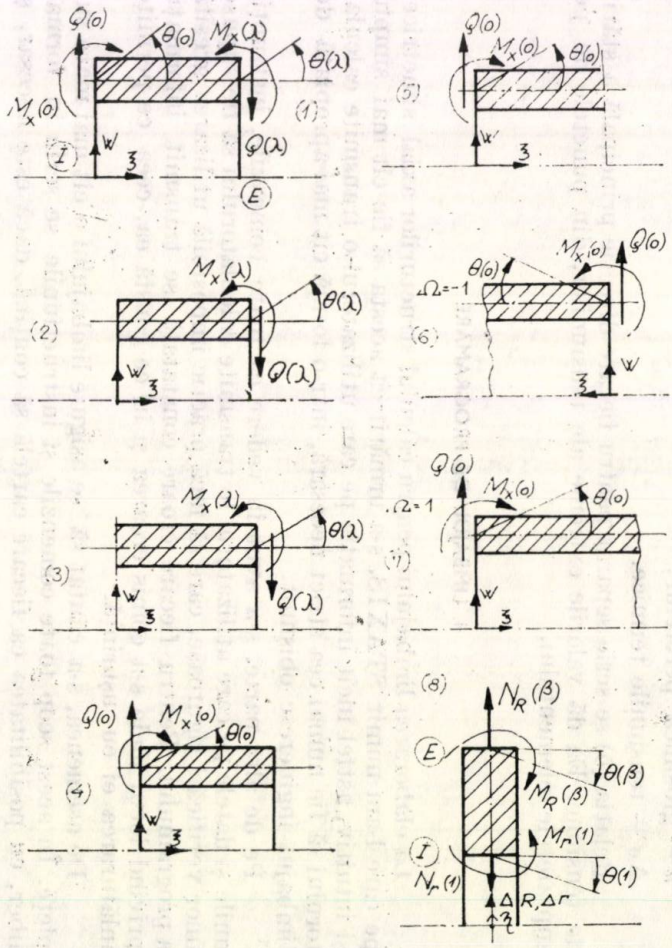
Relaţia (5) se scrie separat pentru fiecare direcţie principală a stării de tensiune. Ea dă valorile extreme ale tensiunilor, din punctele de pe suprafeţele elementului.

4. LIMBAJUL DE PROGRAMARE

La elaborarea limbajului pentru calculul structurilor axial simetrice, pe care l-am numit STAXIS, s-a urmărit ca acesta să fie cît mai simplu şi intuitiv, astfel încît informaţia pe care utilizatorul o transmite calculatorului să fie numai cea strict necesară, într-o formă cît mai apropiată de limbajul ingineresc obişnuit.

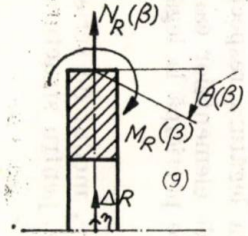
Pe de altă parte, s-a avut în vedere ca toate comenzile, instrucţiunile şi datele pe care utilizatorul le transmite calculatorului să fie supuse unor verificări riguroase, care să facă practic imposibilă utilizarea greşită a programului. Pentru fiecare eroare constatată se transmit informaţii privind locul unde s-a comis eroarea şi în ce constă ea, ceea ce permite înlăturarea ei cu uşurinţă.

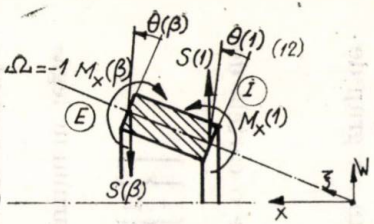
De asemenea, s-a căutat să se asigure limbajului o cît mai mare suplеţe. În acest scop toate comenzile şi instrucţiunile se scriu în format liber, cu posibilitatea ca fiecare cartelă să conţină, dacă este necesar, şi

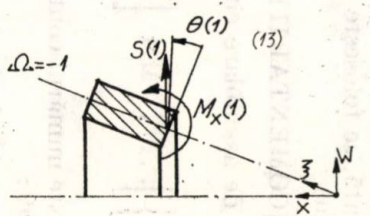


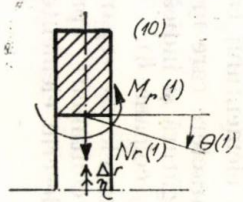
Tabelul 1

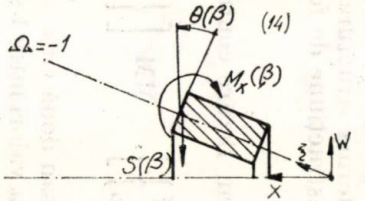
Denumirea elementului	Simbolul elementului		Codul elementului		Schiţa elementului
	Tipul elementului	Indicii de „stare" ai marginilor	Tipul	Subtipul	
1	2	3	4	5	6
Înveliş cilindric scurt	CIS	1 1 0 1 2 1 1 0 1 2	1	1 3 4 5 6	(1) (2) (3) (4) (5)
Înveliş cilindric lung	CIL	x 1 1 x	2	3 4	(6) (7)
Placă plană inelară	PLI	1 1 0 1 1 0	3	1 3 4	(8) (9) (10)
Placă circulară	PLA	—	4	3	(11)
Înveliş conic	CON	x 1 1 x 0 1 x 1 0 1 1 x 0 1 x 1 0 x	5	1 3 4 2 5 6	(12) (13) (14) (15) (16) (17)
Înveliş sferic cu o margine	SFC	x 1 1 x	6	3 4	(18) (19)
Înveliş sferic cu două margini	SFE	x 1 1 x 0 1 x 1 0 1 1 x 0 1 x 1 0 x	7	1 3 4 2 5 6	(20) (21) (22) (23) (24) (25)

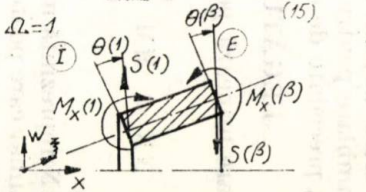

$N_R(\beta)$
$\theta(\beta)$
$M_R(\beta)$
R
(9)

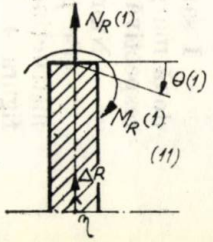

$\Omega=-1$
$M_x(\beta)$
$\theta(\beta)$
S(1)
$\theta(1)$
(12)
I
E
$M_x(1)$
$S(\beta)$
ξ
W
X

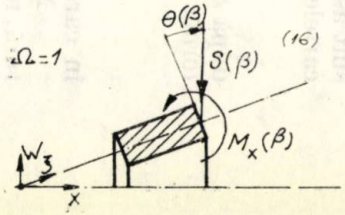

$\Omega=-1$
S(1)
$\theta(1)$
(13)
$M_x(1)$
ξ
W
X

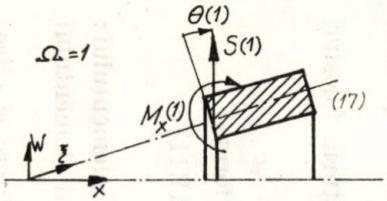

(10)
$M_r(1)$
Nr(1)
$\theta(1)$
r

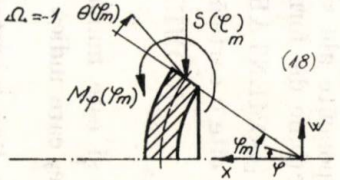

$\Omega=-1$
$\theta(\beta)$
(14)
$M_x(\beta)$
$S(\beta)$
ξ
W
X

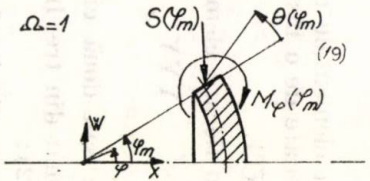

$\Omega=-1$
I
$\theta(1)$
S(1)
$\theta(\beta)$
E
(15)
$M_x(1)$
$M_x(\beta)$
W
ξ
$S(\beta)$
X

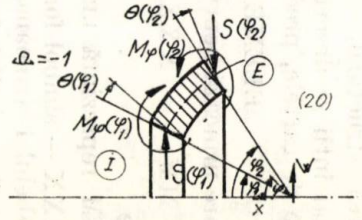

$N_R(1)$
$\theta(1)$
$M_R(1)$
(11)
R
η

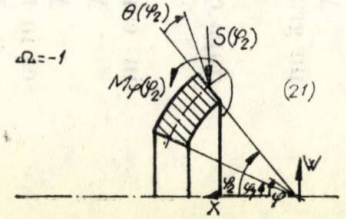

$\Omega=1$
$\theta(\beta)$
$S(\beta)$
(16)
$M_x(\beta)$
W
ξ
X

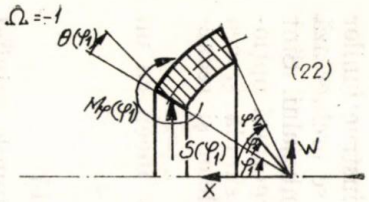

$\Omega=1$
$\theta(1)$
S(1)
$M_x(1)$
(17)
W
ξ
X

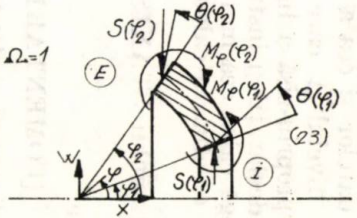

$\Omega=-1$
$\theta(\varphi_m)$
$S(\varphi_m)$
(18)
$M_\varphi(\varphi_m)$
W
φ_m
X
φ

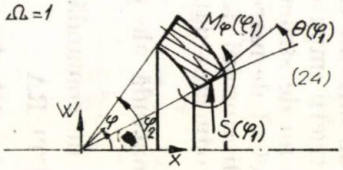

$\Omega=1$
$S(\varphi_m)$
$\theta(\varphi_m)$
(19)
$M_\varphi(\varphi_m)$
W
φ_m
φ
X

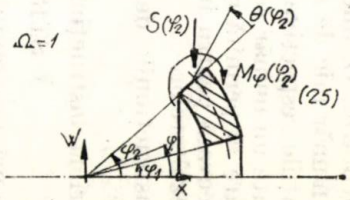

$\Omega=-1$
$\theta(\varphi_2)$
$S(\varphi_2)$
$M_\varphi(\varphi_2)$
E
(20)
$\theta(\varphi_1)$
$M_\varphi(\varphi_1)$
I
$S(\varphi_1)$
φ_2
φ_1
W
X


$\Omega=-1$
$\theta(\varphi_2)$
$S(\varphi_2)$
$M_\varphi(\varphi_2)$
(21)
W
X
φ


$\Omega=-1$
$\theta(\varphi_1)$
(22)
$M_\varphi(\varphi_1)$
$S(\varphi_1)$
φ_1
W
X


$\Omega=1$
$S(\varphi_2)$
$\theta(\varphi_2)$
$M_\varphi(\varphi_2)$
E
$M_\varphi(\varphi_2)$
$\theta(\varphi_1)$
(23)
W
φ_2
φ
φ_1
I
$S(\varphi_1)$
X


$\Omega=1$
$M_\varphi(\varphi_1)$
$\theta(\varphi_1)$
(24)
W
φ_2
φ
$S(\varphi_1)$
X


$\Omega=1$
$S(\varphi_2)$
$\theta(\varphi_2)$
$M_\varphi(\varphi_2)$
(25)
W
φ_2
φ
φ_1
X

un comentariu. Ordinea de introducere a datelor şi cea a instrucţiunilor are un număr mic de restricţii impuse de nivelul la care se prelucrează informaţiile respective şi nu de structura propriu-zisă a limbajului. Sînt prevăzute un număr suficient de mare de declaraţii şi instrucţiuni opţionale, care să permită utilizatorului să aleagă calea cea mai simplă şi cea mai adecvată pentru introducerea datelor, efectuarea calculelor şi redactarea rezultatelor.

Instrucţiunile de comandă ale programului STAXIS încep cu un asterisc (*).

Prima instrucţiune de comandă este

* STRUCTURA [COMENTARII]

Ea cheamă programul care citeşte şi prelucrează instrucţiunile privind descrierea structurii.

Mai întîi se descriu elementele componente ale structurii, folosind un grup de cartele, precedate de o instrucţiune de forma

ELEMENTE [COMENTARII]

după care urmează pentru fiecare element cîte o cartelă de forma

MM XXX YYY [COMENTARII]

în care

MM reprezintă una sau două cifre şi este numărul elementului;

XXX — simbol format din trei litere, care indică tipul elementului ca în tabelul 1 (coloana 2);

YYY — simbol format din două sau trei caractere (litere şi cifre) care indică subtipul elementului ca în tabelul 1 (coloana 3).

Pentru descrierea legăturilor, adică a modului în care elementele sînt asamblate pentru a forma structura dată, se foloseşte un alt grup de cartele, precedate de o instrucţiune de forma

LEGĂTURI [COMENTARII]

după care urmează pentru fiecare contur de asamblare cîte o cartelă de forma

$$\text{NN} \quad \text{MM} \left[\begin{Bmatrix} \text{I} \\ \text{E} \end{Bmatrix}\right], \quad \text{MM} \left[\begin{Bmatrix} \text{I} \\ \text{E} \end{Bmatrix}\right], \ldots, \quad \text{MM} \left[\begin{Bmatrix} \text{I} \\ \text{E} \end{Bmatrix}\right]$$

în care

NN reprezintă una sau două cifre şi este numărul conturului de legătură, număr care poate lua valori între 1 şi 99;

MM — numărul elementului care participă la legătura respectivă;

I sau E sînt caractere care urmează numerele elementelor care au două margini de legătură şi indică marginea care participă la legătura respectivă (tabelul 1, coloana 6).

Numerele elementelor se separă prin virgulă.

Se prezintă în continuare, spre exemplificare, modul de scriere al instrucţiunilor care descriu elementele şi legăturile, pentru structura din figura 4.

După descompunerea structurii în elemente simple, acestea se numerotează (cifrele înscrise în cerculețe) într-o ordine oarecare. Cu ajutorul

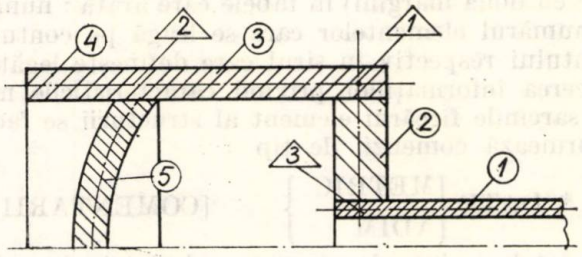


Fig. 4

tabelului 1 se identifică fiecare element și se determină simbolul corespunzător:

ELEMENTE

1 CIL 1X
2 PLI 11
3 CIS 11
4 CIS 01
5 SFC X1

Dacă se comit erori la scrierea tipurilor și subtipurilor elementelor se tipărește un I sub caracterul greșit al simbolului și pe rîndul următor se scrie

* * ECMM

în care MM este un număr care indică, în lista mesajelor de eroare, tipul erorii. Nu se semnalează decît o eroare într-o instrucțiune.

Se numerotează apoi (cifrele înscrise în triunghiuri pe figura 4), într-o ordine oarecare, contururile pe care se „leagă" elementele pentru a constitui structura dată. Instrucțiunile care descriu legăturile structurii luate spre exemplificare vor fi

LEGĂTURI

1 3E, 2E
2 4, 3I, 5
3 1, 2I

Pentru elementele care au două margini de legătură (în cazul de față 2 și 3) se identifică, cu ajutorul schițelor din tabelul 1, dacă o anumită margine este de tip I sau de tip E. În cadrul fiecărei instrucțiuni ordinea în care sînt scrise numerele elementelor este oarecare, adică, de exemplu, instrucțiunile respective se puteau scrie la fel de bine și sub forma

LEGĂTURI

1 2E, 3E
2 4, 5, 3I sau 3I,4, 5 sau 5, 4, 3I etc.
3 21, 1

ordinea în care sînt așezate cartelele putînd fi și ea schimbată.

În urma analizei legăturilor, programul semnalează dacă nu sînt elemente fără legături sau dacă sînt scrise pentru un element mai multe legături decît cele corecte.

Dacă nu sînt erori, calculatorul completează pentru fiecare element cîte o linie (dacă elementul este cu o margine) sau cîte două linii (dacă elementul este cu două margini) în tabele care arată : numărul conturului de legătură, numărul elementelor care se leagă pe conturul respectiv și rangul elementului respectiv în șirul care definește legătura.

Introducerea informațiilor privind caracteristicile materialului, dimensiunile și sarcinile fiecărui element al structurii se face prin instrucțiunile care urmează comenzii de tip

$$* \text{ DATE } \begin{Bmatrix} \text{METRIC} \\ \text{ADIM} \end{Bmatrix} \quad [\text{COMENTARII}]$$

care arată că datele se introduc în sistemul metric de unități de măsură sau ca mărimi adimensionale. Urmează o instrucțiune opțională de tipul

$$\text{CONSTANTE} \quad MM = YYY, \quad MM = YYY, \ldots, MM = YYY$$

care permite definirea acelor parametri care au aceeași valoare pentru toate elementele structurii. MM reprezintă una sau două cifre și este rangul parametrului (în lista de parametri definită în programul STAXIS) a cărui valoare urmează după semnul = și este reprezentată prin semnele YYY. Această valoare se poate scrie ca valoare întreagă sau zecimală, în cod F sau cod E. De exemplu, instrucțiunea

$$\text{CONSTANTE } 1 = 0.3,\ 2 = 12.\text{E}-6,\ 3 = 2.1\text{E}6,\ 4 = 0.0078$$

arată că pentru o structură toate elementele au pentru primul parametru valoarea 0.3, pentru al doilea valoarea 12×10^{-6} etc. Pentru celelalte valori ale parametrilor, specifice fiecărui element al structurii, se scriu instrucțiuni de forma

$$NN \quad MM = YYY,\ MM = YYY, \ldots,\ MM = YYY$$

cîte una pentru fiecare element, în care :

NN reprezintă una sau două cifre și este numărul elementului ;

MM — rangul parametrului în lista de parametri ai elementului de tipul la care se face referirea ;

YYY — valoarea parametrului (întreagă sau zecimală).

Urmează comanda

$$* \text{ REZOLVA} \qquad [\text{COMENTARII}]$$

care transmite calculatorului informația că s-a terminat șirul instrucțiunilor care au definit structura și că se pot efectua calculele propriu-zise.

Instrucțiunile care urmează sînt de tipul

$$NN \begin{Bmatrix} \text{TT} \\ \text{TM} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \text{PASI} & XX, YYY, ZZZ \\ \text{ABSC} & VVV, VVV, \ldots, VVV \end{Bmatrix}$$

prin care se transmit informații privind elementele și punctele în care se calculează tensiunile, precum și opțiunea dacă se tipăresc toate tensiunile calculate sau dintre acestea numai cele maxime.

NN reprezintă una sau două cifre și este numărul elementului ;

TT — opțiune prin care se cere tipărirea tuturor tensiunilor ;

TM — opțiune de tipărire numai a tensiunilor maxime ;

PASI — opțiune de calcul a tensiunilor în XX (număr cu una sau două cifre) secțiuni avînd abscise începînd cu valoarea YYY (valoare

întreagă sau zecimală) la care se adaugă pasul ZZZ (valoare întreagă sau zecimală) de XX — 1 ori;

ABSC — opțiune de calcul a tensiunilor în secțiuni avînd abscisele VVV (valoare întreagă sau zecimală).

Acest tip de instrucțiune se poate referi de mai multe ori, succesiv, la un același element, după cum pot fi și elemente la care nu se face nici o referire, ceea ce permite realizarea unor condiții și forme diversificate de redactare a rezultatelor, cît mai adecvate unei anumite necesități.

După epuizarea șirului de instrucțiuni, pot urma noi seturi de cartele, începînd cu comanda * DATE urmată de instrucțiuni corespunzătoare unor noi variante de calcul a structurii definite după declarațiile ELEMENTE și LEGĂTURI. Pentru aceasta nu este necesară reintroducerea valorilor tuturor parametrilor, ci numai ale acelora care se modifică față de situația precedentă.

În ceea ce privește instrucțiunile privind redactarea rezultatelor, ele se scriu în întregime, corespunzător noilor condiții.

În continuare pot urma alte structuri, pentru fiecare din ele fiind necesară, la început , comanda * STRUCTURA.

Pentru a preciza că lucrul cu programul STAXIS s-a terminat, urmează o ultimă cartelă cu comanda

* STOP

Un set complet de instrucțiuni poate fi următorul, pentru structura reprezentată în figura 4 :

```
* STRUCTURA CU 5 ELEMENTE (EXEMPLU)
  ELEMENTE
  1 CIL 1X
  2 PLI 11
  3 CIS 11
  4 CIS 01
  5 SFC X1
  LEGĂTURI
  1 3E, 2E
  2 4, 3I, 5
  3 1, 2I
* DATE METRIC
  CONSTANTE 1 = 0.3, 3 = 2.1E6, 10 = 1
  1 5 = 120, 6 = 2
  2 5 = 200,6 = 6., 7 = 120, 10 = 1
  3 5 = 200, 6 = 3.5, 7 = 300
  4 5 = 200, 6 = 3., 7 = 100, 10 = 0.
  5 5 = 800, 6 = 2,5, 8 = 0.886
* REZOLVĂ STRUCTURA INIȚIALĂ
  1 TT PASI 30, 0.1, 0.5
  2 TT ABSC 0., 0.5, 1, 1.5
  5 TM PASI 10, 0, 0.1
  5 TT ABSC 0., 0.3, 0.35, 0.6
* DATE METRIC MODIFICATE
  2 6 = 6.5
* REZOLVĂ
  1 TT PASI 20., 0., 0.2
  2 TM ABSC 0, 0.2, 0.5, 0.55
  5 TT ABSC 0, 0.1, 0.7, 0.8
* STOP
```

5. UTILIZAREA PROGRAMULUI STAXIS

Programul STAXIS poate fi introdus pe orice calculator care are un compilator FORTRAN. Pînă în prezent s-a rulat pe calculatoarele IBM 1130 și Felix C-256 ale centrului de calcul al Institutului politehnic București.

Posibilitățile de utilizare ale programului STAXIS sînt legate în primul rînd de verificarea unor structuri axial simetrice care se încadrează în ansamblul ipotezelor care au delimitat rezolvarea problemei abordate. Rezolvînd însă un număr de variante ale unei structuri, se pot obține informații privind geometria optimă a acesteia.

Pe de altă parte, programul STAXIS poate fi utilizat și pentru calculul unor structuri care chiar dacă nu sînt axial simetrice se pot reduce, într-o primă aproximație, la astfel de condiții. Este cazul acelor structuri care au unele discontinuități locale, în ansamblu construcția fiind axial simetrică.

De asemenea, sînt unele structuri axial nesimetrice, al căror studiu poate fi redus la acela al mai multor probleme axial simetrice.

Utilizarea programului STAXIS este legată de unele restricții privind, pe de o parte, sintaxa și succesiunea instrucțiunilor, iar pe de alta numărul maxim al elementelor structurii care se calculează. Dacă restricțiile aparținînd primei categorii sînt specifice limbajului și provin din necesitatea ca pentru calculator să nu rămînă nimic neprecizat, chiar dacă este evident, cea de a doua este legată de tipul calculatorului și în special de capacitatea memoriei sale.

6. CONCLUZII

Testările și verificările experimentale efectuate au arătat că metoda de calcul, algoritmul, limbajul și programul STAXIS sînt adecvate determinării tensiunilor în structuri izotrope, axial simetrice, formate din plăci plane și curbe subțiri.

Simplitatea și supleţea limbajului permit ca programul STAXIS să poată fi utilizat de persoane care nu au cunoștințe de programare, efortul necesar pentru însușirea modului de lucru fiind minim.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1975; în formă refăcută la 14 iulie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Ch. Massonnet, G. Deprez, R. Maquoi, R. Muller, G. Fonder, *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, București, Edit. tehnică, 1974.
2. H. Kraus, *Thin Elastic Shells*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
3. S. D. Ponomariov, V. L. Biderman, K. K. Liharev, V. M. Macușin, N. N. Malinin, V. L. Feodosiev, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1963.
4. I. Constantinescu, *Stări de tensiune în recipientele cu două mantale cilindrice concentrice și fund plan, solicitate cu presiune interioară*, St. cerc. mec. apl., **32**, 1309–1321, (1973).

ASUPRA PRESIUNII ÎN MAȘINILE DE EXTRUDERE CU DISC, TIP CON-PLACĂ

de GH. IORDACHE

Institutul politehnic București
Catedra utilaj chimic

Pe baza analizei dimensionale și a stabilirii vitezei de transport a materialului se obține o relație pentru determinarea presiunii în fanta mașinii de extrudere cu disc, tip con-placă.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Apariția eforturilor unitare normale, ca însoțitoare ale eforturilor de forfecare (efectul Weissenberg), în fluide viscoelastice, în curgerea circulară, este însoțită de apariția unei presiuni centripete. Utilizarea acestui efect la extruderea materialelor plastice a impus cunoașterea mărimii acestei presiuni, necesară atît pentru dimensionarea mecanică a organelor de lucru, cît mai ales pentru cunoașterea posibilităților de realizare a unui produs de bună calitate.

Este cunoscut că mașinile care utilizează acest efect, mașinile de extrudere cu disc, dezvoltă o presiune redusă, 5—7 da N/cm² [1]—[4], insuficientă pentru extruderea profilelor complexe. De aceea mașina de extrudere cu disc este folosită pentru operații de colorare, granulare și extrudere de profile simple (bară, furtun) [2], [4]—[7]. În ultimul timp mașina de extrudere cu disc a fost utilizată, cu bune rezultate, ca agregat de plastifiere pe mașini de injecție [8], [9]. Pentru obținerea unor presiuni ridicate, necesare extruderii profilelor complexe și peliculelor, s-a realizat mașina de extrudere combinată, formată dintr-o mașină cu disc la care s-a atașat fie un melc scurt [10], fie o pompă cu roți dințate [11]. S-au obținut astfel presiuni de 35—100 da N/cm² în primul caz și 300 da N/cm² în al doilea caz.

Pînă în prezent, calculul presiunii, în zona de plastifiere, a mașinii de extrudere cu disc nu poate fi făcut cu exactitate. Încercările de determinare a acestei mărimi au avut ca rezultat obținerea unor relații semiempirice și teoretice, dar acestea fie că conțin un parametru ce cu greu ar putea fi determinat [3], [4], [12], fie că nu țin seama de componentele normale ale tensorului eforturilor unitare [13], componente ce stau la baza efectului ce generează presiunea centripetă.

Cercetarea experimentală a pus în evidență atît valoarea pe care o atinge această mărime în diferite condiții de lucru, cît și parametrii prin-

cipali de care depinde. S-a constatat astfel că presiunea, în zona de plastifiere a mașinii de extrudere cu disc, crește cu creșterea turației și scade cu creșterea fantei sau temperaturii [3]. S-a pus de asemenea în evidență, pe cale experimentală, că presiunea crește continuu către centrul discului, unde atinge valoarea maximă [3]. Valoarea presiunii materialului mai depinde și de mărimea orificiului de ieșire [2].

Între cele două tipuri, principial diferite, de mașini de extrudere cu disc, tipul con-placă și placă-placă, valoarea mai mare a presiunii se atinge în primul caz [14], acesta fiind și unul din motivele pentru care acest tip este mai des utilizat.

În continuare o să arătăm cum poate fi obținută o relație de calcul a presiunii, în zona de plastifiere, pentru mașina de extrudere tip con-placă.

2. STABILIREA EXPRESIEI BAROPANTEI

Pentru stabilirea formei generale a relației baropantei s-a folosit metoda analizei dimensionale [15].

Mărimile care, probabil, intervin în relație, în afară de baropantă, sînt viteza de transport a materialului, viscozitatea și fanta dintre disc și stator, deci patru la număr ($m = 4$). Pentru fenomenele mecanice mărimile fundamentale ale sistemului de unități sînt trei : lungime, masă, timp ($n = 3$). Folosind teorema π, grupurile ce se pot forma sînt $m - n = 4 - 3 = 1$.

Acest grup are următoarea formă :

$$\pi_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^a (v_{tr})^b \eta_a^c h^d . \tag{1}$$

După determinarea valorii exponenților* din relația (1) se obține

$$\pi_1 = \text{const} = \frac{v_{tr}\eta_a}{\bar{p}h^2} \tag{2}$$

---

* Dimensional relația (1) are următoarea formă :

$$\pi_1 = (\mathrm{ML^{-3}})^a (\mathrm{LT^{-1}})^b (\mathrm{MTL^{-2}})^c \mathrm{L}^d.$$

Grupînd termenii se obține :

$$\pi_1 = \mathrm{M}^{a+c}\mathrm{L}^{-3a+b-2c+d}\mathrm{T}^{-b+c}.$$

Condiția ca grupul să fie adimensional este ca exponentul fiecărei mărimi fundamentale să fie zero, adică

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ -3a + b - 2c + d &= 0, \\ -b + c &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul, în raport cu una din necunoscute, se obține :

$$a = -c,\ b = c,\ d = -2c.$$

Revenind la relația (1), în care baropanta a fost notată cu $\bar{p} = \partial p/\partial r$, rezultă

$$\pi_1 = (\bar{p})^c (V_{tr})^c \eta_a^c h^{-2c} = \left(\frac{v_{tr}\eta_a}{\bar{p}h^2}\right)^c .$$

Funcția cea mai simplă se obține pentru $c = 1$ și are forma prezentată de relația (2)

sau, considerînd constanta egală cu unitatea, rezultă expresia

$$\bar{p} = \frac{v_{tr}\eta_a}{h^2}. \tag{3}$$

Relația (3) conține aceleași mărimi ca și relația obținută pentru baropanta mașinii de extrudere cu melc [16].

Rămîne de stabilit, pe cale experimentală, dacă constanta este egală cu unitatea, cum s-a presupus, sau are o altă valoare.

3. DETERMINAREA VITEZEI DE TRANSPORT A MATERIALULUI ÎN FANTĂ

Deosebirea între curgerea în sistemele con-placă și placă-placă constă în valoarea diferită a reopantei. În timp ce în primul caz, atît timp cît unghiul dintre con-placă are valori reduse, reopanta poate fi considerată constantă, în al doilea caz reopanta variază în funcție de rază.

Reopanta, în sistemul con-placă, pentru unghiuri mici, maxim 4°, este [14]:

$$\mathcal{R} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\varphi}. \tag{4}$$

În cazul curgerii unidimensionale în jurul unei axe de rotație tensorul eforturilor unitare, în coordonate cilindrice, are expresia [14]

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} & 0 \\ \tau_{z\theta} & \tau_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{rr} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Din punct de vedere reologic componentele normale ale tensorului eforturilor unitare nu au semnificație reologică. Alături de componenta de forfecare, $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$, s-a dovedit că diferențele componentelor normale $\tau_{\theta\theta} - \tau_{zz}$ și $\tau_{zz} - \tau_{rr}$ sînt mărimi deosebit de importante, fiind singurele care au semnificație reologică [14].

Componentele tensorului eforturilor unitare sînt date de relațiile [17]:

$$\tau_{\theta\theta} = -\eta_a\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\bar{v})\right]. \tag{6}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\eta_a\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right], \tag{7}$$

$$\tau_{zz} = -\eta_a\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla\bar{v})\right], \tag{8}$$

$$\tau_{rr} = -\eta_a\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla\bar{v})\right], \tag{9}$$

în care

$$(\nabla \bar{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{10}$$

şi

$$\eta_a = m\left|\sqrt{\frac{1}{2}(\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}})}\right|^{\nu-1}, \tag{11}$$

unde

$$(\bar{\bar{\Delta}} : \bar{\bar{\Delta}}) = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta z}\right)^2\right] +$$

$$+\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2. \tag{12}$$

Experimental s-a dovedit că o particulă de material termoplastic se deplasează, în fanta dintre statorul şi rotorul maşinii de extrudere cu disc, de la periferie către centrul discului, după o spirală alungită (fig. 1), deoarece $v_\theta \gg v_r$ [11]. Se consideră că influenţa componentei v_z asupra vitezei de transport a materialului este neglijabilă, deoarece fanta dintre con şi placă este mică, iar valoarea acestei componente este redusă în comparaţie cu a vitezei de transport. Această componentă dă naştere unei curgeri transversale [11], care produce o amestecare intensă a materialului, dar nu participă la transportul materialului în fantă.

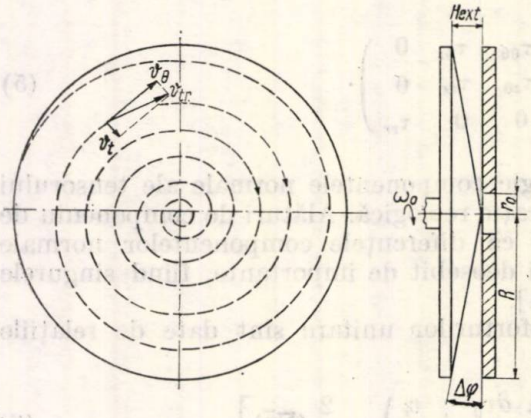


Fig. 1

Folosind relaţiile (6), (8) şi (9), se pot determina expresiile celor două diferenţe ale componentelor normale. După efectuarea operaţiilor respective, neglijind termenii ce conţin mărimea v_z, conform ipotezei, se obţin :

$$\tau_{\theta\theta} - \tau_{zz} = -2\eta_a\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right). \tag{13}$$

$$\tau_{zz} - \tau_{rr} = 2\eta_a\frac{\partial v_r}{\partial r}. \tag{14}$$

Se utilizează pentru viscozitate expresia empirică a lui Ostwald-de Waele [16],

$$\tau_a = m\mathscr{R}^{\nu-1}, \tag{15}$$

iar pentru cele două diferențe, relații asemănătoare celei anterioare și care au forma [14], [18], [19],

$$\tau_{\theta\theta} - \tau_{zz} = \alpha\mathscr{R}^{\beta}, \tag{16}$$

$$\tau_{zz} - \tau_{rr} = \alpha^*\mathscr{R}^{\beta^*}. \tag{17}$$

Din egalarea expresiilor (13) și (16), respectiv (14) și (17) cu utilizarea relațiilor (4) și (15), se obțin derivatele componentelor vitezei pe direcțiile θ și r, acestea fiind:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\alpha}{2m}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\beta-\nu+1} r - v_r, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\alpha^*}{2m}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\beta^*-\nu+1}. \tag{19}$$

Integrînd expresia (19) între limitele 0 și R rezultă

$$v_r = -\frac{\alpha^*}{2m}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\beta^*-\nu+1} R, \tag{20}$$

semnul minus indicînd sensul de deplasare a materialului, de sens invers axei r, de la periferie spre centrul discului.

Introducînd ultima relație obținută în relația (18) și integrînd în limitele 0 și 2π, se obține

$$v_\theta = \frac{\pi}{m}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{1-\nu}\left[\alpha^*\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\beta^*} R - \alpha\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\beta} r\right]. \tag{21}$$

Mărimea vitezei de transport poate fi determinată cu relația

$$v_{tr} = (v_r^2 + v_\theta^2)^{1/2}. \tag{22}$$

După înlocuirile respective în relația (22) se obține

$$v_{tr} = \left[\frac{\pi^2\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{2(\beta-\nu+1)} r^2 - \frac{2\pi^2\alpha\alpha^*}{m^2}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\beta^*+\beta+2(1-\nu)} Rr + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^{*2}}{4m^2}\left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{2(\beta^*-\nu+1)} (4\pi^2+1) R^2\right]^{1/2}. \tag{23}$$

Ţinînd seama de mărimile constante din relaţia (23) se observă că aceasta mai poate fi scrisă sub forma

$$v_{tr} = (ar^2 - br + c)^{1/2}. \tag{24}$$

4. STABILIREA RELAŢIEI DE CALCUL A PRESIUNII ÎN FANTA DINTRE CON ŞI PLACĂ

Cunoscînd expresia vitezei de transport a materialului şi folosind relaţia stabilită pentru baropantă, relaţia (3), se obţine

$$\bar{p} = \frac{(ar^2 - br + c)^{1/2}}{H_{med}^2} m \left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\nu-1}, \tag{25}$$

în care s-a ţinut seama de relaţiile (4) şi (15), iar pentru fanta dintre con şi placă a fost folosită valoarea medie, dată de relaţia

$$H_{med} = \frac{H_{ext}}{2}. \tag{26}$$

Pentru determinara mărimii presiunii se va integra expresia (25) în care singura variabilă este raza discului. Deci se poate scrie

$$p = \frac{m}{H_{med}^2} \left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\nu-1} \int_R^{r_0} (ar^2 - br + c)^{1/2}\, dr. \tag{27}$$

După integrare* se obţine

$$p = \frac{m}{H_{med}^2} \left(\frac{\omega_0}{\Delta\varphi}\right)^{\nu-1} \left| \sqrt{a} \left\{ \frac{1}{2}\left(r - \frac{b}{2a}\right)^2 \left[\left(r - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]^{1/2} \right\} - \sqrt{a}\, \frac{b^2 - 4ac}{8a^2} \ln \left\{ r - \frac{b}{2a} + \left[\left(r - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]^{1/2} \right\} \right|_R^{r_0}, \tag{28}$$

* Pentru rezolvarea integralei din relaţia (27) se notează [20]:

$$I = \int (ar^2 - br + c)^{1/2}\, dr = \int \left\{ a \left[\left(r - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \right\}^{1/2} dr =$$

$$= \sqrt{a} \int \left\{ \left(r - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2} dr.$$

Se notează

$$u = r - \frac{b}{2a} \quad \text{şi} \quad k = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)^{1/2}.$$

Se obţine

$$I = \int (u^2 - k^2)^{1/2}\, du = \frac{u^2}{2} (u^2 - k^2)^{1/2} - \frac{k^2}{2} \ln \left[u + (u^2 - k^2)^{1/2} \right],$$

Revenind la substituţia utilizată, se obţine expresia dintre bare, din relaţia (28).

în care

$$a = \frac{\pi^2 \alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega_0}{\Delta \varphi} \right)^{2(\beta - \nu + 1)}, \tag{29}$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{\alpha^*}{\alpha} \left(\frac{\omega_0}{\Delta \varphi} \right)^{\beta^* - \beta} R, \tag{30}$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\left[\frac{\alpha^*}{2\pi\alpha} \left(\frac{\omega_0}{\Delta \varphi} \right)^{\beta^* - \beta} R \right]^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{b}{2a} \right)^2. \tag{31}$$

În cazul unor valori cunoscute se poate determina valoarea maximă a presiunii, din zona de plastifiere, care are expresia

$$p = \frac{m}{H_{\text{med}}^2} \left(\frac{\omega_0}{\Delta \varphi} \right)^{\nu - 1} [I(r_0) - I(R)]. \tag{32}$$

Deoarece $r_0 < R$, presiunea va fi negativă, aceasta datorîndu-se tot deplasării în sens invers, față de axa r, a materialului. Se va considera presiunea în valoare absolută.

5. CONCLUZII

Relația stabilită pentru determinarea presiunii materialului în mașina de extrudere cu disc, tip con-placă, ține seama atît de caracteristicile geometrice ale organelor de lucru, cît și de caracteristicile funcționale și de material. Constantele de material din relația (11) pot fi ușor determinate pe baza reogramelor, efort unitar de forfecare — reopantă, trasate pentru mai multe temperaturi . Constantele din relațiile (16) și (17) necesită utilizare a unor viscozimetre con-placă și placă-placă, cu măsurarea împingerii axiale [14],din care, pînă în prezent, nu există nici un exemplar în țară.

Relația obținută [rel. (32)] este utilă pentru proiectarea mașinilor de extrudere cu disc, tip con-placă, utilaje ce își fac tot mai mult loc în rîndul mașinilor de prelucrat materiale termoplastice.

NOTAȚII FOLOSITE

π_1 — notație pentru grupul adimensional,

$\frac{\partial p}{\partial r} = \bar{p}$ — baropantă,

v_{tr} — viteza de transport a materialului,

η_a — viscozitatea dintre disc și stator,

h — fanta dintre disc și stator,

$\mathscr{R}$ — reopanta,
ω_0 — viteza unghiulară a discului,
$\Delta\varphi$ — unghiul dintre con și placă,
τ_{ij} — tensorul eforturilor unitare,
$\tau_{\theta z}$, $\tau_{z\theta}$ — componentele de forfecare ale tensorului eforturilor unitare,
$\tau_{\theta\theta}$, τ_{zz}, τ_{rr} — componentele normale ale tensorului eforturilor unitare,
$\tau_{\theta\theta} - \tau_{zz}$ — prima diferență a componentelor normale,
$\tau_{zz} - \tau_{rr}$ — a doua diferență a componentelor normale,
v_θ, v_z, v_r — componentele vitezei pe cele trei axe (θ, z, r),
m, ν — constante din relația Ostwald-de Waele,
α, β, α^*, β^* — constante din relațiile (16) și (17),
R — raza discului,
a, b, c — constante din relația (24),
H_{med} — fanta medie dintre con și placă,
H_{ext} — fanta, dintre con și placă, la raza maximă a conului,
p — presiunea materialului în fantă,
I — notație pentru integrală.

Primită la redacție la 9 mai 1974

BIBLIOGRAFIE

1. R. F. Westover, SPE, Journal, **21**, *5*, 455 (1965).
2. J. E. Henry și C. E. Plymale, SPE, Journal, **21**, *4*, 391 (1965).
3. N. A. Kozulin, A. L. Pecenkin, P. E. Smelov și Ia. K. Iarțev, *Plasticeskie massî*, *10*, 30 (1964).
4. Iu. G. Ostapciuk, M. L. Iazloviţkii, V. V. Bernaţkii, N. K. Juk, K. K. Bacinskii, Ia. G. Kuzmin, *Diskovie extruderî*, Izd. Tehnika, Kiev, 1972, p. 16, 31.
5. P. P. Prohodcenko, *Himiceskoe i neftianoe maşinostreoenie*, *11*, 26 (1967).
6. Iu. G. Ostapciuk și Ia. G. Kosaia, *Himiceskoe i neftianoe maşinostroenie*, 8, (1968).
7. * * *, Plasticeskie massî, *12*, 20 (1967).
8. H. Prus, *Plastiques modernes et élastomères*, **18**, *7*, 109 (1966).
9. G. A. Patffort, *Plastiques modernes et élastomères*, **19**, *10*, 115 (1967).
10. E. A. Sporiaghin, L. K. Snisarenko, V. I. Pilipovici și Ia. K. Iarțev, Plasticeskie massî, *10*, 38 (1968).
11. V. L. Kotcerov, Iu. E. Lukaci, V. N. Nenno și E. A. Sporiaghin, Plaste u. Kautschuk, **19**, *1*, 35 (1973).
12. V. I. Morozov, B. P. Starkman și E. E. Rîlov, Plasticeskie massî, *4*, 56 (1962).
13. V. F. Dubovițkii, *Himiceskoe maşiniostroenie*, Izd. Tehnika, Kiev, vol. 7, 1968, p. 41.
14. A. S. Lodge, *Elastic Liquids*, Academic Press, London—New York, 1964, p. 235, 202, 64, 212, cap. IX.
15. Em. A. Bratu, *Operații și utilaje în industria chimică*, Vol. I, Ed. tehnică, București, 1960, p. 86.
16. M. Renet, *Calculul și construcția utilajului chimic*, Vol. II, ed. II, Ed. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 528, 410.
17. R. B. Bird, W. E. Stewart și E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Part I, John Wiley and Sons, New York, London, 1960, p. 89.
18. G. H. West, Rheologica Acta, **9**, *4*, 554 (1970).
19. C. D. Han și T. C. Yu, Rheologica Acta, **10**, *3*, 398 (1971).
20. R. Bădescu și C. Maican, *Integrale utilizate în mecanică, fizică, tehnică și calculul lor*, Edit. tehnică, București, 1968, p. 60.

CONTRIBUȚII PRIVIND METODELE DE ÎNLĂTURARE A TANGAJULUI AUTOMOBILULUI LA DEMARARE SAU FRÎNARE

de AUREL P. STOICESCU
Institutul politehnic București

În lucrare se analizează condițiile pe care trebuie să le îndeplinească principalele tipuri uzuale de suspensii ale automobilelor, astfel încît să nu se producă mișcări de tangaj în timpul demarării sau frînării. Din acest studiu rezultă că, în general, este recomandabil ca pîrghiile suspensiei să fie neparalele, tangajul putînd fie înlăturat sau micșorat și printr-o alegere adecvată a poziției barei de direcție.

În timpul demarării sau frînării automobilului, datorită forțelor suplimentare care apar, se produce modificarea poziției caroseriei față de roți, concretizată, în general, atît prin mișcarea pe verticală a centrului de greutate al masei suspendate, cît și prin mișcarea de tangaj (rotație în jurul unei axe transversale ce trece prin centrul de greutate).

Stabilirea tipurilor și a caracteristicilor suspensiilor care nu permit mișcări de tangaj și de deplasare pe verticală a caroseriei la frînare sau demarare a fost abordată în cîteva lucrări din literatura de specialitate [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], prin folosirea diferitelor metode de studiu.

În lucrarea de față se studiază mai detaliat și mai exact decît se face în literatură condițiile pe care trebuie să le îndeplinească principalele tipuri uzuale de suspensii pentru ca mișcările de tangaj la frînare sau demarare să nu aibă loc. În acest scop se va utiliza metoda invarianței forțelor preluate de arcurile suspensiei, caracterizată prin simplitate și aplicabilitate generală, fără precauțiile ce trebuie avute în vedere în cazul altor metode de studiu.

1. PRINCIPIUL METODEI INVARIANȚEI FORȚELOR PRELUATE DE ARCURILE SUSPENSIEI

Oricare ar fi tipul suspensiei folosite se poate arăta că la ridicarea sau coborîrea centrului de greutate al caroseriei față cale, precum și la rotirea ei, se produce modificarea pozițiilor și lungimilor arcurilor suspensiei. Din acest motiv, dacă în timpul frînării sau demarării nu se produc mișcări pe direcția normalei la cale și de tangaj ale caroseriei, înseamnă că arcurile suspensiei vor avea lungimile și pozițiile neschimbate față de cele corespunzătoare regimului de mișcare ce precede frînarea sau demararea. Or, aceasta înseamnă că *forțele preluate de arcuri rămîn și ele neschimbate* (se presupune, evident, că drumul este perfect plan). Observația de mai sus

constituie ideea esenţială a unui procedeu care în continuare se va numi metoda invarianţei forţelor preluate de arcurile suspensiei.

Întrucît se presupune lipsa tangajului şi a săltării caroseriei, singura forţă suplimentară ce acţionează la frînare sau demarare asupra caroseriei este forţa de inerţie din mişcarea de translaţie paralelă cu calea. Avînd această forţă, se pot determina apoi forţele suplimentare la contactul dintre roţi şi cale (comparaţia se face cu regimul staţionar ce precede frînarea sau demararea), pentru fiecare regim. Apoi din studiul separat al echilibrului celor două punţi se pot determina relativ uşor forţele suplimentare preluate de arcuri. Punînd condiţia ca aceste forţe să fie nule, simultan pentru ambele punţi, se găsesc condiţiile relative la geometria suspensiilor astfel ca să nu existe mişcări de săltare şi tangaj. Este uşor de verificat că procedînd astfel condiţiile necesare şi suficiente de echilibru ale caroseriei pe verticală şi la rotaţie sînt satisfăcute.

Din cele arătate se constată simplitatea deosebită a metodei, întrucît ea nu comportă decît rezolvarea unor probleme de statică.

Parţial, ideea metodei a fost utlizată în [3], dar pe baza unor consideraţii relativ complicate, care sînt mai adecvate de fapt la determinarea unghiului de tangaj. Într-o formă mult apropiată de cea expusă aici, metoda s-a aplicat în [1],[7], însă numai pentru cazul suspensiilor cu pîrghii oscilante în plan longitudinal. Pentru alte tipuri de suspensii se propune o echivalare a lor cu cele studiate, care, însă, nu conduce la rezultate corecte, aşa cum se va dovedi în cele ce urmează.

2. SUSPENSIE CU O PÎRGHIE OSCILANTĂ ÎN PLAN LONGITUDINAL

Se va considera cazul mai general decît cel examinat în [1] cînd pîrghiile sînt înclinate faţă de cale şi arcurile sînt montate pe pîrghii sub unghiuri oarecari (figura 1).

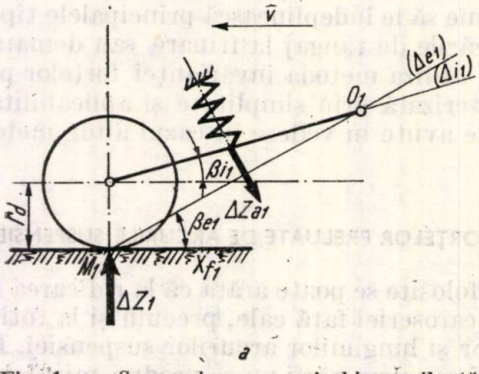


Fig. 1*a*. — Suspensie cu o pîrghie oscilantă în plan longitudinal (puntea din faţă).

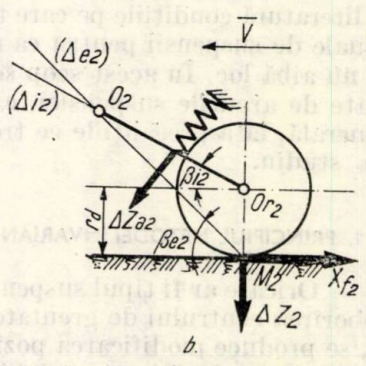


Fig. 1*b*. — Suspensie cu o pîrghie oscilantă în plan longitudinal (puntea din spate).

Se notează

L — ampatamentul automobilului;

h_g — înălţimea centrului de greutate faţă de cale;

r_d — raza dinamică a roţilor;

X_{f1}, X_{f2} — reacţiunile tangenţiale de frînare la una din roţile din faţă şi, respectiv, spate;

X_{t1}, X_{t2} — idem pentru tracţiune;

Z_1, Z_2 — reacţiunile normale ale căii la una din roţile din faţă şi, respectiv, spate;

Z_{a1}, Z_{a1} — forţele preluate de cîte unul din arcurile suspensiei de la puntea din faţă şi, respectiv, spate;

$X_f = X_{f1} + X_{f2}$;

$\nu = X_{f1}/X_f$ — coeficientul de repartiţie al forţei de frînare.

(se are în vedere că rezistenţele la rulare se pot neglija);

$$\eta = h_g/L.$$

Semnul Δ în faţa unei notaţii desemnează creşterea mărimii definite de notaţie în raport cu valoarea de la regimul ce precede frînarea sau demararea.

Pentru frînare, atunci cînd frînele sînt exterioare, urmărind figura 1, se constată că $\Delta Z_{ai} = 0 (i = 1, 2)$ are loc atunci cînd rezultanta forţelor ΔZ_{ai} şi X_{fi} trece prin punctul

$O_i (i = 1, 2)$. Deci

$$\operatorname{tg} \beta_{ei} = \frac{\Delta Z_i}{X_{fi}}, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

Neglijînd rezistenţa aerului şi admiţînd că deplarearea se face pe un drum orizontal, se poate scrie

$$\Delta Z_i = \eta X_f,$$

iar relaţia (1) devine

$$\operatorname{tg} \beta_{ei} = \eta/\nu, \quad \operatorname{tg} \beta_{e2} = \eta/(1 - \nu). \tag{2}$$

Fiind date punctele M_1 şi M_2, deci ampatamentul, la tipul de suspensie examinat, pentru un ν dat, frînarea nu produce tangaj dacă centrele articulaţiilor la caroserie ale pîrghiilor se află, respectiv, pe dreptele (Δe_1) şi (Δe_2) (figura 1).

Frînarea se poate realiza însă şi prin intermediul transmisiei sau combinat. În asemenea condiţii este evident că repartizarea forţelor de frînare la punţi diferă de cea realizată de sistemul de frînare propriu-zis. Dacă transmisia principală şi diferenţialul se află montate la partea nesuspendată, chiar la frînarea cu motorul sau frîna pe transmisie, determinarea forţelor arcurilor se face exact ca şi la frînele exterioare. Într-adevăr, din partea transmisiei va acţiona asupra punţii un moment într-un plan normal pe planul longitudinal de simetrie, care, practic, nu are influenţă asupra forţelor preluate de arcuri.

În cazul cînd are loc numai frînarea pe transmisie, puntea din spate fiind motoare, se pot aplica formulele (2), în care se pune $\nu=0$. Se vede că la puntea din față nu este posibil ca invarianța forțelor arcurilor să se realizeze. Așadar, tangajul nu poate fi înlăturat, chiar dacă punctul O_1 s-ar deplasa în partea din față în raport cu M_1. Lucrurile se prezintă la fel atunci cînd puntea din față este motoare.

La regimul de tracțiune studiul este întrutotul analog celui de la frînare (ΔZ_i își schimbă sensul, iar X_{ti} va fi de sens opus lui X_{fi}), astfel că formulele (2) își păstrează valabilitatea, adoptînd valorile corespunzătoare ale lui ν astfel :

— $\nu = X_{t1}/(X_{t1} + X_{t2})$ pentru tracțiune integrală ;

— $\nu = 1$ pentru tracțiune în față ;

— $\nu = 0$ pentru tracțiune în spate.

Se deduce că în cazul cel mai răspîndit al tracțiunii numai la una din punți înlăturarea tangajului nu este posibilă, oricum s-ar situa punctul O_i, în fața sau în spatele lui $M_i (i = 1, 2)$.

În cazul frînelor interioare se procedează ca mai înainte, singura deosebire fiind aceea că pe lîngă forțele indicate în figura 1 mai apare momentul de reacțiune la frînare $M_{fi} (i = 1, 2)$. Dacă se ține seamă că $M_{fi} = X_{fi} \cdot r_d$, condițiile pentru lipsa tangajului sînt

$$\operatorname{tg} \beta_{i1} = \eta/\nu, \quad \operatorname{tg} \beta_{i2} = \eta/(1 - \nu). \tag{3}$$

Deci de data aceasta punctele O_1, O_2 trebuie să se găsească, respectiv, pe dreptele (Δi_1), (Δi_2).

La regimul de tracțiune, cînd transmisia principală și diferențialul sînt suspendate, se obțin aceleași relații (3), cu mențiunea făcută anterior cu privire la ν. Deci și aici, cînd există o singură punte motoare, tangajul nu se poate înlătura.

3. SUSPENSIE CU DOUĂ PÎRGHII OSCILANTE ÎN PLAN TRANSVERSAL

Axele articulațiilor pîrghiilor sînt paralele cu calea și între ele.

Dacă pivotul ar fi solidarizat cu roata prin forțele de frecare dintre el și urechile fuzetei, atunci la tipul amintit de suspensie întotdeauna la frînare sau demarare s-ar produce tangajul. Însă roata este menținută în poziția corespunzătoare de mers cu ajutorul pîrghiilor mecanismului de transmitere al direcției, ceea ce determină apariția unei forțe la pîrghia de comandă a direcției, care, în anumite condiții, poate să contribuie la anularea forței suplimentare preluate de arcul suspensiei. În continuare se va studia tocmai această problemă.

În timpul frînării va apărea forța ΔF în bara de direcție (se presupune pentru simplitate că ea se află într-un plan transversal). Datorită elasticității sistemului, în general roata de direcție va rula cu un anumit unghi de deviere care se poate determina calculînd deformația pîrghiei de comandă și a barei de direcție. Dacă se ține seama de rigiditatea la deviere a pneului, se poate determina astfel forța laterală ΔY_1 preluată de pneu-

În general deformațiile elementelor menționate sînt mici, astfel că unghiul de rotire este comparabil cu unghiul de convergență, care nu depășește 30'. Dacă se are în vedere și convergența roților, rezultă că unghiul de deviere

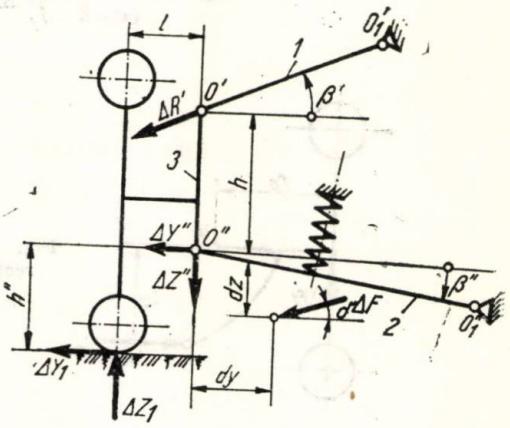


Fig. 2.*a*. — Suspensie cu două pîrghii oscilante în plan transversal.

real este destul de mic (în anumite condiții nul). Deci, din punct de vedere practic, ΔY_1 se poate neglija (la un unghi de deviere real de 30' ar rezulta $Y_1 = (15-30)$ kgf).

Pentru sistemul 3 — roată luînd momentele în raport cu O'' (figura 2*a*) rezultă

$$\Delta R' = \Delta Z_1 \frac{l}{h \cos \beta} + \Delta F \cdot \frac{d_z \cos \delta + d_y \sin \delta}{h \cos \beta'}. \tag{4}$$

Din ecuațiile de proiecții ale forțelor se determină apoi reacțiunile din O'':

$$\Delta Y'' = -\Delta Z_1 \cdot \frac{l}{h} - \Delta F \cdot \frac{(d_z + h) \cos \delta + d_y \sin \delta}{h},$$

$$\Delta Z'' = \Delta Z_1 \left(1 - \frac{l}{h} \operatorname{tg} \beta'\right) - \Delta F \left(\frac{d_z \cos \delta + d_z \sin \delta}{h} \cdot \operatorname{tg} \beta' + \sin \delta\right). \tag{5}$$

Se scrie pentru pîrghia 2 ecuația de momente în raport cu O_1'' și se pune condiția ca $\Delta Z_{a1} = 0$. Se obține

$$\Delta Z_1 \left(\cos \beta'' - \frac{l}{h} \operatorname{tg} \beta' \cos \beta'' - \frac{l}{h} \sin \beta''\right) -$$

$$-\Delta F \cdot \left[\frac{(d_z + h) \cos \delta + d_y \sin \delta}{h} \cdot \sin \beta'' + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \frac{d_z \cos \delta + d_y \sin \delta}{h} \cdot \operatorname{tg} \beta' \cdot \cos \beta'' + \sin \delta \cos \beta''\right] = 0.$$

MŰSZAKI EGYETEM BUDAPEST 1848 KÖNYVTÁR

Considerînd axa pivotului normală pe cale, cu notaţiile din figura 2*b* (se neglijează convergenţa roţilor) se obţine

$$\Delta F = \frac{\nu}{\cos\delta} \cdot \frac{r_0}{l_f} X_f, \tag{7}$$

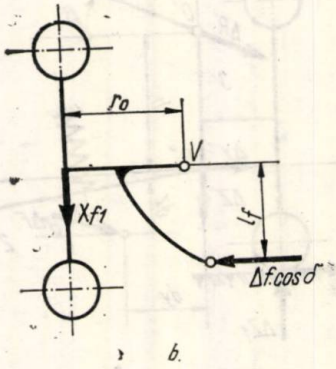


Fig. 2*b*. — Roata de direcţie (vedere de sus).

care, înlocuită în (13) împreună cu expresia lui ΔZ_1, conduce la

$$\eta\left(1 - \frac{l}{h}\operatorname{tg}\beta' - \frac{l}{h}\operatorname{tg}\beta''\right) - \frac{\nu r_0}{l_f}\left(\frac{d_z + h + d_y \operatorname{tg}\delta}{h} \cdot \operatorname{tg}\beta'' + \right.$$

$$\left. + \frac{d_z + d_y \cdot \operatorname{tg}\delta}{h} \cdot \operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}\delta\right) = 0. \tag{8}$$

Expresia de mai sus este relativ complicată şi nu permite să se aprecieze cu uşurinţă măsura în care dispunerea barei de direcţie poate să contribuie la înlăturarea tangajului. Din acest motiv se vor considera anumite cazuri particulare.

Astfel, dacă $\delta = 0$ se obţine

$$d_z = h \cdot \frac{\eta}{\nu} \cdot \frac{l_f}{r_0} \cdot \frac{1 - \frac{l}{h}\operatorname{tg}\beta' - \left(\frac{\nu r_0}{\eta l_f} + \frac{l}{h}\right)\operatorname{tg}\beta''}{\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}\beta''}. \tag{8'}$$

Cînd $d_z = -h$, $d_y = 0$, rezultă

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{l_f}{r_0} \cdot \frac{\eta}{\nu}\left[1 - \left(\frac{l}{h} - \frac{\nu r_0}{l_f \eta}\right)\operatorname{tg}\beta' - \frac{l}{h}\operatorname{tg}\beta''\right]. \tag{8''}$$

Din relaţia (8') se constată că atunci cînd $\beta' = -\beta''$, adică cele două pîrghii sînt paralele, $d_z \to \infty$. Înseamnă că la asemenea suspensii nu este posibilă înlăturarea tangajului.

Se consideră un autoturism cu următoarele caracteristici: $L = 2{,}70$ m, $h_g = 0{,}60$ m, $\nu = 0{,}60$, $r_0 = 50$ mm, $l_f = 150$ mm, $h = 245$ mm, $l = 90$ mm.

Este preferabil din punctul de vedere al capacității de trecere ca punctul de articulație al barei de direcție la pîrghia de comandă a direcției să fie plasate în partea superioară, deci astfel ca $d_z < 0$. Adoptînd cazul acceptabil limită $d_z = -h$ și $\beta'' = 0$, cu datele numerice de mai înainte rezultă $\beta' = -61°37'$. Așadar este necesar un unghi de înclinare al pîrghiei superioare de o valoare exagerat de mare. O soluție mai favorabilă s-ar obține atunci cînd se adoptă $\beta' = -\beta''$. Rezultă: $\beta' = -\beta'' = 47°50'$.

Dacă, din contră, se pune condiția $d_z = 0$ și $\beta' = 0$, ar rezulta $\beta'' = 38°10'$, deci o valoare mult mai acceptabilă decît în celelalte situații (dacă se alege $\beta'' = 0$, rezultă $\beta' = 69°50'$, iarăși neconvenabilă).

Cu datele indicate mai sus, adoptînd $\beta' = 0$, $\beta'' = 20°$ din (8''), se obține $\delta = 43°40'$. Din motive constructive soluția nu este convenabilă, articulația fiind plasată sus. Dacă $\beta' = \beta'' = 0$, se obține $\delta = 47°50'$. Se vede că influența lui β'' este relativ puțin însemnată (se obține δ mic atunci cînd $\beta' > 0$, iar $\beta'' > 0$).

Cînd $d_z = 0$, $d_y = 0$ se obține

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\eta}{\nu}\cdot\frac{l_f}{r_0}\left[1 - \frac{l}{h}\operatorname{tg}\beta' - \left(\frac{l}{h} + \frac{\nu r_0}{\eta l_f}\right)\operatorname{tg}\beta''\right]. \qquad (8''')$$

În acest caz trebuie ca $\beta' > 0$, $\beta'' > 0$, efectul mai important avîndu-l β''. Luînd $\beta' = 0$, $\beta'' = 10°$, rezultă $\delta = 40°20'$. Din punct de vedere practic asemenea unghiuri sînt întru totul realizabile.

Din cele de mai sus rezultă că pentru a se obține micșorarea tangajului la frînare este necesar ca articulația barei de direcție cu pîrghia de comandă să fie cît mai aproape de cale, pîrghiile suspensiei să nu fie paralele, iar unghiul de înclinare al barei de direcție (în sensul indicat pe figură) să fie cît mai mare. De asemenea, este recomandabil ca pîrghia superioară să fie orizontală. Se constată că efectul cel mai important se obține prin înclinarea barei de direcție, care nu creează dificultăți de ordin constructiv. Înclinarea pîrghiilor suspensiei la unghiurile corespunzătoare este mai dificilă din acest punct de vedere.

La suspensiile uzuale efectul barei de direcție asupra tangajului la frînare este în general neglijabil ($\delta \simeq 0$, $\beta' \simeq \beta'' \simeq 0$). Dar, prin metoda indicată aici, tangajul poate să fie mult diminuat, și la aceste tipuri de suspensii.

Este de observat că tot ceea ce s-a tratat aici este valabil atît pentru frîne exterioare cît și frîne interioare.

4. SUSPENSIE CU DOUĂ PÎRGHII OSCILANTE ÎNTR-UN PLAN NORMAL PE CALE CE FACE UN UNGHI OARECARE CU PLANUL LONGITUDINAL

Axele articulațiilor pîrghiilor sînt paralele cu calea și între ele. Se vor neglija convergența și căderea roților, precum și efectul barei de direcție.

Se notează (a se vedea figurile 3 și 4): $O''O_1' = l_2$, $O'O'' = l_3$ și cu M centrul petei de contact a roții cu calea.

Se consideră evident echilibrul în planul de oscilație al pîrghiilor, în care se afla și axa arcului suspensiei.

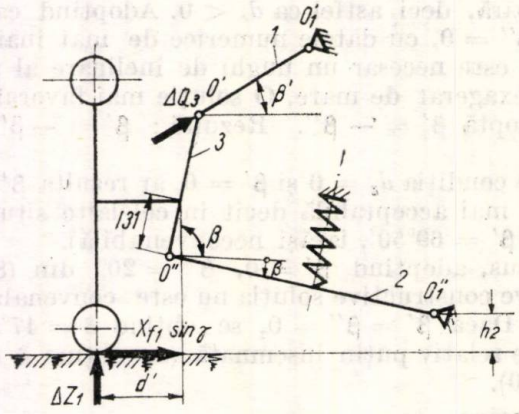


Fig. 3. — Suspensie cu două pîrghii oscilante într-un plan normal pe cale, înclinat față de planul longitudinal (vedere din planul de oscilație).

În sistemul 3 — roată, luînd momentele în raport cu O'', se obține

$$\Delta Q_3 = X_{f1} \cdot \frac{h_2 + l_2 \sin\beta''}{l_3 \sin(\beta - \beta')} \cdot \sin\gamma - \Delta Z_1 \cdot \frac{d \cdot \cos\gamma - l_{31} \cos\gamma}{l_3 \sin(\beta - \beta')}. \qquad (9)$$

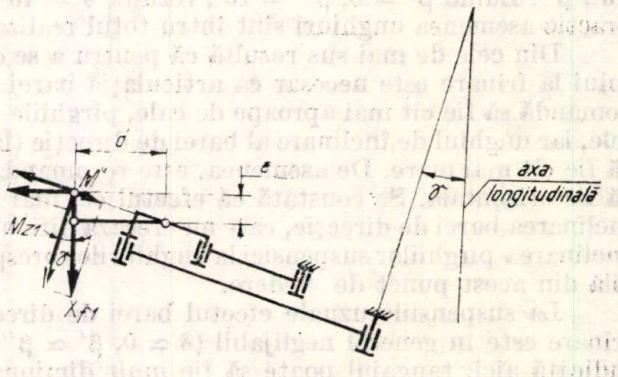


Fig. 4. — Suspensia de la figura 3 văzută de sus.

În sistemul 3 — roată — 2 se iau momentele în raport cu O_1'', punînd condiția $\Delta Z_{1a} = 0$, și se obține

$$\Delta Q_3 \cdot d_0 + \Delta Z_1 [d \cos\gamma + l_2 \cos\beta'' - l_{31} \cos\beta] - X_{f1} h_2 \sin\gamma = 0, \qquad (10)$$

unde d_0 este distanța de la O_1'' la suportul forței ΔQ_3.

Din considerații trigonometrice simple se obține

$$d_0 = l_2 \sin(\beta' + \beta'') + l_3 \sin(\beta - \beta'). \qquad (10')$$

Eliminînd pe ΔQ_3 și d_0 între (9), (10) și (10′) rezultă condiția pentru lipsa tangajului sub forma finală

$$\frac{m}{n}\sin\gamma = -\frac{\eta}{\nu}, \tag{11}$$

unde

$$m = (h_2 + l_2 \sin\beta'')[l_2 \sin(\beta' + \beta'') + l_3 \sin(\beta - \beta')] -$$

$$- h_2 l_3 \operatorname{sni}(\beta - \beta),$$

$$n = l_3(d\cos\gamma + l_2\cos\beta'' - l_3\cos\gamma)\sin(\beta - \beta') -$$

$$- [l_2 \sin(\beta' + \beta'') + l_3 \sin(\beta - \beta')](d\cos\gamma - l_3\cos\beta). \tag{11′}$$

În cazul particular cînd $\beta' = \beta'' = 0$ se obține $m = 0$. Deci tangajul, în aceste condiții, nu poate fi înlăturat, oricare ar fi unghiul de înclinare γ.

Așadar va trebui ca cel puțin una din pîrghiile suspensiei să nu fie paralelă cu calea de rulare.

Dacă $\beta' = -\beta'' = \alpha$(pîrghiile sînt paralele) și $\beta = 0{,}5\,\pi$ din (11) și (11′) rezultă relația simplă

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\gamma = \frac{\eta}{\nu}. \tag{12}$$

Se observă că în acest caz particular d nu are nici o influență asupra condiției privind lipsa tangajului.

Dacă $\gamma = 0$ se obține cazul suspensiilor cu pîrghii oscilante în plan transversal, cînd, așa cum se vede din (11), tangajul nu poate fi împiedicat (nu se ia în considerație efectul barei de direcție).

Cînd $\gamma = 0{,}5\,\pi$ se obține cazul suspensiei cu pîrghii longitudinale, iar formula (12) este similară cu relația (3), valabilă pentru suspensia cu pîrghie longitudinală cu frînă interioară. Din punctul de vedere al înlăturării tangajului, suspensia cu două pîrghii longitudinale este mai dezavantajoasă decît cea cu o singură pîrghie, întrucît întotdeauna pîrghiile trebuie să facă un anumit unghi față de cale (cu datele numerice adoptate anterior $\alpha \simeq 20°$).

Din (12) mai rezultă că la micșorarea unghiului γ înclinarea pîrghiilor trebuie să crească și ea. Pentru o valoare uzuală $\gamma = 25°$, cu aceleași date rezultă $\alpha = 37°15'$, adică o înclinare destul de mare a pîrghiilor. Din acest motiv utilizarea acestui tip de suspensie este mai puțin recomandabilă.

Formula (12) arată că aprecierea din [4] potrivit căreia, atunci cînd pîrghiile sînt paralele, tangajul nu se poate înlătura nu este exactă. De asemenea, este important de remarcat faptul că, în general, suspensia cu două pîrghii nu poate fi echivalentă cu cea cu o singură pîrghie a cărei articulație se află la intersecția dreptelor $O'O'_1$ și $O''O''_1$. Dovada rezultă tot din relația (12).

Se pot deduce formule asemănătoare şi pentru suspensia din spate. Singura deosebire este că în locul lui ν trebuie pus $1-\nu$ (bineînţeles că în (11′) se introduc mărimile omoloage pentru spate, orientarea suspensiei fiind inversă, asemănătoare cu cea din figura 1).

În cazul frînelor interioare se obţin aceleaşi formule (11), (11′), cu singura deosebire că h_2 se va înlocui cu $h_2 - r_d$. Atunci cînd pîrghiile sînt paralele şi $\beta = 0{,}5\,\pi$, rezultă tocmai formula (12). Astfel, în acest caz, nu exista nici o diferenţă de comportare, fie că se folosesc frîne interioare, fie exterioare.

Pentru demarare problema se rezolvă în acelaşi mod, observînd că la tracţiunea la o singură punte tangajul nu poate fi înlăturat.

5. SUSPENSIE CU DOUĂ PÎRGHII OSCILANTE AVÎND AXELE ARTICULAŢIILOR NEPARALELE

La acest tip de suspensie se formează un mecanism spaţial, cu poziţii reciproce ale elementelor foarte variate. Evident, articulaţiile pîrghiilor la partea suspendată sînt cilindrice (numai dacă nu se utilizează piese suplimentare care să preia anumite eforturi). Din condiţia de mobilitate a mecanismului, rezultă că articulaţiile pîrghiilor cu celălalt element de legătură trebuie să fie neapărat sferice. În acest caz elementul menţionat are şi rolul de pivot, care nu mai există ca piesă distinctă (soluţia se foloseşte uneori şi la celelalte tipuri de suspensii).

În cele ce urmează se va examina o configuraţie geometrică ceva mai particulară, totuşi uzuală în construcţia automobilelor, pentru a se evita formulele prea complicate şi a evidenţia mai uşor influenţa unghiului

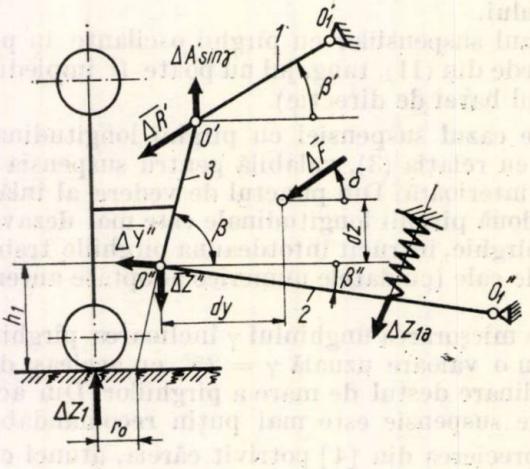


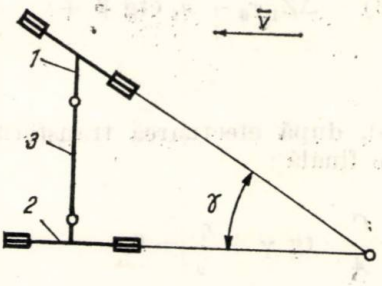
Fig. 5. — Suspensie cu două pîrghii oscilante avînd axele articulaţiilor neparalele.

dintre axele articulaţiilor cilindrice asupra tangajului (influenţa celorlalte unghiuri a fost precizată la celelalte puncte).

Axa articulaţiei inferioare 2 (fig. 5) la caroserie este paralelă cu calea şi cu planul longitudinal de simetrie al automobilului, iar axa articulaţiei

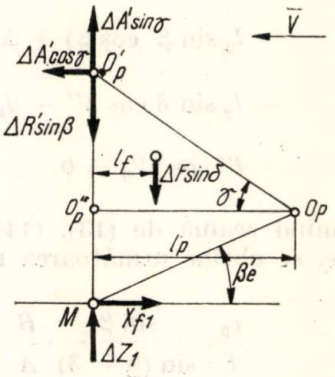
similare a pîrghiei superioare *1* este paralelă cu planul longitudinal de simetrie, făcînd însă un anumit unghi cu orizontala (fig. 6*a*).

Se presupune că axele pîrghiilor, în situaţia ce precede frînarea sau demararea, se află într-un plan normal pe cale şi că axa arcului suspensiei



a

Fig. 6*a*. — Vedere laterală a suspensiei de la figura 5.



b

Fig. 6*b*. — Proiecţia laterală a forţelor de la suspensia reprezentată în figurile 5 şi 6*a*.

este conţinută în acest plan. De asemenea, se mai presupune că axa barei de direcţie este paralelă cu planul menţionat. În continuare se vor neglija unghiurile de căderе şi de convergenţă.

Este de observat că, datorită poziţiei particulare impuse mecanismului, atunci cînd $\beta' \neq 0$, iar l_1 este dat, unghiul γ depinde de β'.

În proiecţia pe planul longitudinal (fig. 6 *b*), luînd momentele în raport O_p'', rezultă

$$\Delta A' = -\frac{h_1}{l_3} \cdot \frac{1}{\cos\alpha \cos\gamma} \cdot X_{f1} + \frac{l_f \sin\delta}{l_3 \cos\alpha \cos\gamma} \cdot \Delta F. \tag{13}$$

În planul transversal luînd momentele în raport cu O'' se determină $\Delta R'$, care este dat de relaţia

$$\Delta R' = \frac{r_0 + h_1 \operatorname{ctg}\beta}{l_3} \cdot \Delta Z_1 - \frac{\sin\gamma \cos\beta}{\sin(\beta - \beta')} \cdot \Delta A' -$$

$$- \frac{d_z \cos\delta - d_y \sin\delta}{l_3 \sin(\beta - \beta')} \cdot \Delta F. \tag{14}$$

Scriind ecuaţia de momente în raport cu dreapta $O'O''$ rezultă

$$\Delta F = X_{f1} \cdot \frac{r_0}{l_f} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \delta)}. \tag{15}$$

În sistemul 3 — roată — 2, ecuația de momente în raport cu O_1'', împreună cu $\Delta Z_{1a} = 0$, dă condiția pentru lipsa tangajului la frînare. Deci

$$\Delta R' (l_3 \sin \beta \cos \beta' + l_2 \sin \beta'' \cos \beta' + l_2 \sin \beta' \cos \beta'' -$$

$$- l_3 \sin \beta' \cos \beta) + \Delta F(d_z \cos \delta + l_2 \cos \delta \sin \beta'' +$$

$$+ l_2 \sin \delta \cos \beta'' - d_y \sin \delta) - \Delta Z_1(r_0 + h_1 \operatorname{ctg} \beta +$$

$$+ l'' \cos \beta'') = 0.$$

Ținînd seamă de (13), (14), (15), după efectuarea transformărilor necesare, se obține următoarea relație finală :

$$\frac{r_0}{l_f} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \delta)} \cdot \frac{B}{A} + h_1 \cdot \frac{C}{A} \cdot \operatorname{tg} \gamma + \frac{\eta}{\nu} = 0, \tag{16}$$

unde

$$A = - l_2 \cos \beta'' + (r_0 + h_1 \cos \beta) \frac{l_2 \sin (\beta' + \beta'')}{l_3 \sin (\beta - \beta')},$$

$$B = - \left[1 + \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\sin (\beta' + \beta'')}{\sin (\beta - \beta')} \right] l_f \sin \delta \operatorname{tg} \gamma - (d_z \cos \delta - d_y \sin \delta) \times$$

$$\times \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\sin (\beta' + \beta'')}{\sin (\beta - \beta')} + l_2 \sin(\beta' + \beta''),$$

$$C = 1 + \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\sin (\beta' + \beta'')}{\sin (\beta - \beta')}.$$

Dacă se ține seama de observația făcută anterior, înseamnă că lungimea l_1 va trebui să aibă o anumită valoare în funcție de β' dat dinainte și γ calculat cu (16), atît timp cît $\beta' \neq 0$.

Sub această formă, expresia (16) nu permite să se efectueze o analiză rapidă a influenței diferitelor mărimi. Din acest motiv se va considera cazul cînd $\beta' = \beta'' = 0$, $\beta = 0{,}5\,\pi$. Se obține (l_1 este arbitrar)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\eta / \nu}{\dfrac{h_1}{l_2} - \dfrac{r_0}{l_2} \operatorname{tg} \delta}. \tag{17}$$

Se observă că, întrucît $h_1 > r_0$, la mărirea unghiului δ al barei de direcție unghiul γ crește. Mai mult decît atît, la valori suficient de mari ale lui δ, axa articulației pîrghiei superioare trebuie să fie înclinată către partea

din față (adoptînd $h_1 = 180$ mm, cu datele anterioare ar rezulta $\delta > 74°30'$, deci valori exagerat de mari). Pentru a obține valori reduse pentru γ trebuie ca acesta să fie nul sau negativ.

Dacă și $\delta = 0$, atunci, adoptînd $l_2 = 450$ mm, rezultă $\gamma = 43°20'$. Valoarea obținută este destul de mare, dar care, spre deosebire de cele necesare altor tipuri de suspensii, nu ridică probleme de ordin constructiv în privința dispunerii adecvate a pieselor respective.

În condinuare se va analiza în ce condiții este posibilă echivalarea unei astfel de suspensii cu cea cu o singură pîrghie longitudinală, al cărei centru de oscilație să fie pe dreapta MO_p (fig. 6 *a*). Se va considera cazul mai simplu cînd $\delta = 0$. Din figura 6 *a* rezultă

$$\operatorname{tg}\beta'_{e1} = \frac{h_1}{l_p}.$$

Din condiția de echivalare va trebui ca $\beta'_{e1} = \beta_{e1}$, unde acesta din urmă este dat de relația (2). Deci

$$\frac{h_1}{l_p} = \frac{\eta}{\nu}. \tag{18}$$

Dar

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{O'_p O''_p}{l_p}. \tag{19}$$

Eliminînd pe $\operatorname{tg}\gamma$ și η/ν între (17), (18) și (19) se obține

$$h_1^2 = l_2 \cdot O'_p O''_p. \tag{20}$$

Se observă că relația de echivalare (20) în general nu este satisfăcută întrucît h_1, l_2 și $O'_p O''_p$ sînt niște mărimi independente între ele (de pildă, pentru un unghi γ dat, mărimea $O'_p O''_p$ este absolut arbitrară).

Așadar, metodele de echivalare propuse în [1], [4], [8], la care fie că centrul de oscilație trebuie să se afle în O_p, fie pe dreapta MO_p, nu sînt exacte. Cu atît mai mult nu sînt corecte aceste metode atunci cînd se efectuează studiul general al suspensiei, așa cum se procedează în [6], [7].

În continuare este util să se considere un alt caz particular de mecanism spațial al suspensiei: pîrghia de jos orizontală, cu axa de rotație identică cu cea de la mecanismul precedent, pîrghia superioară tot orizontală, cu axa de rotație înclinată cu un anumit unghi față de axa de rotație a celeilalte și paralelă cu planul orizontal. Se poate arăta ușor că dacă bara de direcție este orizontală, tangajul nu poate fi înlăturat; prin urmare o situație asemănătoare cu cea de la 4.

Se relevă astfel importanța neparalelismului cu calea a axelor de rotație ale pîrghiilor chiar în cazul suspensiilor cu mecanisme spațiale.

6. SUSPENSIE CU ARCURI ÎN FOI

Deși condițiile pentru înlăturarea tangajului pot fi deduse din relațiile găsite în [8] punînd $\lambda_1 = 1$ și, respectiv, $\lambda_2 = 1$ (cu notațiile din lucrarea respectivă), totuși aici vor fi făcute unele considerații suplimentare, menite să evidențieze anumite particularități ale problemei.

Se examinează suspensia din spate, la care forţele de împingere şi momentul de reacţiune sînt preluate de arcuri. Deci arcul este fixat la carterul punţii, în această zonă el fiind ca şi încastrat. În acelaşi timp, însă, partea centrală a arcului, împreună cu carterul, se poate roti faţă de

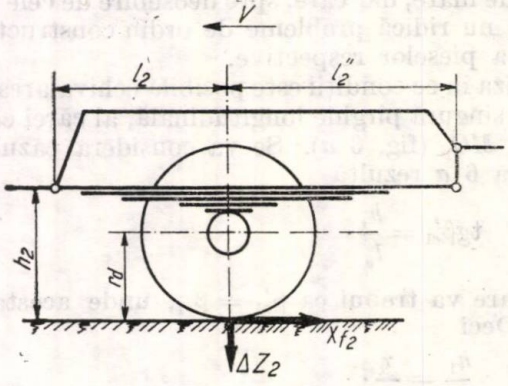


Fig. 7*a*. — Suspensie cu arcuri în foi de la puntea din spate.

a

roată atunci cînd nu s-a atins limita de aderenţă. Dacă roata s-a blocat, atunci arcul se poate roti împreună cu carterul şi cu roata, aceasta putînd să alunece pe cale. Aşadar se poate întocmi modelul din figura 7*b*. Deci capetele arcului capătă anumite deplasări în raport cu O, iar partea încastrată se poate roti, astfel încît partea suspendată ocupă în general o poziţie diferită de cea iniţială. Tangajul va lipsi atunci cînd deformaţiile capetelor arcului şi rotirea sa vor fi astfel încît dreapta AB rămîne în aceeaşi poziţie.

Forţele preluate de capetele arcului vor fi F_2', F şi, respectiv, F_2'', F, care sînt date de relaţiile

$$F = \frac{h_2(1-\nu)}{l_2' + l_2''} \cdot X_f, \quad F_2' = \frac{l_2''}{l_2' + l_2''} \cdot \Delta Z_2, \quad F_2'' = \frac{l_2'}{l_2' + l_2''} \cdot \Delta Z_2. \tag{21}$$

Tangajul nu are loc dacă săgeata rezultantă (variaţia distanţei de la O pînă la dreapta AB) este nulă. Se observă că o condiţie necesară a lipsei de tangaj sau a micşorării lui este

$$F > F_2''.$$

Ţinînd seamă de (28), inegalitatea precedentă conduce la

$$l_2' > \frac{1-\nu}{\eta} \cdot h_2. \tag{22}$$

Avînd în vedere săgeţile corespunzătoare diferitelor forţe (fig. 7*b*) şi urmînd calea din [8] se obţine expresia săgeţii rezultante, care anulată dă condiţia ca tangajul să nu se producă :

$$K_2 = \frac{l_2}{2h_2} \cdot \frac{\eta}{1-\nu} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(\frac{l_2}{h_2} \cdot \frac{\eta}{1-\nu}\right)^2}, \tag{23}$$

unde

$$l_2 = l_2' + l_2'' ;$$

— $K_2 = \dfrac{l_2''}{l_2'}$ reprezintă coeficient de asimetrie al arcului.

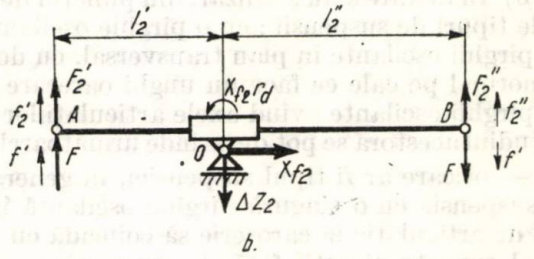


Fig. 7*b*. — Modelul suspensiei cu arcuri în foi.

Condiţia (22) se mai poate scrie

$$K_2 < \frac{l_2}{h_2} \cdot \frac{\eta}{1-\nu} - 1.$$

Dacă se are în vedere (23), inegalitatea precedentă conduce la condiţia

$$l_2 > 2h_2 \cdot \frac{1-\nu}{\eta}. \tag{24}$$

Rezultă, deci, că pentru a se putea înlătura tangajul , lungimea totală a arcului trebuie să depăşească o anumită valoare minimă.

Pentru puntea din faţă se procedează la fel ca mai sus. Cu notaţii similare, afectate de indicele 1, rezultă

$$l_1'' < \frac{\nu}{\eta} \cdot h_1, \tag{25}$$

$$K_1 = -\frac{l_1}{2h_1} \cdot \frac{\eta}{\nu} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(\frac{l_1}{h_1} \cdot \frac{\eta}{\nu}\right)^2}, \tag{26}$$

unde $K_1 = l_1''/l_1'$.

O analiză mai detaliată arată că inegalitatea (25), avînd în vedere (26), este satisfăcută pentru orice valoare a lui l_1. Aşadar aici nu există restricţii în privinţa lungimii arcului (se alege l_1, se calculează K_1 şi apoi l_1'', care, întotdeauna, va satisface inegalitatea (25)).

Pentru regimul de tracţiune se constată că atît ΔZ, cît şi momentul de reacţiune îşi schimbă sensul, ceea ce face ca relaţiile (22), (23), (25) şi (26) să-şi păstreze valabilitatea. Se înţelege că ν trebuie să se înlocuiască cu corespondentul său pentru tracţiune. Evident, cînd numai una din punţi este motoare, tangajul nu poate fi înlăturat. Se constantă, totuşi, că pentru a-l micşora este necesară o lungime suficient de mare a arcului din spate (roţile din spate sînt motoare).

În încheierea acestui caz se va sublinia faptul că relaţiile deduse pentru diferitele tipuri de suspensii sînt valabile indiferent dacă la cele două punţi sînt sau nu tipuri similare de suspensii.

7. CONCLUZII

a) Metoda invariației forțelor preluate de arcurile suspensiei permite determinarea caracteristicilor elementelor suspensiei la care tangajul nu se produce în timpul frînării sau demarării.

b) În lucrare s-au analizat, din punctul de vedere al tangajului, următoarele tipuri de suspensii : cu o pîrghie oscilantă în plan longitudinal, cu două pîrghii oscilante în plan transversal, cu două pîrghii oscilante într-un plan normal pe cale ce face un unghi oarecare cu planul longitudinal, cu două pîrghii oscilante avînd axele articulațiilor neparalele, cu arcuri în foi. Din studiul acestora se pot desprinde următoarele aspecte mai semnificative :

— oricare ar fi tipul suspensiei, în general ea nu poate fi echivalată cu o suspensie cu o singură pîrghie oscilantă în plan longitudinal, al cărei punct de articulație la caroserie să coincidă cu centrul instantaneu de rotație al suportului roții față de caroserie ;

— suspensia cu două pîrghii oscilante, avînd axele articulațiilor neparalele, permite înlăturarea completă a tangajului, fără dificultățile de ordin constructiv pe care le implică celelalte tipuri de suspensii cu pîrghii ;

— în general este recomandabil ca pîrghiile suspensiei să fie neparalele (în acest fel, chiar la suspensia cu două pîrghii în plan transversal este posibilă micșorarea tangajului) ;

— tangajul poate fi micșorat și prin alegerea unei anumite poziții a barei de direcție, aspect care n-a fost relevat încă în literatură ;

— arcurile în foi din spate trebuie să aibă o lungime mai mare decît o anumită valoare minimă.

Primită la redacție la 7 martie 1974 ;
în formă refăcută la 11 octombrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. F. Behles, *Die Beherrschung des Brems- und Anfahrnickens*, Automobiltehnische Zeitschrift (ATZ), **66**, *8*, 225—228 (1964).
2. A. Drechsel, *Bemerkungen zur Frage der Verbundfederung*, Automobiltechnische Zeitschrift (ATZ), **60**, *8*, 280—281 (1958).
3. D. V. Ghelfgad, *Ob uglah naklona kuzova pri razgone i tormojenii avtomobilea*, Avtomobilnaia promîșlennosti, **XXII**, *11*, 15—19 (1956).
4. P. Koessler, *Zur Bremsnickausgleich*, Automobiltechnische Zeitschrift (ATZ), **75**, *3*, 91—95 (1973).
5. E. Marquard, *Zur Theorie der Verbundfeder*, Automobiltechnische Zeitschrift (ATZ), **59**, *11*, 321—324 (1957).
6. V. F. Rodionov, B. M. Fiterman, *Legkovîie avtomobili (Tehniceskoe zadanie, eskizni proekt i obșceaia Komponovka)*, Izd.-vo Mașinostroenie, Moscova, 1971.
7. R. V. Rotenberg, *Podveska avtomobilea i ego kolebaniia*, Mașghiz, Moscova, 1960.
8. I. N. Uspenski, *Ucet protivoklevkogo effekta pri proektirovanii podveski*, Avtomobilnaia promîșlennosti, **XXXVI**, *6*, 24—26 (1970).
9. O. I. Winkelmann, *Anforderungen an des Fahrverhalten von Kraftfahrzeugen*, Automobiltechnische Zeitschrift (ATZ), **63**, *5*, 121—128 (1961).

CONTRIBUȚII LA CERCETAREA LA OBOSEALĂ A LANȚURILOR DE TRANSMISIE SIMPLE ȘI MULTIPLE, AVÎND ZALELE EXECUTATE CU ASAMBLĂRI CU STRÎNGERE ELASTICĂ

de I. MINOIU, N. POSEA, N. ANTONESCU, N. TATU

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Lucrarea cuprinde cercetări teoretice și experimentale la stabilirea influenței strîngerilor elastice ale zalelor și a abaterilor de la geometria corectă a formei acestora, asupra solicitării și rezistenței la oboseală a lanțurilor de transmisie simple și multiple.
De asemenea, lucrarea conține și indicații privind calculul forțelor care solicită zalele în ansamblu și al eforturilor secționale și unitare din secțiunea critică a ecliselor, necesare pentru fundamentarea științifică a calculului la oboseală al lanțurilor de transmisie.

În construcțiile moderne de mașini, în special în sistemul de transmisii al instalațiilor de foraj de mare adîncime (de peste 5000 m), transmisiile cu lanț sînt supuse la solicitări tot mai puternice. În literatura de specialitate se arată că baza teoretică și datele experimentale, necesare pentru calculul și proiectarea corespunzătoare a acestor transmisii sînt insuficient elaborate, mai ales pentru calculul la oboseală.

Rezistența, fiabilitatea și durabilitatea la oboseală a lanțurilor de transmisie puternic solicitate, sînt influențate de un mare număr de factori constructivi și funcționali, între care, mărimea și uniformitatea strîngerilor elastice ale asamblării elementelor zalelor au un rol deosebit de important. În această lucrare, în continuarea unor lucrări anterioare, se aprofundează teoretic și experimental, cercetarea influenței acestora și a altor factori (abaterile de la geometria corectă a zalelor) asupra solicitării și rezistenței la oboseală a lanțurilor de transmisie simple și multiple.

1. FORȚELE CARE SOLICITĂ LANȚURILE DE TRANSMISIE ȘI REGIMUL DE VARIAȚIE A ACESTORA

Cinematica și dinamica transmisiilor cu lanț sînt influențate puternic de două fenomene specifice : *efectul poligonal* și *șocul de angrenare*, la care se adaugă vibrațiile ramurilor transmisiei, generate inevitabil de aceste două procese. Primul efect se datorește faptului că lanțul se înfășoară poligonal pe conturul roților de lanț, cu mișcarea de oscilație a zalelor care intră succesiv în angrenare. Acest efect produce variația ciclică în timp a parametrilor cinematici și dinamici ai transmisiilor cu lanț, pe

durata angrenării fiecărei zale şi periodic, cu frecvenţa angrenării zalelor. Şocul de angrenare se datoreşte faptului că dinţii roţilor de lanţ intră în angrenare cu rolele (bucşele) zalelor, cu viteze diferite.

Ţinînd seama de mărimea cuplului de transmis şi de procesele funcţionale specifice menţionate mai sus, în ramurile transmisiilor cu lanţ, în starea de serviciu, acţionează următoarele forţe (indicele 1 pentru ramura conducătoare, şi 2 pentru ramura condusă):

F_t — forţa tangenţială utilă (numai în ramura conducătoare);

F_c^* — forţa de întindere a ramurilor transmisiei datorită forţei centrifuge, care acţionează asupra zalelor înfăşurate pe roţile de lanţ (egală în ambele ramuri);

$F_{g,2}$ — forţa de întindere a ramurei conduse, datorită greutăţii acesteia;

$F_{d\,1.2}$ — forţa dinamică suplimentară datorită efectului poligonal;

$F_{es\,1.2}$ — forţa statică echivalentă a şocului de angrenare.

Mărimea forţelor F_t, F_c^* şi $F_{g,2}$ se calculează cu relaţiile cunoscute din literatura de specialitate [8]. Pentru calculul mărimilor forţelor $F_{d\,1.2}$ şi $F_{es\,1.2}$ s-au stabilit următoarele relaţii [18], diferite de cele indicate în literatura de specialitate:

$$F_{d\,1.2} = \psi_{1.2} \frac{2v_m^2}{p} \cdot \frac{\pi}{z_{1.2}} \cdot \frac{1 - \cos\frac{\pi}{z_{1.2}}}{\sin\frac{\pi}{z_{1.2}}} m_{\text{red}\,1.2}, \tag{1}$$

$$F_{es\,1.2} = \left[\frac{1{,}5 \cdot 10^6 v_m^2 \cdot z_r^{k_z} \cdot m_{L\,1,2} \sin^2 2(\alpha_{1,2} + \gamma_{1,2})}{x_{1,2}^2 \cdot X_{1,2}} \right]^{k_v}, \tag{2}$$

în care $\psi_{1,2}$ este factorul de amortizare elastică al ramurilor transmisiei; v_m — viteza medie a lanţului; p — pasul lanţului; $m_{\text{red}\,1.2}$ — masa redusă a ramurilor transmisiei şi a sistemului de mase antrenate de acestea, în raport cu periferia roţilor conducătoare, respectiv condusă; z_r — numărul de rînduri de zale ale lanţului; $m_{L\,1.2}$ — masa ramurilor transmisiei; $X_{1,2}$ — numărul de zale ale ramurilor transmisiei (pe un rînd); k_z şi k_v — factori, ale căror valori se determină pe baza datelor experimentale.

Ca urmare, forţa rezultantă F care acţionează asupra zalelor prezintă valori diferite în cele două ramuri ale transmisiei şi anume:

$$\begin{aligned} F_{1\,\max} &= F_t + F_c^* + F_{d,1} + F_{es,1}, \\ F_{1\,\min} &= F_t + F_c^* - F_{d,1}, \end{aligned} \tag{3}$$

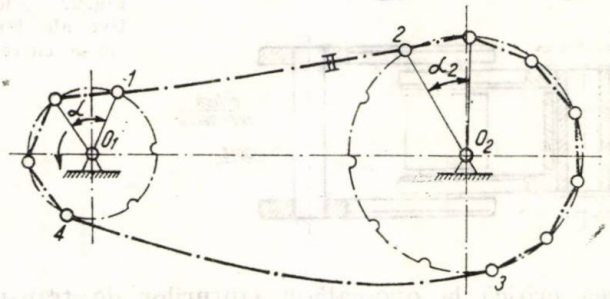
$$\begin{aligned} F_{2\,\max} &= F_c^* + F_{g,2} + F_{d,2} + F_{es,2}, \\ F_{2\,\min} &= F_c^* + F_{g,2} - F_{d,2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pe parcursul ramurilor transmisiei, sub acţiunea efectului poligonal, forţa rezultantă F variază între valorile limită $F_{1\min}$ şi $F_{1\max}$, respectiv $F_{2\min}$ şi $F_{2\max}$, iar pe roţile de lanţ, în trepte, după o progresie geometrică [8]. Ca urmare, regimul de variaţie a mărimii forţei rezultante F, care

acționează asupra zalei la un parcurs complet al conturului lanțului de transmisie, poate fi schematizat ca în figura 1.

Se constată că regimul de variație a mărimii forței rezultante F, are, în ansamblu, caracter oscilant, fiind format însă din patru regimuri oscilante, parțiale. Pentru calculul de rezistență al lanțului de transmisie este necesar ca acest regim oscilant nestaționar, care se repetă cu frecvența parcursurilor complete ale zalelor pe conturul lanțului de transmisie, să fie transformat într-un regim *oscilant staționar echivalent* [10]. În calculele curente se poate adopta însă o soluție simplificată, în sensul de a se considera numai regimul oscilant având amplitudinile limită $F_{2\min}$ și $F_{1\max}$, caracterizat prin coeficientul de asimetrie :

$$R_F = \frac{F_{\min}}{F_{\max}} = \frac{F_{2\min}}{F_{1\max}}. \tag{5}$$



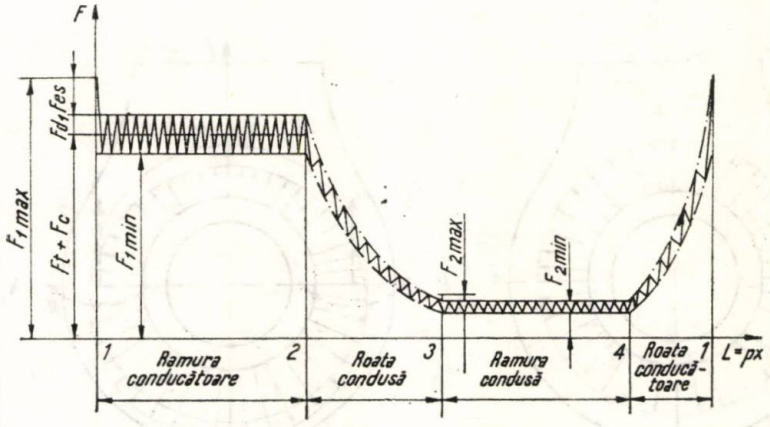


Fig. 1. — Regimul de variație a mărimii forței rezultante F.

În domeniul sarcinilor și vitezelor la care funcționează lanțurile în exploatare în mod obișnuit, acest coeficient prezintă valori în intervalul $R_F \simeq 0{,}1 \ldots 0{,}2$.

Coeficientul de asimetrie R_F dă o indicație asupra regimului de încărcare a zalei în ansamblu (lanțului). El nu este însă semnificativ pentru solicitarea la oboseală a secțiunii critice a ochiului ecliselor.

2. EFORTURILE CARE ACȚIONEAZĂ ÎN OCHIUL ECLISELOR ȘI ÎN SECȚIUNEA CRITICĂ A ACESTORA

Lanțurile de transmisie cu role și zale scurte, care reprezintă tipul principal de lanț pentru transmisiile cu lanț de putere, se formează prin montarea în serie, cu articulații, alternativ, a zalelor interioare și exterioare (fig. 2).

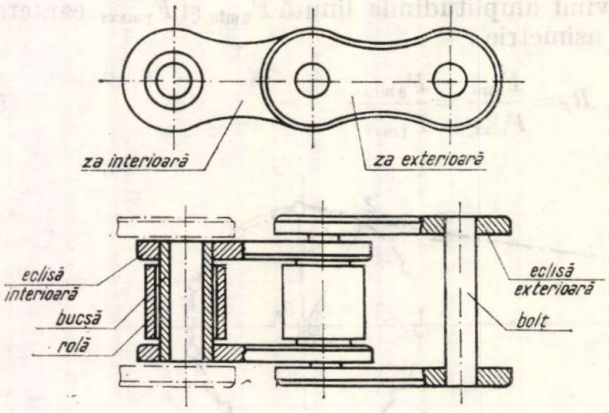


Fig. 2. — Elementele constructive ale lanțurilor de transmisie cu role și zale scurte.

Secțiunea critică la oboseală a lanțurilor de transmisie puternic solicitate, avînd zalele executate prin asamblarea cu strîngere elastică

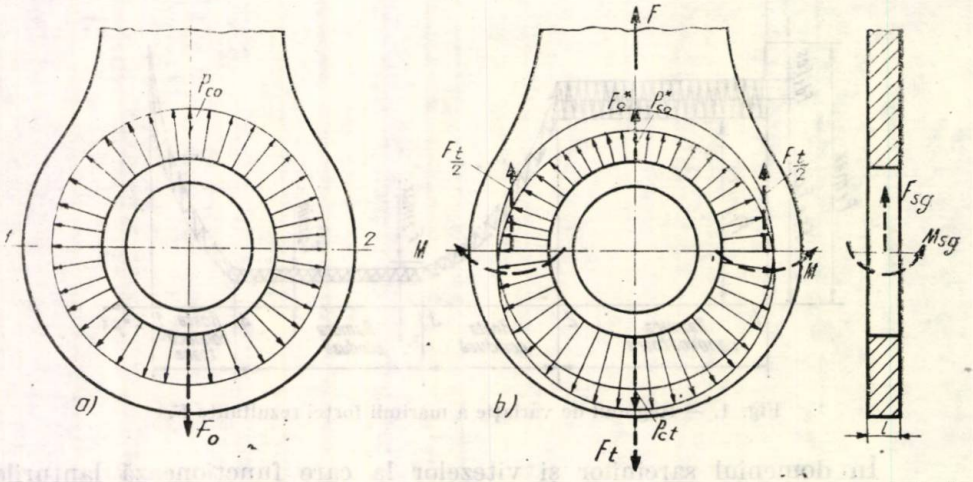


Fig. 3. — Schema eforturilor în ochiul ecliselor și în secțiunea critică a acestora : *a* — după asamblare și *b* — în starea de serviciu.

a elementelor componente este secțiunea diametrală 1—2 prin ochiul ecliselor, perpendiculară pe axa longitudinală a acestora (fig. 3).

Sub acțiunea strîngerilor elastice, a forței rezultante F și datorită unor abateri de la geometria corectă a zalelor, în ochiul ecliselor și în secțiunea critică a acestora, acționează eforturile ce se prezintă în continuare.

2.1. EFORTURILE DEZVOLTATE ÎN OCHIUL ECLISELOR DE STRÎNGERILE ELASTICE ȘI DE FORȚA REZULTANTĂ F

La asamblarea cu strîngere elastică a elementelor componente ale zalelor, datorită interacțiunii elementelor conjugate (cuprinse și cuprinzătoare) deformate elastic, pe suprafețele în contact ale acestora se dezvoltă presiuni de strîngere inițială (vezi fig. 3*a*).

Sub acțiunea forței rezultante F care acționează în serviciu asupra zalelor, starea inițială de deformații elastice și distribuția presiunilor de strîngere se modifică pe conturul de contact al elementelor componente ale zalelor. Forța rezultantă F acționează eclisele la întindere și se distribuie numai pe semicilindrul exterior al ochiului ecliselor. Pentru presiunea de contact dezvoltată de această forță în zona respectivă a ochiului ecliselor se admite, de regulă, o distribuție cosinusoidală (vezi fig. 3*b*).

Deformațiile elastice și presiunile de strîngere variază în funcție de poziția zalei pe conturul lanțului de transmisie (vezi fig. 1) și de variația în timp a forței rezultante F.

Se notează cu:

p_{c0} și F_0 — presiunea de strîngere inițială și forța rezultantă a acestei presiuni pe semicilindrul exterior al ochiului ecliselor (vezi fig. 3*a*);

p_c — presiunea de contact dezvoltată de forța rezultantă F asupra semicilindrului exterior al ochiului ecliselor;

p_{c0}^* și F_0^* — presiunea de strîngere instantanee și forța rezultantă a acestei presiuni care acționează în zona interioară a ochiului ecliselor în starea de serviciu (vezi fig. 3*b*);

p_{ct} și F_t — presiunea de contact totală datorită presiunilor p_{c0}^* și p_c și forța rezultantă totală a acestor presiuni pe semicilindrul exterior al ochiului ecliselor (vezi fig. 3*b*).

Mărimea presiunii de strîngere inițială p_{c0}, respectiv a strîngerilor elastice inițiale S, realizate la asamblarea elementelor componente ale zalelor este deosebit de importantă pentru rezistența la oboseală a lanțurilor de transmisie puternic solicitate. Valoarea medie a acestei presiuni considerată ca uniform distribuită pe conturul și lungimea elementelor în contact (vezi fig. 3*a*), se calculează cu relația cunoscută de la studiul tuburilor cu pereți groși, de lungime finită (ipoteza lui Rankine) [2], [15]:

$$p_{c0} = \frac{SE}{d_0} \cdot \frac{1}{k\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1\right) + \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_2^2} + \mu_2\right)}, \tag{6}$$

în care S este strîngerea dintre elementele asamblate; k_1 și k_2, sînt coeficienții geometrici ai pieselor cuprinse și cuprinzătoare (tuburilor); k — coeficient funcție de raportul l/d_0 și k_1 (l este lungimea de contact a ecliselor,

E, μ_1 şi μ_2 — modulul de elasticitate, respectiv coeficienţii lui Poisson pentru materialele pieselor cuprinse şi cuprinzătoare; şi d_0 — diametrul comun al elementelor după asamblarea lor cu strîngere elastică.

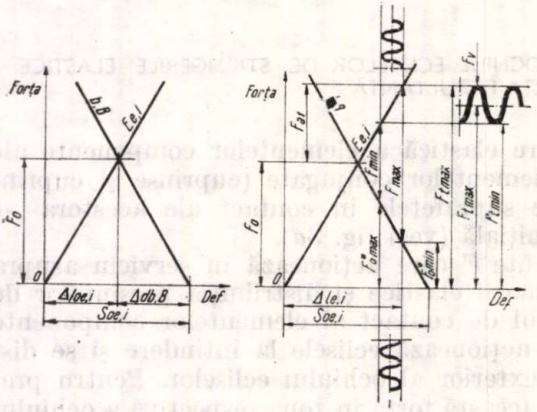


Fig. 4. — Diagramele forţă — deformaţie ale asamblării cu strîngere a elementelor zalelor: a — după asamblare şi b — în starea de serviciu.

În realitate, presiunea de contact variază în lungul asamblării datorită efectelor produse de lungimea finită a elementelor (efectul de capăt) [6]; [14].

Forţa rezultantă totală F_t a asamblării variază sub influenţa variaţiei forţei rezultante F care acţionează asupra zalelor. Mărimea presiunilor de contact, a forţelor rezultante ale acestora şi a deformaţiilor radiale elastice ale elementelor asamblate, respectiv a strîngerilor S ale acestora, în starea de repaus (fără sarcină) şi de serviciu (cu sarcină) a lanţului, se determină cu ajutorul diagramei forţă-deformaţie (fig. 4).

Deoarece $F_{t\min} > F_{2\min}$, din figura 4*b*, se constată efectul favorabil al asamblării cu strîngere a elementelor componente ale zalelor, în sensul că forţa rezultantă totală F_t a asamblării, care acţionează în secţiunea critică a ochiului ecliselor, variază după un ciclu oscilant mai avantajos (coeficient de asimetrie a ciclului mai mare) decît ciclul oscilant al forţei rezultante F, care acţionează asupra zalelor [vezi fig. 1 şi relaţia (5)].

2.2. EFORTURILE SECŢIONALE DIN SECŢIUNEA CRITICĂ A OCHIULUI ECLISELOR DATORITE ASAMBLĂRII CU STRÎNGERE ŞI FORŢEI REZULTANTE F

Semicilindrul exterior al ochiului ecliselor, considerat ca bară curbă, este încărcat, în starea de serviciu, de forţele rezultante F_0^* şi F, respectiv de forţa rezultantă totală F_t.

Forţa rezultantă F, care acţionează asupra zalei în ansamblu, dezvoltă în secţiunea critică a ochiului ecliselor următoarele eforturi secţionale: M — moment încovoietor; N — forţă axială şi T — forţă tăietoare, care se calculează cu următoarele relaţii:

$$M = C_M \cdot Fr, \tag{7}$$

$$N = C_N \cdot F = 0{,}5\,F, \tag{8}$$

$$T = C_T \cdot F = 0, \tag{9}$$

în care C_M, C_N și C_T sînt factorii eforturilor respective în raport cu forța rezultantă a zalei F, iar r — raza cercului ce trece prin centrul de greutate al secțiunii critice a ochiului ecliselor.

2.3. EFORTURILE SECȚIONALE SUPLIMENTARE DATORITE ABATERILOR DE LA GEOMETRIA CORECTĂ A FORMEI ZALELOR

Forma corectă a zalelor este de cadru dreptunghiular închis. Executarea zalelor prin asamblarea de eclise cu pași diferiți, sau cu abateri la distanța dintre eclisele aceleiași zale, sau cu strîngeri de mărimi diferite la cele patru asamblări din colțurile cadrului aceleiași zale, au ca efect modificarea formei de dreptunghi a cadrului zalei, în trapez sau paralelogram.

Cadrul zalei fiind un sistem static nedeterminat, abaterile dimensionale care îl transformă în trapez pot dezvolta eforturi suplimentare periculoase în secțiunea critică și în corpul ecliselor și anume : F_{sg} — forță axială și M_{sg} — moment încovoietor în încastrările cadrului zalelor (vezi fig. 3*b*).

Din rezolvarea sistemului static nedeterminat al cadrului zalelor, rezultă următoarele relații pentru calculul mărimii eforturilor suplimentare menționate mai sus [2] :

$$F_{sg} = \frac{3\,EI_2}{2a^3}\,\Delta p \quad \text{și} \quad M_{sg} = \frac{3EI_2}{a^2} \cdot \frac{\Delta p}{1 + 3\,\dfrac{p}{a}\,\dfrac{I_2}{I_1}}, \tag{10}$$

în care E este modulul de elasticitate al materialelor elementelor zalelor ; a — distanța dintre eclisele aceleiași zale ; I_1 și I_2 — momentele de inerție axiale medii ale secțiunilor transversale ale ecliselor, respectiv subansamblului bolțului sau bucșei ; p — pasul nominal al lanțului (zalelor), Δp — abaterea de la pas, produsă de diferite cauze.

Mărimea momentului încovoietor suplimentar este aproximativ egală pentru ambele tipuri de zale, în timp ce mărimea forței axiale este considerabil diferită, fiind de aproximativ cinci ori mai mare în secțiunea critică a ochiului ecliselor interioare decît la cele exterioare. Această situație contribuie la explicarea faptului constatat și experimental de către autorii lucrării, în sensul că la aceeași precizie de execuție numărul de ruperi este mult mai mare la eclisele zalelor interioare (la lanțurile de transmisie simple).

Pe lîngă eforturile suplimentare menționate mai sus, și alte abateri geometrice, privind transmisia în ansamblu, pot produce solicitări suplimentare importante în lanțurile de transmisie, care pot avea o apreciabilă influență negativă asupra portanței și durabilității lanțurilor de transmisie [8].

3. EFORTURILE UNITARE DIN SECȚIUNEA CRITICĂ A OCHIULUI ECLISELOR

Eforturile secționale prezentate în paragrafele precedente dezvoltă în secțiunea critică a ochiului eclisele exterioare (e) și interioare (i), în fibra de pe conturul interior al acestora, următoarele eforturi unitare normale [2]; [4]; [18]:

— din eforturile M și N, produse de încărcarea p_c:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{Ae} \cdot \frac{h}{r_a}, \tag{11}$$

— din presiunea de strîngere instantanee p_{c0}^*:

$$\sigma_T = \frac{k_2^2 + 1}{k_2^2 + 1} p_{c0}^*, \tag{12}$$

$$\sigma_R = - k_1 p_{c0}^*. \tag{13}$$

Eforturile unitare datorite asamblării cu strîngere elastică și forței rezultante F se pot determina și cu ajutorul metodei elementului finit [6].

— din eforturile suplimentare $M_{s,g}$, $F_{s,g}$ produse de erorile de formă ale cadrului zalelor și de efectul nedeterminării cadrului M_{sF}, la acțiunea forței exterioare F:

$$\sigma_s = \frac{F_{sg}}{A} + \frac{M_s}{W}, \tag{14}$$

unde

$$M_s = M_{sF} + M_{sg}. \tag{15}$$

Pentru calculul de rezistență al lanțului este necesar să se calculeze eforturile unitare echivalente, maxime și minime ale eforturilor unitare simple, menționate mai sus. Admițînd criteriul de rezistență al energiei potențiale de variație a formei, eforturile unitare echivalente σ_{ec} se calculează cu următoarea relație, scrisă sub formă generală

$$\sigma_{ec} = \sqrt{(\sigma + \sigma_T + \sigma_s)^2 + \sigma_R^2 - \sigma_R(\sigma + \sigma_T + \sigma_s)}, \tag{16}$$

în care, pentru eforturile unitare simple, se introduc expresiile (valorile) indicate mai sus.

Notațiile noi din relațiile precedente au următoarele semnificații: A este aria secțiunii critice a ochiului eclisei, și r_a — raza alezajului ochiului eclisei.

În calculele curente, relația (16) poate fi folosită sub o formă simplificată, în sensul neglijării unor termeni.

Așa cum s-a arătat în paragraful precedent, o parte din eforturile unitare simple dezvoltate în secțiunea critică a ochiului ecliselor sînt variabile după cicluri oscilante. Ca urmare, se consideră că variază tot după cicluri oscilante și eforturile unitare echivalente din secțiunea critică a ochiului ecliselor, caracterizate prin coeficienți de asimetrie de forma

$$R = \frac{\sigma_{ec,\,\min}}{\sigma_{ec,\,\max}}. \tag{17}$$

Mărimea acestor coeficienți de asimetrie este hotărîtoare pentru solicitarea la oboseală a lanțurilor. S-a arătat că sub efectul strîngerii asamblărilor zalelor, aceștia sînt mai favorabili (mai mari) decît coeficientul de asimetrie R_F al regimului oscilant al forței rezultante F [vezi relația (5) și § 2.1].

Regimul de solicitare a secțiunilor critice ale ecliselor este diferit la cele două tipuri de eclise (exterioare și interioare). Mai mult, el este diferit și în cele patru secțiuni critice ale ochiurilor ecliselor aceleiași zale, în dependență de mărimea și uniformitatea strîngerilor la care sînt realizate ansamblările respective.

Pentru coeficienții de asimetrie ai ciclurilor oscilante care solicită secțiunile critice ale ochiurilor ecliselor se pot indica următoarele valori medii : $R_e \simeq 0.8$ și $R_i \simeq 0{,}4 \ldots 0{,}6$. De remarcat și cu acest prilej faptul că eclisele interioare sînt solicitate apreciabil mai dezavantajos decît cele exterioare, ceea ce explică, în principal, ruperea lor mai frecventă (la lanțurile simple).

4. CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND REZISTENȚA LA OBOSEALĂ A LANȚURILOR DE TRANSMISIE SIMPLE ȘI MULTIPLE

În literatura de specialitate se găsesc relativ puține date privind rezistența la oboseală a lanțurilor de transmisie. Astfel, se dă numai indicația generală că această rezistență prezintă o largă împrăștiere, care poate fi cuprinsă în intervalul [16] : $S_v = (0{,}15 \ldots 0{,}25)\ S_r$, unde S_v este sarcina de rupere la oboseală, iar S_r — sarcina statică de rupere.

În Institutul de petrol și gaze din Ploiești, s-au inițiat cercetări experimentale pentru determinarea caracteristicilor mecanice ale lanțurilor de transmisie : sarcina statică de rupere ; comportarea la deformații (rigiditatea) ; mărimea strîngerilor elastice (mărimea cuplului forțelor de frecare din asamblările cu strîngere) și rezistența la oboseală. Cercetările au cuprins o gamă largă de tipodimensiuni de lanțuri de transmisie cu role și zale scurte, STAS 5174-66, simple (20A-1 ... 32A-1) și triple (20A-3 ...32A-3), avînd pașii $p = 31{,}75 \ldots 50{,}80$) mm.

Cercetările la oboseală s-au efectuat cu ajutorul unei maşini universale de încercat la sarcini variabile oscilante între limitele $F_{min} = 50$kN şi $F_{max} = 550$ kN (fig. 5).

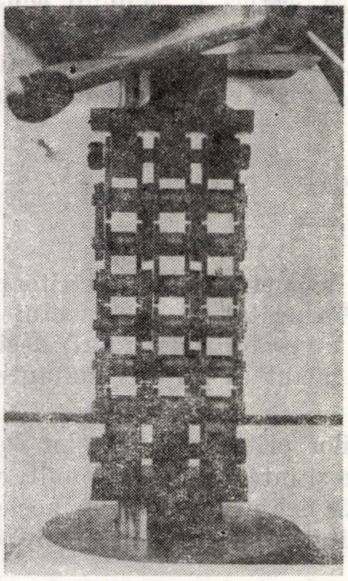


Fig. 5. — Lanţul triplu montat pe maşina de încercat la oboseală.

Lanţurile simple 24A-1 ($p = 38{,}11$ mm) au fost încercate şi funcţional, în condiţii apropiate celor din exploatare, pe o instalaţie specială construită în I.P.G.P., pe baza principiului funcţional al „fluxului închis mecanic" (fig. 6).

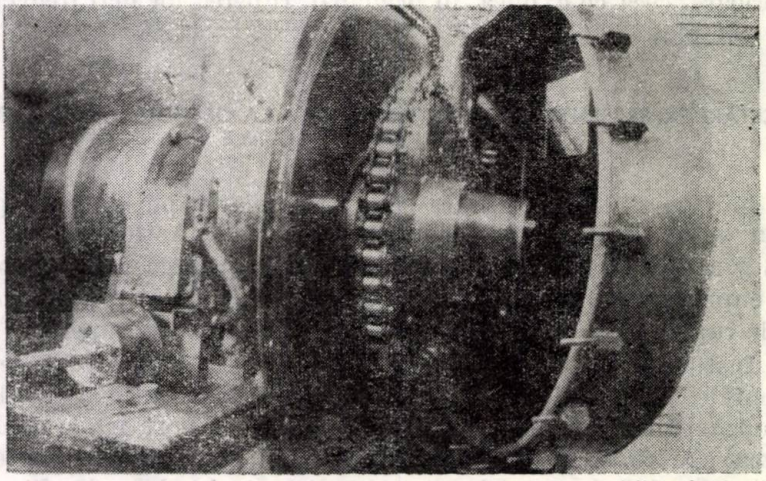


Fig. 6. — Lanţ montat pe instalaţia de încercat transmisii cu lanţ.

Datorită faptului că pulsatorul permite încercări numai la cicluri oscilante, avînd forţa limită minimă relativ ridicată, lanţurile au fost încercate la cicluri de încărcări oscilante, cu coeficienţi de asimetrie, în

general, mai mari (mai favorabili) decît cei corespunzători funcționării lor în exploatare [vezi rel. (5)].

Lanțurile încercate în aceste condiții s-au rupt la diferite numere de cicluri de solicitare, dependente de regimurile de încărcare și de mărimea coeficienților de asimetrie corespunzători acestora.

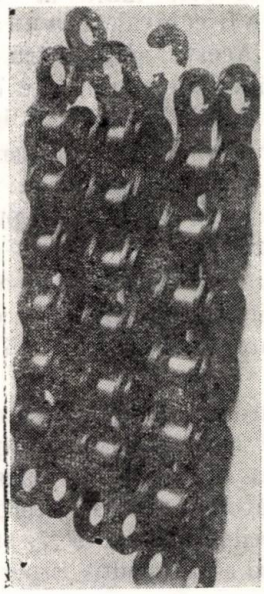


Fig. 7. — Exemple de ruperi la oboseală (lanțuri simple).

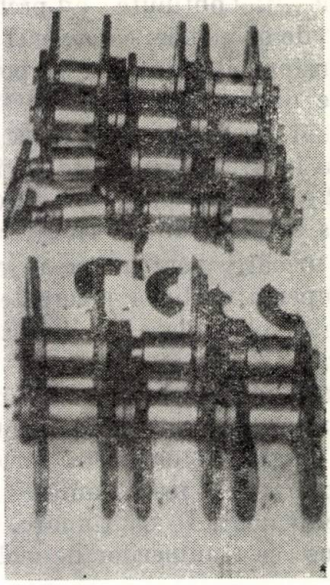


Fig. 8. — Exemple de ruperi la oboseală (lanțuri multiple).

În fotografiile din figurile 7 și 8 se prezintă unele exemple de rupere la oboseală a lanțurilor simple și multiple.

Cele mai multe ruperi s-au produs la eclisele interioare; ruperile de eclise exterioare și de bolțuri fiind mult mai reduse. Ruperile de bolțuri sau deformarea acestora la încovoiere, au provocat solicitarea suplimentară la încovoiere a ecliselor exterioare, deformarea și smulgerea acestora. De remarcat faptul că ruperile de eclise s-au produs numai în secțiunea critică la oboseală a acestora, conform determinărilor teoretice (vezi fig. 8).

5. CURBELE FORȚEI LIMITĂ LA OBOSEALĂ

Pentru ca datele privind rezistența la oboseală a lanțurilor obținute prin încercări la cicluri oscilante de diferite intensități să poată fi folosite în calculele de dimensionare, este necesar ca acestea să fie concretizate în *curbe ale forței limită la oboseală*, specifice acestei categorii de lanțuri

(cu asamblări cu strîngere). Aceasta, deoarece lanţul de transmisie, ca element articulat, poate prelua numai solicitări la întindere, cu ciclu oscilant, la limită pulsator.

Din motivele arătate mai sus (caracteristicile funcţionale ale pulsatorului), încercările s-au efectuat la cicluri oscilante avînd coeficienţi de asimetrie diferiţi, chiar şi pentru aceeaşi tipodimensiune de lanţ, însă de valori apropiate. Pentru a se construi curbele forţei limită la oboseală, rezultatele astfel obţinute s-au prelucrat pentru a fi echivalate la un anumit coeficient de asimetrie, considerat de referinţă. Acesta, atît pentru aceeaşi tipodimensiune de lanţ, cît şi pentru toate tipodimensiunile de lanţuri, spre a se obţine valori comparabile pentru forţele limită la oboseală.

Avînd în vedere faptul că lanţurile funcţionează în transmisii la cicluri de încărcare oscilante, avînd coeficienţi de asimetrie de valoare redusă ($R_F \simeq 0{,}1 \ldots 0{,}2$), care practic pot fi asimilate cu un ciclu pulsator, s-a admis ca ciclu de referinţă, ciclul pulsator.

Ca urmare, pentru fiecare ciclu de încărcare oscilantă, la care s-a produs ruperea probelor încercate, s-a determinat ciclul pulsator echivalent. Pentru echivalare s-a luat ca bază diagrama ciclurilor limită de tip Soderberg (fig. 9).

Astfel, pentru fiecare ciclu oscilant la care s-a produs ruperea unei probe s-au determinat componentele F_v şi F_m. S-au determinat apoi, cu ajutorul diagramei ciclurilor forţelor limită la oboseală, pe baza componentelor F_v şi F_m, forţa limită F_{-1v}, corespunzătoare ciclului alternant-simetric echivalent. În continuare, pe baza valorilor forţelor $F_{-1,i}$ stabilite ca mai sus şi a numerilor de cicluri N_i la care s-au produs ruperile res-

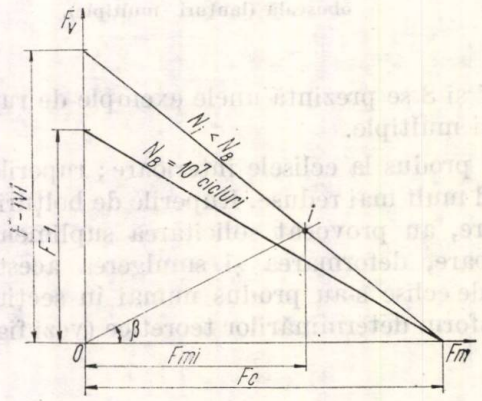


Fig. 9. — Diagramele ciclurilor forţelor limită de încărcare a lanţurilor de transmisie (schematizarea Soderberg).

pective, s-a determinat forţa limită la oboseală F_{-1} pentru ciclurile alternant-simetrice echivalente la numărul de cicluri de bază $N_B = 10^7$, folosind ecuaţia cunoscută a curbei de oboseală (Wöhler):

$$F_i^m N_i = F_{i+1}^m N_{i+1} = F_{-1}^m N_B = \text{const.} \qquad (18)$$

Folosind din nou diagrama ciclurilor limită (Soderberg), de astă dată pentru numărul de cicluri de bază ($N_B=10^7$) și valorile F_{-1}, s-a calculat forța limită la oboseală pentru orice tip de ciclu, cu formula cunoscută :

$$F_R = \frac{2F_cF_{-1}}{F_c + F_{-1} - R_F(F_c - F_{-1})}, \qquad (19)$$

în care F_c este forța limită de curgere a lanțului.

Aplicînd formula (19) și ecuația curbei de oboseală (18) pentru ciclul pulsator, s-au determinat curbele forțelor limită de oboseală corespunzătoare ciclului pulsator echivalent, pentru tipodimensiunile de lanțuri încercate. În figura 10 se prezintă, ca exemplu, diagrama forței limită la oboseală, la ciclul pulsator echivalent, a lanțurilor 32A-1 (simplu) și 32-A-3 (triplu). În această figură sînt prezentate și rezultatele experi-

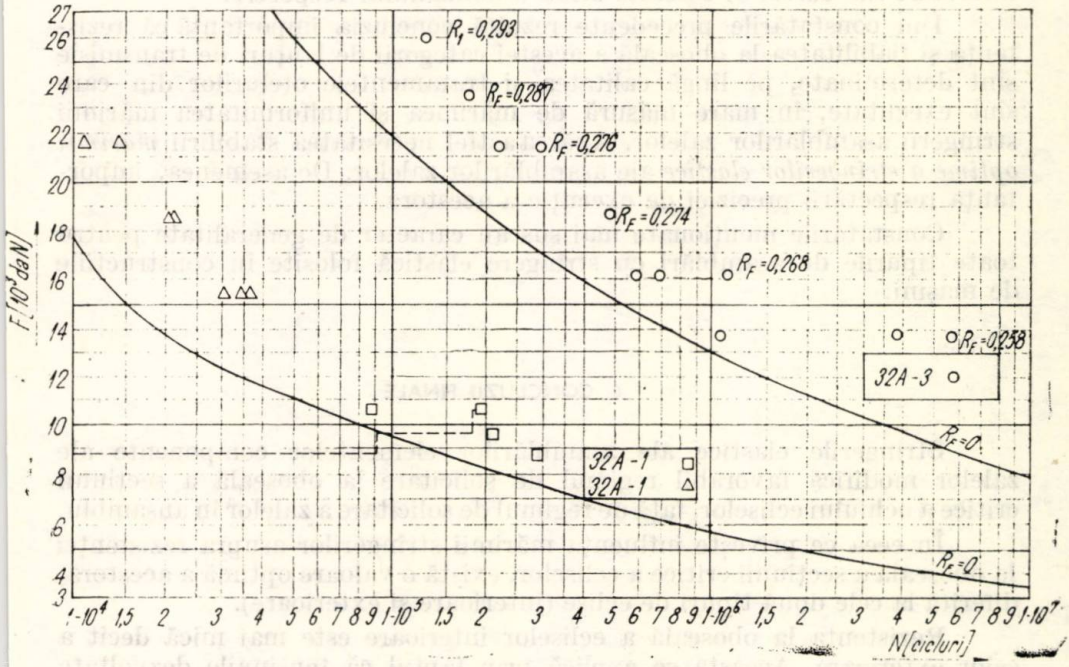


Fig. 10. — Diagrama forței limită la oboseală a lanțurilor de transmisie 32 A-1 și 32 A-3.

mentale obținute la încercarea probelor respective. Ele sînt marcate prin puncte corespunzătoare forței maxime a ciclului oscilant efectiv la care s-a efectuat încercarea, prin coeficientul de asimetrie R_F al acestuia și prin numărul de cicluri la care s-a produs ruperea probei respective. Curbele la oboseală la ciclul pulsator echivalent se situează evident, sub zona punctelor care reprezintă ruperile la ciclurile oscilante efective.

Curbele de oboseală ale lanţurilor de transmisie avînd zalele executate cu asamblări cu strîngere elastică, prezintă unele aspecte specifice foarte importante pentru comportarea lor la rezistenţa la oboseală. Astfel, sub influenţa strîngerilor la fiecare schimbare a încărcării lanţului, respectiv a mărimii forţei rezultante, se modifică valorile limită ale forţei totale $F_{t,\min}$, $F_{t,\max}$, care acţionează în secţiunea critică a ochiului ecliselor. Ca urmare, se modifică valoarea coeficientului de asimetrie a ciclului, astfel încît se trece pe o altă curbă de oboseală, cu o altă valoare a exponentului m al forţei din ecuaţia curbei de oboseală [vezi relaţia (18)]. În plus, fiecare za, exterioară şi interioară, respectiv fiecare asamblare a acestora, prezintă o curbă de oboseală proprie, funcţie de mărimea efectivă a strîngerilor asamblărilor respective, care au caracter aleator. Rezultă că sub aspectul rezistenţei la oboseală, lanţurile de transmisie avînd zalele asamblate cu strîngere elastică se caracterizează printr-un domeniu larg de valori ale rezistenţelor la oboseală, delimitat de *curbe de oboseală limită*. Funcţie de nivelul de fiabilitate necesar, în calculul de rezistenţă al lanţurilor se vor considera valorile rezistenţei la oboseală corespunzătoare curbei limită inferioare sau *curbei de oboseală medii* a domeniului respectiv.

Din constatările precedente rezultă concluzia importantă că rezistenţa şi fiabilitatea la oboseală a acestei categorii de lanţuri de transmisie sînt determinate, pe lîngă calitatea şi tratamentele oţelurilor din care sînt executate, în mare măsură de mărimea şi uniformitatea mărimii strîngerii asamblărilor zalelor. Apărea astfel necesitatea stabilirii *mărimii optime a strîngerilor elastice* ale asamblărilor zalelor. De asemenea, importanţa respectării preciziei de execuţie a acestora.

Constatările menţionate mai sus au caracter de generalitate pentru toate tipurile de asamblări cu strîngere elastică folosite în construcţiile de maşini.

6. CONCLUZII FINALE

Strîngerile elastice ale asamblărilor elementelor componente ale zalelor modifică favorabil regimul de solicitare la oboseală a secţiunii critice a ochiului ecliselor, faţă de regimul de solicitare a zalelor în ansamblu.

În ceea ce priveşte influenţa mărimii strîngerilor asupra rezistenţei la oboseală a secţiunii critice a ecliselor, există o valoare optimă a acestora, diferită la cele două tipuri de eclise (interioare şi exterioare).

Rezistenţa la oboseală a ecliselor interioare este mai mică decît a celor exterioare. Aceasta se explică prin faptul că tensiunile dezvoltate în secţiunea critică a acestora şi influenţa negativă a abaterilor de la forma corectă a zalelor sînt mai puternice la acest tip de eclise. Din aceste cauze la lanţurile simple se produc aproape exclusiv numai ruperi de eclise interioare şi de bolţuri.

Lanţurile simple prezintă totuşi o rezistenţă la oboseală cu aproximativ 20 ... 30% mai mare decît lanţurile triple. Diferenţa este mai accentuată în domeniul sarcinilor mari, explicabilă prin rigiditatea mai mare, progresivă, a lanţurilor multiple. Din această cauză lanţurile multiple se comportă mai favorabil în domeniul sarcinilor relativ mici.

Rezistența la oboseală mai mică a lanțurilor multiple se explică în primul rînd prin faptul că în construcția acestora intră eclise exterioare (intermediare) asamblate fără strîngere, solicitate la regimul oscilant al forței rezultante care acționează asupra zalelor, care este mai nefavorabil decît regimul oscilant care acționează în secțiunea critică a ecliselor. Din această cauză, la lanțurile multiple se rup frecvent eclisele exterioare intermediare. La aceasta se adaugă încărcarea neegală a rîndurilor de zale, care se accentuează cu creșterea numărului acestora. Există deci o limită funcțională și economică a rîndurilor de zale ale lanțurilor multiple.

Se remarcă astfel o diferență în modul de comportare în exploatare a lanțurilor simple și a celor multiple, în sensul că la primele este explicabilă ruperea mai frecventă a ecliselor interioare, iar la ultimele, a ecliselor exterioare intermediare. Această constatare motivează admiterea de rezistențe la oboseală diferite la calculul celor două tipuri de lanțuri.

Sub aspectul curbelor de oboseală ale lanțurilor de transmisie avînd zalele executate prin asamblarea cu strîngere elastică a elementelor componente, acestea se prezintă sub forma unui domeniu larg de valori ale rezistențelor la oboseală, delimitat de *curbe limită de oboseală*. Aceasta, deoarece fiecare za, interioară și exterioară, respectiv fiecare asamblare a acestora, prezintă o curbă de oboseală proprie, funcție de mărimea și uniformitatea strîngerilor efective, care au caracter aleator.

Din rezultatele obținute în încercările experimentale efectuate se constată că dispersia numărului de cicluri la care s-au produs ruperile este mai mare în domeniul sarcinilor mici. Aceasta se explică prin faptul că în domeniul sarcinilor mari se produce, prin plasticizare, o uniformizare a tensiunilor în zonele critice ale secțiunii periculoase a ochiului ecliselor, diminuînd astfel efectele dăunătoare ale concentratorilor locali de tensiuni. Din această cauză, asigurarea unei fiabilități corespunzătoare a acestei categorii de lanțuri de transmisie, în domeniul sarcinilor relativ mici în care lucrează, impune o precizie de execuție și montaj, foarte ridicată.

În ceea ce privește caracterul de generalitate al datelor experimentale determinate privind rezistența la oboseală a tipodimensiunilor de lanțuri cercetate (curbele forței limită la oboseală), ele comportă unele rezerve, deoarece au fost stabilite pe baza unui număr relativ redus de probe.

Primită la redacție la 27 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. N. Achenbach, *Lebensdausrberechnung von Rollenketten*, Ind. And., **39**, Mai (1968).
2. N. Antonescu, *Cercetări asupra construcției lanțurilor cu role și zale scurte, folosite la transmisiile instalațiilor de foraj* (teză de doctorat), București, I.P.G.P., 1970.
3. N. Antonescu, ș.a. *Stabilirea eforturilor unitare din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte prin metoda fotoelasticității*, St. cerc. mec. apl., *3*, **30**, (1971).
4. N. Antonescu, *Stabilirea eforturilor din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte*, St. cerc. mec. apl., *2*, **32** (1973).
5. N. Antonescu, D. Rașeev, *Contribuții la studiul preciziei lanțurilor cu role și zale scurte*, St. cerc. mec. apl., *5*, **32** (1973).
6. N. Antonescu, ș.a. *Stresses in Roller Chain Line Plates*, Rev. roum. sci. techn. Méc. appl. *2*, **20** (1975).

7. A. Bublic, ş.a. *Utilaj petrolire pentru foraj şi extracţie*, Bucureşti, Editura tehnică, 1968.
8. B. Horovitz, I. Minoiu, N. Gheorghiu, ş.a. *Transmisii şi variatoare prin curele şi lanţuri*, Bucureşti, Editura tehnică, 1971.
9. I. I. Ivaşcov, *Plasticistle ţepi*, Moskva, Maşghiz, 1960.
10. I. Minoiu, N. Tatu, *Contribuţii la studiul funcţionării şi la calculul la oboseală al transmisiilor cu lanţ*, Bul. I.P.G.G., **XVI**, (1968).
11. I. Minoiu, N. Tatu, *Contribuţii la studiul funcţionării şi la calculul transmisiilor cu lanţ*, Petrol şi gaze, *3* (1969).
12. G. Niemann, *Maschinenelemente*, Berlin (Göttingen) Heidelberg, Springer Verlag, 1961.
13. C. C. Osgood, *Fatique desing*, Wiley-Interscience a Division of Tohn Wiley and Sona Inc. New York — London Sidney—Toronto, 1970.
14. H. Pecken, *Festigkcitsuntersuchungen and Stahlgelank-Ketten*, Westdentscher, Verlag-Opladen, 1971.
15. D. S. Ponomariov ş.a. *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. 2 şi 3, Ed. tehnică, Bucureşti, 1963, 1964.
16. G. H. Rehner, *Stahlgelenkketten und Kettentriebe*, Berlin (Göttingen) Heidelberg, Springer Verlag, 1962.
17. M. R. Raskin, ş.a. *Tepnie peredaci burovih ustanovok*, Moskva, Izdatelstvo „Nedra", 1972.
18. N. Tatu, *Cercetări privind influenţa unor factori constructivi şi de exploatare asupra comportării funcţionale a transmisiilor cu lanţ.* (Teză de doctorat). Bucureşti, I.P.G.G., 1971.
19. N. Tatu, D. Raşeev, *Rigiditatea lanţurilor de transmisie cu role şi a transmisiilor cu lanţ folosite la instalaţiile de foraj*, St. cerc. mec. apl., *5*, **32**, (1973).
20. N. V. Vorobiev, *Tepnie peredaci*, Moskva, Maşghiz, 1962.
21. * * * Standarde : STAS, ASA, DIN, GOST, ş.a.
22. H. Zollner, *Kettentriebe*, München, Carl Hanser-Verlag, 1966.

STUDIUL TEHNOLOGIEI PRELUCRĂRII SUPRAFEȚELOR ELICOIDALE CU AJUTORUL VERSORILOR TRIEDRULUI LUI FRENET

de CSABA GYENGE

Institutul politehnic Cluj-Napoca

În cadrul lucrării se prezintă o metodă originală de determinare a pozițiilor sculelor abrazive la rectificarea suprafețelor elicoidale evolventice, prin utilizarea versorilor triedrului lui Frenet, trasate la liniile caracteristice ale suprafeței.

Prelucrarea corectă a suprafețelor elicoidale, întîlnite din ce în ce mai frecvent în construcția de mașini și la construcția sculelor așchietoare, reclamă determinarea unei reglări și a unei geometrii precise a sculei necesare. Calculul parametrilor necesari reglării și construcției profilului sculei, cît și restul parametrilor tehnologici, poate fi mult simplificată prin utilizarea complexă a unor noțiuni de geometrie diferențială și a calculatoarelor electronice. Metoda ce urmează se bazează pe utilizarea versorilor triedrului lui Frenet, duși în diferite puncte ale liniilor caracteristice ale suprafeței ce urmează a se prelucra.

După cum este cunoscut [4], suprafața elicoidală este generată de o curbă Γ (fig. 1) ce execută o mișcare compusă dintr-o rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, în jurul axei Oz și o deplasare în lungul axei cu viteza $\bar{u}$, între cele două mișcări existînd relația

$$p = \frac{\bar{u}}{\bar{\omega}} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v}, \tag{1}$$

unde p este parametrul mișcării elicoidale.

Dacă punctul curent M de pe curba Γ, în sistemul de coordonate mobil XYZ, este definit de vectorul de poziție $\bar{R} = \bar{R}(t)$, ecuațiile cele mai generale ale suprafeței elicoidale astfel generate se pot scrie în următoarele forme :

— vectorial :

$$\bar{r} = \bar{r}(t, v), \tag{2}$$

— parametric :

$$x = f_1(t)\cos v - f_2(t)\sin v,$$
$$y = f_1(t)\sin v + f_2(t)\cos v, \tag{3}$$
$$z = f_3(t) + pv,$$

— în coordonate polare :

$$x = \rho\cos(\theta + v),$$
$$y = \rho\sin(\theta + v), \tag{4}$$
$$z = \mathcal{F}_1(\rho) + pv.$$

În tehnologia modernă de prelucrare a suprafețelor elicoidale, metoda cea mai frecvent utilizată la finisare, este rectificarea. Poziționarea și profilarea corespunzătoare a corpurilor abrazive pentru aceste prelucrări, are una din influențele cele mai mari asupra realizării preciziei acestor suprafețe.

Precum este dovedit [4], dintre toate suprafețele elicoidale, numai cea evolventică poate fi rectificată cu o sculă plană (suprafața frontală a discului abraziv). Deși geometric, la prima vedere, poziționarea corectă a axei discului abraziv nu constituie o problemă deosebită, aspectele tehnologice de care trebuie să se țină cont în practică, solicită o analiză mai complexă.

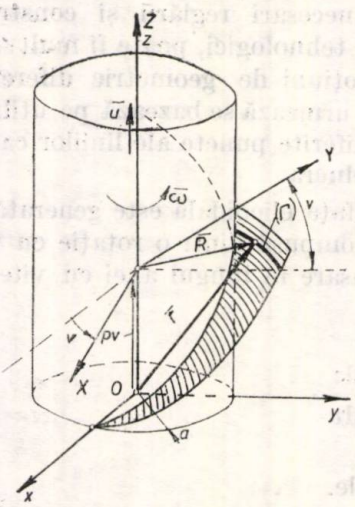


Fig. 1. — Generarea suprafeței elicoidale cilindrice.

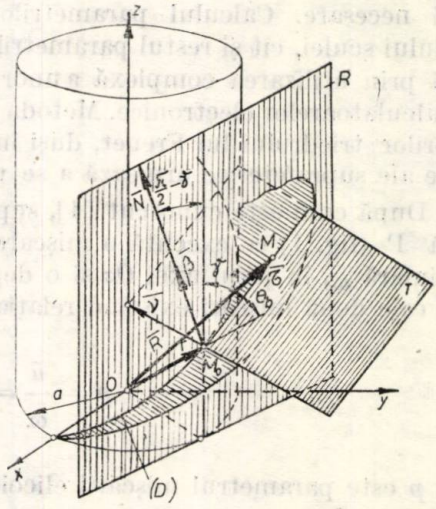


Fig. 2. — Generarea suprafeței elicoidale evolventice.

Considerînd suprafața elicoidală evolventică, ca o suprafață riglată descrisă de tangenta la linia elicoidală de pe cilindrul de bază (fig. 2), ecuația vectorială a suprafeței este

$$\bar{R} = \bar{r} + t\cdot\bar{\tau}, \tag{5}$$

unde $\bar{r} = \bar{r}(s)$ este raza vectoare a punctului M_0,

$\bar{\tau}$ — versorul tangentei la curba directoare, iar t — distanța de la punctul curent M, la M_0.

Pentru ca prelucrarea să poată avea loc cu partea frontală a discului, axa acestuia trebuie să fie dirijată după normala la suprafață, definită de ecuația vectorială

$$\bar{N} = \bar{R}_t \times \bar{R}_s. \tag{6}$$

Diferențiind parțial ecuația (5) și ținînd cont de relațiile dintre versorii triedrului lui Frenet, se obține

$$\bar{N} = tK\bar{\beta}, \tag{7}$$

unde K este curbura curbei directoare (linia elicoidală de pe cilindrul de bază), iar $\bar{\beta}$ — versorul binormalei la această curbă.

Rezultă că axa discului trebuie să fie orientată după binormala $\bar{\beta}$, care este perpendiculară pe planul osculator T, tangent la suprafața elicoidală (fig. 3).

Realizarea practică a acestei poziționări a axei discului abraziv, compusă dintr-o deplasare pe verticală și o rotație în jurul unei axe verticale,

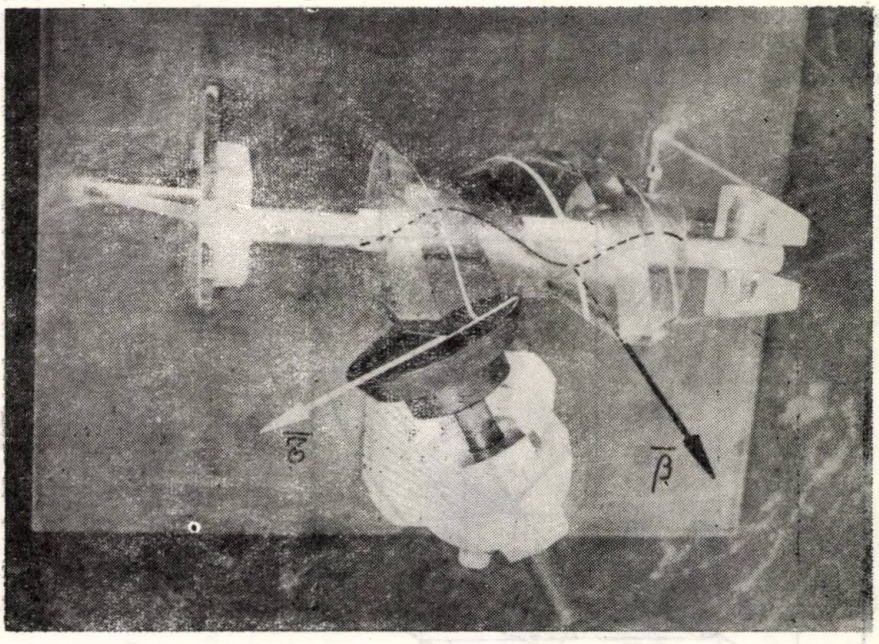


Fig. 3. — Poziția teoretică a axei discului abraziv la rectificarea suprafețelor elicoidale evolventice.

pe lîngă faptul că este dificilă, nu permite prelucrarea întregii lungimi a flancului.

Aceste inconveniente pot fi înlăturate poziționînd axa discului abraziv prin două rotații în jurul a două axe perpendiculare, în așa fel

ca să fie respectat principiul amintit. În plus, condiţiile de aşchiere cu suprafaţa frontală a discului şi de prelucrare a ambelor flancuri ale unui melc necesită o poziţionare a discului în aşa fel ca suprafaţa sa plană să fie

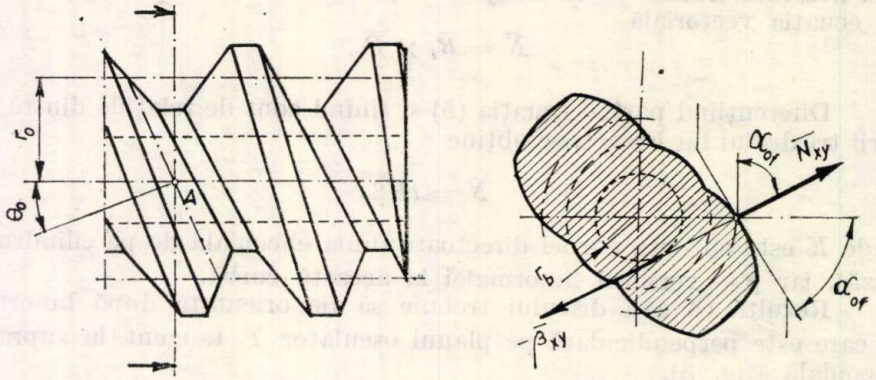


Fig. 4. — Poziţia normalei la suprafaţa elicoidală evolventică, în punctul unde linia elicoidală de pe cilindrul de referinţă înţeapă planul orizontal.

perpendiculară pe normala la suprafaţa elicoidală evolventică în punctul A, în care linia elicoidală de pe cilindrul de referinţă de rază r_0 înţeapă planul orizontal (fig. 4).

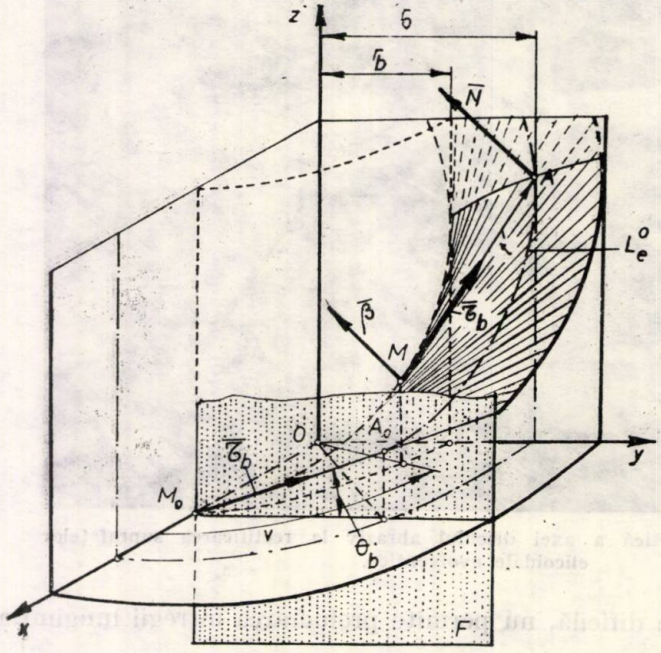


Fig. 5. — Poziţiile relative ale generatoarei rectilinii şi a normalei la suprafaţa elicoidală evolventică.

Considerînd că suprafaţa evolventică este descrisă de tangenta $\bar{\tau}_b$ la linia elicoidală de pe cilindrul de bază de rază r_b (fig. 5), ecuaţiile para-

metrice a liniei elicoidale de pe cilindrul de referință se pot scrie sub forma :

$$x = r_b \cos v - \sqrt{r_0^2 - r_b^2} \sin v,$$
$$y = r_b \sin v + \sqrt{r_0^2 + r_b^2} \cos v, \qquad (8)$$
$$z = \sqrt{r_0^2 - r_b^2} \operatorname{tg} \theta_b + r_0 \operatorname{tg} \theta_0 v.$$

Punctul A, de intersecție a acestei linii elicoidale cu planul $x = 0$, este determinat de coordonatele

$$= 0, \quad y = r_0; \quad z = \sqrt{r_0^2 - r_b^2} \operatorname{tg} \theta_b + r_0 \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{arc\,tg} \frac{r_b}{\sqrt{r_0^2 - r_b^2}}. \qquad (9)$$

Cosinușii directori ai binormalei la linia elicoidală de pe cilindrul de bază, după [4 p. 23] se pot determina cu relațiile :

$$\cos \lambda_x = \frac{r_b}{r_0} \sin \theta_b,$$
$$\cos \lambda_y = \frac{\sqrt{r_0^2 - r_b^2}}{r_0} \sin \theta_b, \qquad (10)$$
$$\cos \lambda_z = \cos \theta_b.$$

Aceste unghiuri definesc, ca urmare, poziția axei discului față de sistemul de coordonate fix xyz.

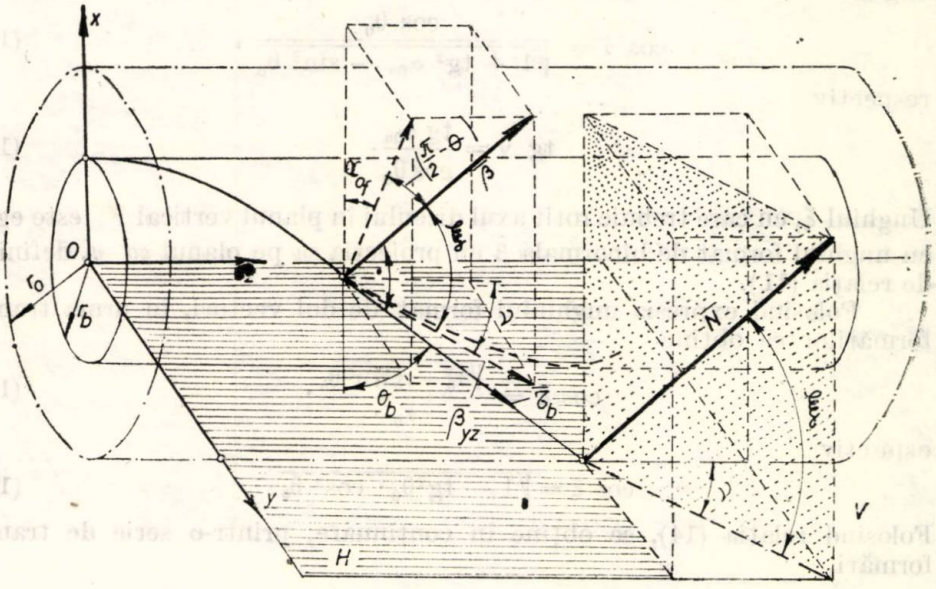


Fig. 6. — Poziționarea normalei la suprafața elicoidală evolventică.

Pentru poziționarea practică a axei discului abraziv, pe baza acestor unghiuri $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$, trebuie determinat unghiul ν de rotire în planul orizontal și apoi unghiul ξ, de rotire într-un plan vertical, rotit cu unghiul ν, față de planul xoz (fig. 6).

Proiecţia binormalei $\bar{\beta}$, pe planul *zoy* este

$$\bar{\beta}_{zy} = -\sin\theta_b \frac{\sqrt{r_0^2 - r_b^2}}{r_0}\bar{j} + \bar{k}\cos\theta_b, \tag{11}$$

de unde unghiul ν, pe care această proiecţie o face cu axa *oz*, va fi determinat de expresia

$$\cos\nu = \frac{\cos\theta_b}{\sqrt{\frac{r_0^2 - r_b^2}{r_0^2}\sin^2\theta_b + \cos^2\theta_b}}. \tag{12}$$

Înlocuind $\frac{r_b}{r_0} = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\operatorname{tg}\theta_b}$, după o serie de transformări se obţine

$$\cos\nu = \frac{\cos\theta_b}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\theta_0\cos^2\theta_b}}. \tag{13}$$

Dacă este cunoscut unghiul cremalierei generatoare în secţiunea sa normală, α_{0n} (unghiul de presiune), folosind relaţia [6, p. 59]

$$\operatorname{tg}\theta_b = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_0 + \operatorname{tg}^2\alpha_{0n}}}{\cos\theta_0}, \tag{14}$$

şi efectuînd transformările necesare, se găsesc următoarele expresii pentru unghiul ν:

$$\cos\nu = \frac{\cos\theta_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_{0n} - \sin^2\theta_0}}, \tag{15}$$

respectiv

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{0n}}{\cos\theta_0}. \tag{16}$$

Unghiul ξ, cu care trebuie rotit axul discului în planul vertical V, este egal cu unghiul format de binormala $\bar{\beta}$ cu proiecţia sa pe planul *zo y*, definită de relaţia (11).

Folosind expresia unghiului format de doi vectori, în urma transformărilor se obţine

$$\cos\xi = \frac{\sqrt{r_0^2 - r_b^2\sin^2\theta_b}}{r_0}, \tag{17}$$

espectiv

$$\cos\xi = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\theta_0 \cdot \cos^2\theta_b}. \tag{18}$$

Folosind relaţia (14), se obţine în continuare, printr-o serie de transformări,

$$\sin\xi = \sin\theta_0\cos\alpha_{0n}. \tag{19}$$

La unele maşini moderne de rectificat melci, axa discului abraziv este înclinat, constructiv, în poziţie iniţială fixă, cu unghiul ε, faţă de axa melcului.

După cum se observă din macheta reprezentată în figura 7, poziționarea axei sculei după normala la suprafață în punctul amintit, se

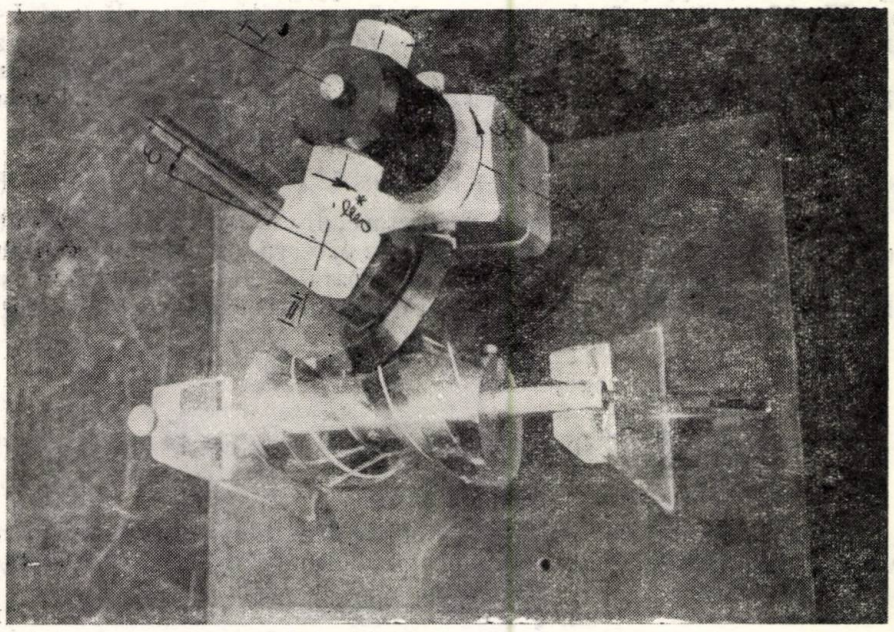


Fig. 7. — Poziționarea axei discului abraziv prin rotirea în jurul unei axe orizontale și a uneia verticale.

face prin două rotații : una în jurul axei verticale I—I, cu unghiul ψ, și una în jurul axei orizontale, cu unghiul ξ *.

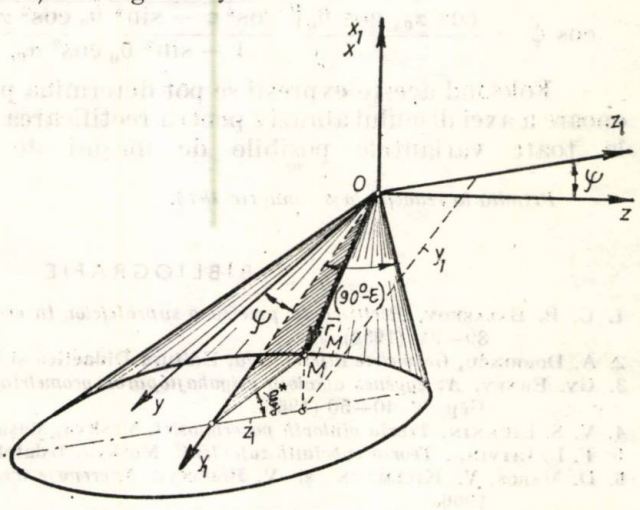


Fig. 8. — Suprafața descrisă de axa discului abraziv la rotirea în jurul axei orizontale.

Prin rotirea suportului orizontal 1, în jurul axei II—II, axa discului abraziv va descrie o suprafață conică cu semiunghiul $(90° - \varepsilon)$ (fig. 8). Axa discului trebuie să fie paralelă cu binormala $\overline{\beta}$, definită de cosinușii directori din relațiile (10).

Pentru a defini poziţia axei discului astfel reglat, să considerăm un sistem de axe $y_1x_1z_1$, în aşa fel încît axa oy_1, să coincidă cu axa conului (axa II—II din figura 7), iar axa ox, să aibe o poziţie verticală (axa I — I din figura 7). Generatoarea acestui con, reprezintă axa discului abraziv.

Vectorul de poziţie a punctului curent M, de pe generatoarea, aflată la o distanţă egală cu unitatea de vîrful acestuia, este definit de relaţia

$$\bar{r}_M = \cos\varepsilon \sin\xi^* \bar{i} + (\sin\varepsilon\cos\psi - \cos\varepsilon\cos\xi^*\sin\psi)\bar{j} + \\ + (\sin\varepsilon\sin\psi + \cos\varepsilon\cos\xi^*\cos\psi)\bar{k}. \tag{20}$$

Cunoscînd că, în practică la prelucrare, discul abraziv este în spatele melcului, parametrul director după direcţia y, se va lua cu semn schimbat.

Punînd condiţia ca acest vector să fie paralel cu binormala şi folosind relaţiile (10), prin egalarea parametrilor directori ai cei doi vectori se obţine

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\operatorname{tg}\theta_b}\sin\theta_b = \cos\varepsilon\sin\xi^*,$$

$$-\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta_0}{\operatorname{tg}^2\theta_b}}\sin\theta_b = \sin\varepsilon\cos\psi - \cos\varepsilon\cos\xi^*\sin\psi, \tag{21}$$

$$\cos\theta_b = \sin\varepsilon\sin\psi + \cos\varepsilon\cos\xi^*\cos\psi.$$

Din prima egalitate, exprimînd unghiul θ_b în funcţie de unghiul cremalierei de referinţă α_{0n}, pe baza relaţiei (14), în urma transformărilor, se obţine

$$\sin\xi^* = \frac{\sin\theta_0\cos\alpha_{0n}}{\cos\varepsilon}. \tag{22}$$

Din ultimele două egalităţi eliminînd pe $\sin\psi$ şi operînd transformările necesare se obţine

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha_{0n}\cos\theta_0\sqrt{\cos^2\varepsilon - \sin^2\theta_0\cos^2\alpha_{0n}} + \sin\alpha_{0n}\sin\varepsilon}{1-\sin^2\theta_0\cos^2\alpha_{0n}}. \tag{23}$$

Folosind aceste expresii se pot determina precis elementele de poziţionoare a axei discului abraziv pentru rectificarea oricărui melc evolventic, la toate variantele posibile de maşini de rectificat.

Primită la redacţie la 8 ianuarie 1975.

BIBLIOGRAFIE

1. G. P. Balaskov, *Rectificarea precisă a suprafeţelor în evolventă*, Maşini-unelte şi scule, *6*, 89—94 (1956).
2. A. Dobrescu, *Geometrie diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.
3. Gy. Erney, *Az egyenes alkotoju csigahajtópárok geometriájának hazai kutatási eredményei*, Gép, *2*, 40—50 (1969).
4. V. S. Liuknin, *Teoria vintovih poverhnostei*, Moskva, Maşinostroenie, 1968.
5. F. L. Litvin, , *Teoria zubceatih zaţeplenii*, Moskva, Izdatelstvo Nauka, 1968.
6. D. Maroş, V. Killmann şi V. Rohonyi, *Angrenaje melcate*, Bucureşti, Editura tehnică, 1966.
7. D. Maroş, *Rectificarea melcilor evolventici*, Metalurgia şi construcţia de maşini, *2*, 140—144 (1963).
8. M. P. Merpert şi I. V. Bitiev, *Rectificarea suprafeţelor elicoidale riglate de precizie, cu unghi de pantă mare*, Maşini-unelte şi scule, *1*, 3—12 (1957).
9. G. Stade, *Das Schleifen exakter Evolventenschnecken*, Klepzig Fachberichte, *140*, 362—362 (1967).

STUDIUL NIVELULUI VIBRAȚIILOR LATERALE ALE LOCOMOTIVEI DIESEL-ELECTRICE 060-DA

de TRAIAN GLIGOR și IVAN ORGOVICI
Institutul politehnic „Traian Vuia" Timișoara

În lucrare se fac cercetări experimentale asupra nivelului vibrațiilor laterale a unei locomotive care circulă în aliniament, liberă și remorcînd o garnitură.
Studiul se face statistic, utilizîndu-se un lanț de aparate electronice de mare precizie, iar rezultatele obținute se compară cu cele obținute teoretic în lucrările [1]—[7].

Studiul vibrațiilor laterale ale oricărui vehicul de cale ferată prezintă interes pentru proiectarea sau modernizarea vehiculului deoarece aceste vibrații sînt cele mai importante în aprecierea gradului de confort și a securității vehiculului.

În lucrările [1]—[7], s-au studiat teoretic diferite probleme ale vibrațiilor laterale ale unei locomotive diesel-electrice. În lucrare se fac cercetări experimentale ale acestor vibrații, iar rezultatele se confruntă cu cele obținute teoretic, pentru cazul cînd locomotiva circulă liberă și remorcînd un tren de marfă.

Măsurătorile experimentale s-au efectuat pe o locomotivă diesel-electrică, la vitezele de 60, 80 și 100 km/oră în aliniament, pe ruta Timișoara — Lugoj și înapoi.

Scopul urmărit în lucrare, prin confruntarea rezultatelor teoretice cu cele experimentale, este :

a) verificarea alegerii modelului mecanic pentru studiul teoretic, în vederea folosirii lui și la viteze mai mari de circulație ;

b) recomandarea folosirii metodei experimentale de studiu și pentru alte vehicule de cale ferată.

1. SCHEMA BLOC A INSTALAȚIEI ELECTRONICE DE ÎNREGISTRARE A VIBRAȚIILOR LATERALE

Pentru înregistrarea vibrațiilor laterale s-a folosit o instalație electronică Brüel și Kjaer avînd schema bloc din figura 1, utilizîndu-se traductorii de accelerație :

T_{1x} — pentru înregistrarea deplasării laterale a primului boghiu, în dreptul primei osii montate ;

T_{2x} — pentru înregistrarea deplasării laterale a primului boghiu, în dreptul pivotului;

T_{1y} — pentru înregistrarea deplasării laterale a celui de-al doilea boghiu, în dreptul ultimei osii montate;

T_{2y} — pentru înregistrarea deplasării laterale a celui de-al doilea boghiu în dreptul pivotului;

T_{1z} și T_{3z} — pentru înregistrarea deplasării laterale a cutiei locomotivei, montată în cabina mecanicului pe pupitrul de comandă;

T_{2z} — pentru înregistrarea deplasării laterale a cutiei locomotivei, montată în exterior la nivelul podelei și la mijlocul cutiei.

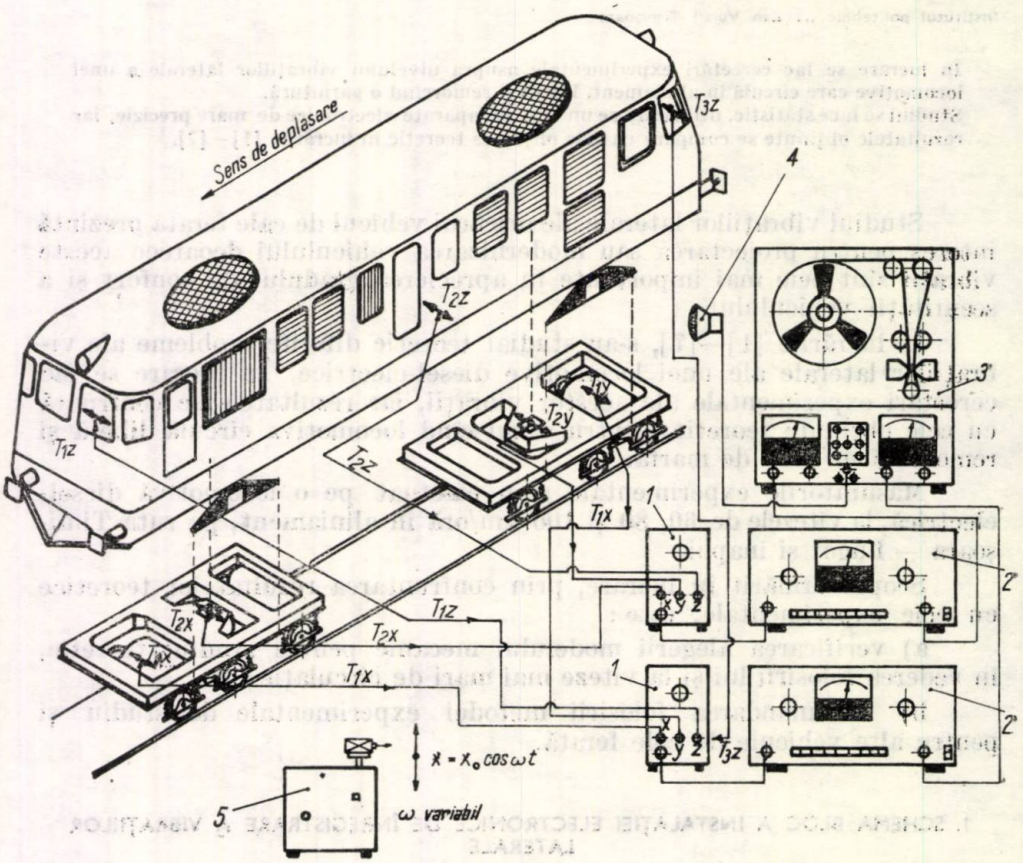


Fig. 1. — Schema bloc a instalației electronice de înregistrare a vibrațiilor: T_1 — traductori piezoelectrici de vibrații tip KB11; *1* — preamplificator înregistrator tip 2625; *2* — amplificator de măsură tip 2606; *3* — înregistrator magnetic tip 7001; 4 — microfon electrodinamic pentru comentariu; *5* — masă de etalonare cu frecvență variabilă.

Pe fiecare subansamblu (cutie sau boghiu) s-au montat cîte doi traductori a căror semnale au fost înregistrate simultan, acest lucru fiind necesar pentru obținerea vibrațiilor notate în calculul analitic cu (q_6, q_4), (q_7, q_5) și (q_2, q_1).

Aceste grupuri de cîte doi traductori sînt cuplate la preamplificatoarele *1*, ce integrează semnalele electrice proporționale cu accelerația în semnale electrice proporționale cu deplasarea. Semnalele sînt apoi amplificate prin amplificatoarele *2*, la nivelul cerut de intrarea înregistratorului magnetic *3*. Comentariul legat de procesul de înregistrare se înregistrează pe banda magnetică prin intermediul microfonului *4*.

2. SCHEMA BLOC A INSTALAȚIEI ELECTRONICE FOLOSITĂ LA PRELUCRAREA VIBRAȚIILOR ÎNREGISTRATE PE BANDĂ MAGNETICĂ

În figura 2 este prezentată schema bloc a instalației electronice folosită la prelucrarea semnalului $U(t) = Kx(t)$ ce a fost înregistrat pe bandă magnetică.

Mișcarea vibratorie $x(t)$, avînd un caracter aleator, nu i se poate defini frecvența și amplitudinea. De aceea, s-a ales schema bloc de prelucrarea semnalului $U(t)$, pentru prelucrarea lui statistică.

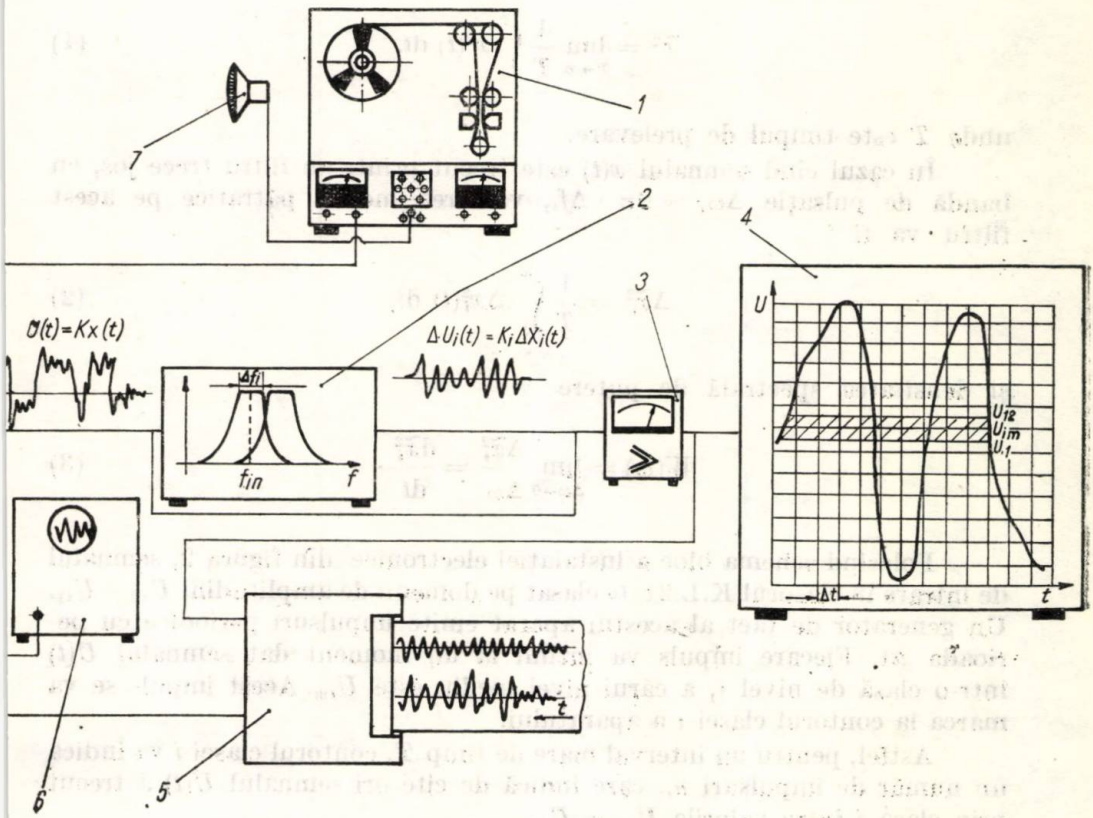


Fig. 2. — Schema bloc a instalației electronice pentru prelucrarea vibrațiilor înregistrate pe bandă magnetică: *1* — înregistrator magnetic tip 7001; *2* — filtru combinat tip KF 103; *3* — voltmetru electronic tip 2425; *4* — clasor statistic tip KLA2; *5* — oscilograf cu buclă; *6* — osciloscop de control; *7* — difuzor microfon.

Semnalul $U(t)$ de la înregistratorul magnetic *3* (fig. 1) este trecut prin setul de filtre combinat tip K.F. 103 (fig. 2) compus din filtre trece jos și trece sus, care se pot combina în 8 filtre trece bandă, cu lățimea de bandă Δf_i și frecvența medie f_{im}.

La trecerea semnalului $U(t)$ prin filtrul *2*, semnalul va fi filtrat și din forma lui complexă, prin filtru va trece numai semnalul de bandă îngustă $\Delta U_i(t) = K\,\Delta x_i(t)$. Semnalul, încadrat într-o bandă de frecvență, este trecut prin intermediul voltmetrului electronic *3* de tip 2425, la clasorul statistic *4* de tip K.L.A.2, care are rolul de a plasa pe nivele de amplitudini semnalul $\Delta U_i(t)$, pentru valori instantanee sau extreme.

3. PRELUCRAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE PRIN DETERMINAREA VALORII MEDIEI PĂTRATICE $\tilde{x}_j^2$ ȘI A DENSITĂȚII SPECTRALE DE PUTERE W(ω)

Starea energetică a unui sistem vibrant este caracterizată prin valoarea mediei pătratice, definită prin relația

$$\tilde{x}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

unde T este timpul de prelevare.

În cazul cînd semnalul $x(t)$ este trecut printr-un filtru trece jos, cu bandă de pulsație $\Delta\omega_i = 2\pi \cdot \Delta f_i$, valoarea mediei pătratice pe acest filtru va fi

$$\Delta\tilde{x}_i^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta x_i^2(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

și densitatea spectrală de putere

$$W(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\Delta\tilde{x}_i^2}{\Delta\omega} = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_i^2}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Folosind schema bloc a instalației electronice din figura 2, semnalul de intrare în clasorul K.L.2 este clasat pe domenii de amplitudini $U_{i2} - U_{i1}$. Un generator de tact al acestui aparat emite impulsuri periodice cu perioada Δt. Fiecare impuls va întîlni la un moment dat semnalul $U(t)$ într-o clasă de nivel i, a cărui nivel mediu este U_{im}. Acest impuls se va marca la contorul clasei i a aparatului.

Astfel, pentru un interval mare de timp T, contorul clasei i va indica un număr de impulsuri n_i, care indică de cîte ori semnalul $U(t)$ a trecut prin clasa i între valorile $U_{i2} = U_{i1}$.

Dacă intervalul de timp T se împarte în $N = \Sigma n_i$ intervale Δt, se cunosc valorile tensiunilor U_{im}^2 de clasă reglate pe aparat și valorile n_i de

la contoarele de clasă, valoarea medie pătratică pentru intervalul de timp T este dată de relația

$$\Delta\tilde{x}_1^2 = K_1 \frac{\sum_{i=1}^{13} n_j^i U_{jm}^2}{\sum_{i=1}^{13} n_j^i} \text{ [mm]}, \tag{4}$$

și densitatea spectrală de putere, de relația

$$W(\omega) = \frac{\Delta x_i^2}{\Delta\omega} \text{ [mm}^2\text{s]}, \tag{5}$$

unde K este factorul de scară al aparatelor folosite.

De asemenea, pentru compararea rezultatelor obținute teoretic și experimental, se mai definește amplitudinea de vîrf echivalentă $\hat{x}_{OEc}$ pentru întreaga bandă de frecvență

$$\hat{x}_{OEc} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{s} \Delta x_i^2},$$

unde s este numărul de filtre trece bandă folosite.

Înregistrările experimentale de pe bandă magnetică prelucrate cu ajutorul instalației electronice din figura 2, au fost sintetizate în 48 de tabele de forma tabelului 1.

4. PREZENTAREA ȘI INTERPRETAREA REZULTATELOR

Din cele 48 de tabele s-au extras densitățile spectrale de putere funcție de valorile medii ale filtrelor folosite, pentru cele trei viteze de deplasare.

Aceste valori au fost reprezentate în fig. 3 pentru boghiuri și în fig. 4 pentru cutia locomotivei.

Pentru confruntarea nivelelor de vibrații obținute teoretic și experimental (cînd locomotiva circulă izolată pe cale), s-a întocmit tabelul 2, care cuprinde valorile mediei pătratice $\tilde{x}_0^2$ și a amplitudinilor de vîrf echivalente.

Tabelul 2

	Traductor	v = 80 km/h				v = 100 km/h			
		$\tilde{x}^2$[mm^2]		$\hat{x}_{OEc}$[mm^2]		$\tilde{x}^2$[mm^2]		$\hat{x}_{OEc}$[mm]	
		teor.	exper.	teor.	exper.	teor.	exper.	teor.	exper.
Boghiu	1x	15,59	16,01	5,30	5,65	95,5	99,8	13,5	14,1
	1y	39,21	41,1	8,76	9,06	63,2	66,2	10,91	11,51
	2x	10,2	10,76	4,51	4,63	40,2	42,2	8,85	9,18
	2y	18,6	19,39	5,91	6,22	29,2	30,91	7,42	7,86
Cutie	1z	54,2	50,09	10,6	10,0	480,3	454,6	32,7	30,15
	2z	6,3	5,8	3,6	3,4	80,2	74,59	13,3	12,21

Tabelul 1

Nr. contor	U_j^2 [V²]	n_j^i						$n_j^i U_j^2$ [V²]		← A^R[V]
		0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,1	0, 1	← Δf [Hz]
		0,5–0,71	0,71–1	1–1,4	1,4–2	2–2,8	2,8–4	4–5,6	5,6–8	
1	0,810	85 / 68	235 / 190	197 / 159	272 / 220	14 / 11	27 /	90 / 72	21 / 17	
2	0,518	140 / 71	248 / 126	398 / 202	492 / 250	148 / 75	39 / 19	142 / 67	37 / 18	$A' = 10$ mV
3	0,291	430 / 124	528 / 153	632 / 183	519 / 150	385 / 111	129 / 37	363 / 105	87 / 25	$A'_E = 3$mV
4	0,129	1 144 / 137	892 / 107	709 / 85	852 / 102	639 / 76	576 / 69	767 / 92	311 / 37	$A^R_E = 1$V
5	0,032	1 386 / 41	1 019 / 30	904 / 27	913 / 27	1 619 / 48	1 827 / 54	1 490 / 44	1 660 / 49	$I = 0{,}8$ V
6	0	2 139 / 0	1 221 / 0	980 / 0	1 033 / 0	2 956 / 0	3 703 / 0	1 910 / 0	5 032 / 0	$X_{OE} = 2{,}63$ mm
7	0,032	1 484 / 44	1 066 / 31	777 / 23	1 045 / 31	1 496 / 44	1 912 / 57	1 411 / 42	1 478 / 44	$\widetilde{X}^2 = 99{,}8$ mm
8	0,129	1 095 / 131	870 / 104	782 / 93	786 / 94	835 / 88	477 / 57	784 / 94	274 / 32	$\hat{X}_{OEc} = 14{,}1$ mm
	0,291	362 / 104	469 / 136	524 / 151	495 / 143	290 / 84	122 / 35	291 / 84	57 / 16	
10	0,518	113 / 57	324 / 165	304 / 155	381 / 194	90 / 45	33 / 16	174 / 88	34 / 17	
11	0,810	102 / 82	236 / 191	213 / 172	315 / 255	41 / 33	35 / 12	68 / 55	12 / 9	
12	1,04	40 / 41	438 / 455	775 / 806	432 / 449	43 / 44	23 / 23	154 / 160	26 / 27	
13	1,04	40 / 41	438 / 455	775 / 806	432 / 449	43 / 44	23 / 23	154 / 160	26 / 27	
Σn_j^i		8560	7 934	7 970	7 967	8 499	8 926	7 798	9 055	
$\Sigma n_j^i U_j^2$		941	2 145	2 862	2 264	707	423	1 063	318	
$K\left[\frac{mm}{V}\right]$		3,27	3,27	3,27	3,27	3,27	3,27	1,09	1,09	
f_k		0,13	0,35	0,65	0,9	1	1	1	1	
$\Delta\tilde{x}_1^2$ [mm²]		63	22,69	8,85	3,69	0,88	0,50	0,16	0,04	
$\Delta\hat{x}_{OEc}$ [mm]		11,24	6,73	4,2	2,71	1,33	1,00	0,56	0,28	

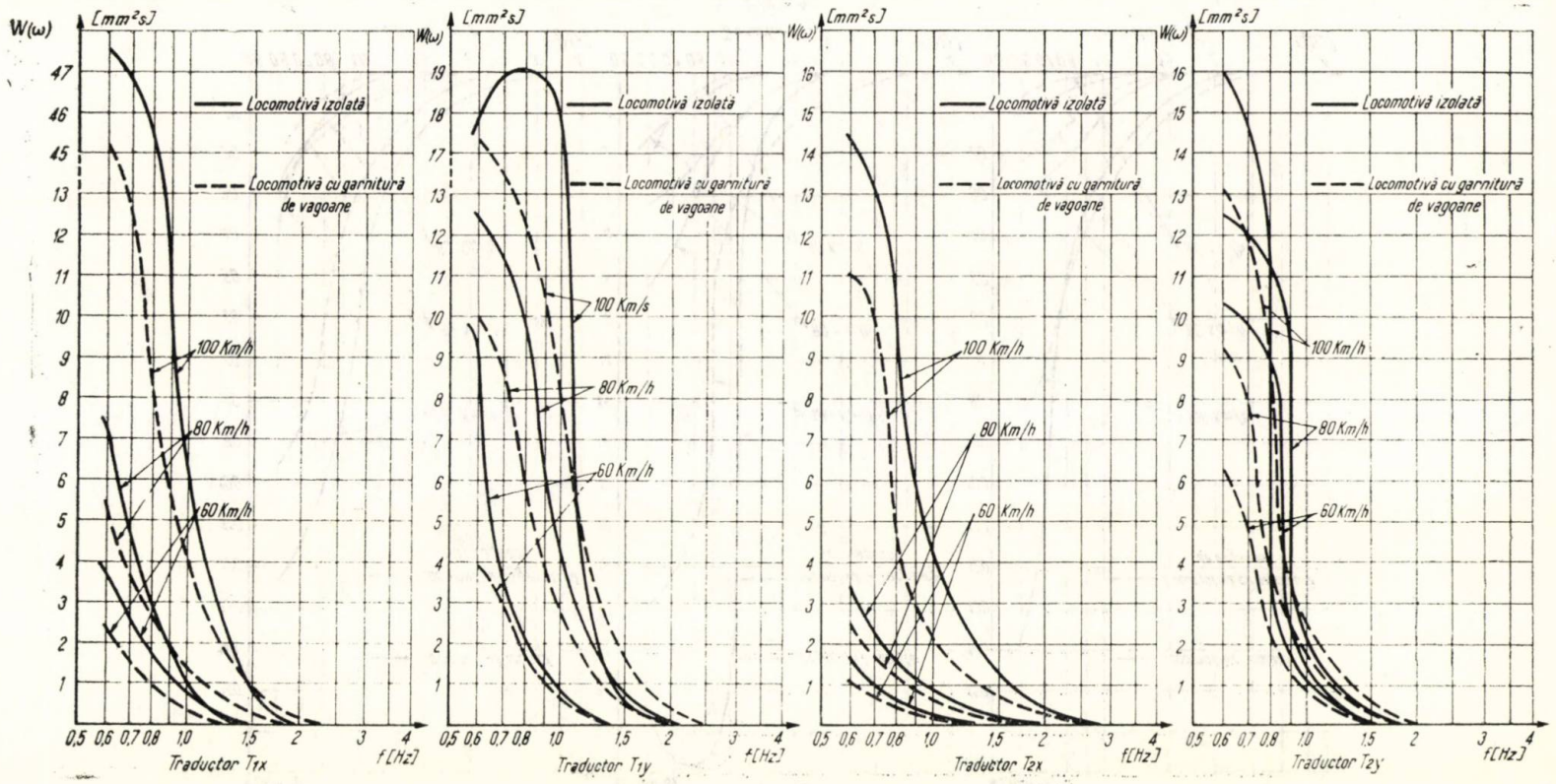

W(ω) [mm²s]
Locomotivă izolată
Locomotivă cu garnitură de vagoane
100 Km/h
80 Km/h
60 Km/h
Traductor T1x
f [Hz]
W(ω) [mm²s]
Locomotivă izolată
Locomotivă cu garnitură de vagoane
100 Km/s
80 Km/h
60 Km/h
Traductor T1y
f [Hz]
W(ω) [mm²s]
Locomotivă izolată
Locomotivă cu garnitură de vagoane
100 Km/h
80 Km/h
60 Km/h
Traductor T2x
f [Hz]
W(ω) [mm²s]
Locomotivă izolată
Locomotivă cu garnitură de vagoane
100 Km/h
80 Km/h
60 Km/h
Traductor T2y
f [Hz]

Fig. 3

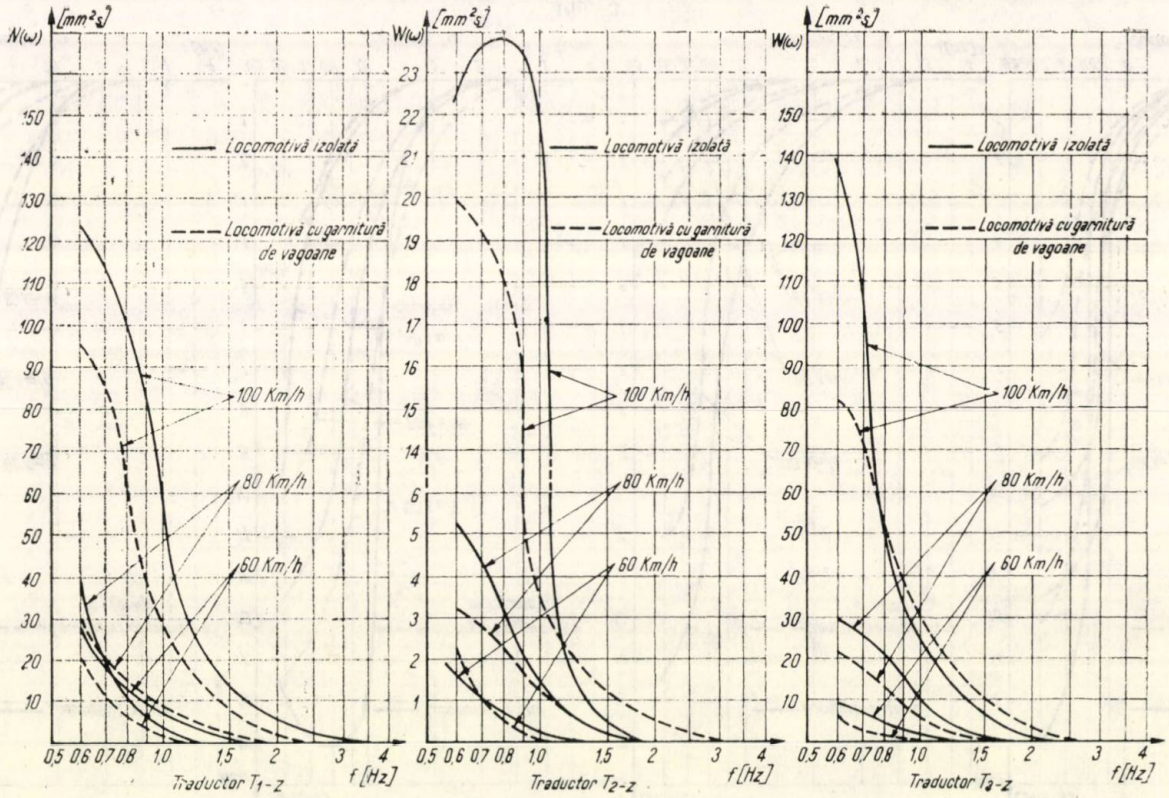

W(ω) [mm²s³]
Locomotivă izolată
Locomotivă cu garnitură de vagoane
100 Km/h
80 Km/h
60 Km/h
Traductor T1-z
Traductor T2-z
Traductor T3-z
f [Hz]

Fig. 4

Din analiza rezultatelor obținute se pot trage următoarele concluzii :

1) Din figurile 3 și 4 rezultă că structura vibrează în banda de frecvențe (0,5—2) Hz, care se suprapune peste banda frecvențelor proprii obținute teoretic în lucrarea [2].

Acest lucru confirmă faptul că structura este autoexcitată prin intermediul vitezei de înaintare.

2) Din analiza tabelului 2 rezultă că, cele două mărimi caracteristice $\tilde{x}_0^2$ și $\hat{x}_{OEc}$ determinate teoretic și experimental sînt foarte apropiate, ceea ce înseamnă că modelul mecanic ales și ecuațiile diferențiale stabilite în lucrarea [1] descriu corect vibrațiile laterale ale locomotivei.

Acest lucru permite utilizarea lor pentru studiul comportării dinamice a locomotivei cînd circulă izolată la viteze mai mari de circulație.

3) Nivelele de vibrații ale structurii cresc odată cu creșterea vitezei de înaintare a locomotivei. Partea din spate a locomotivei și boghiul din spate prezintă nivelele mai mari de vibrații decît boghiul din față și partea din față a cutiei. Acest lucru este confirmat și de rezultatele teoretice din lucrarea [3].

4) Din figurile 3 și 4 rezultă, de asemenea, că nivelele de vibrații ale locomotivei sînt mai mici atunci cînd ea circulă remorcînd o garnitură, față de cazul cînd circulă izolată.

5) Rezultatele obținute teoretic și experimental pot servi la aprecierea confortului acestei locomotive, în cele două situații de mers, iar metoda experimentală de studiu al vibrațiilor, poate fi aplicată la orice tip de vehicul de cale ferată.

Primită la redacție la 9 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. T. Gligor, *Stabilirea ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor laterale ale locomotivei 060 D.A. de 2 100 C.P.*, Revista C.F.R., *8*, (1971).
2. — *Studiul vibrațiilor laterale ale locomotivei diesel-electrice 060 D.A. de 2 100 C.P.*, Teză de doctorat, Timișoara, 1974.
3. — *Integrarea ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor laterale ale locomotivei 060 D.A. de 2 100 C.P. cu ajutorul mașinilor electronice de calcul*, Lucrările Conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.
4. T. Gligor, C. Ursu, D. Urosu, *Influența unor parametri ai suspensiei elastice asupra vibrațiilor laterale ale locomotivei diesel-electrice 060 D.A. de 2 100 C.P.*, Bul. șt. și tehnic al I.P.T., II (1970).
5. T. Gligor, T. Cioară, *Cercetări experimentale ale vibrațiilor laterale ale locomotivei diesel-electrice 060 D.A. de 2 100 C.P.*, Lucrările Conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.
6. T. Gligor, *Asupra forțelor laterale de interacțiune dintre cale și materialul rulant în aliniament* Lucrările Conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.
7. G. Silas, I. Zăgănescu, T. Gligor, C. Ursu, *Asupra dinamicii orizontale a locomotivei D.A. 060*, Lucrările sesiunii științifice a I.S.C.T. București, 23—25.X.1699.

PARAMETRII FUNCȚIONĂRII ÎN REGIM OSCILANT A UNUI RECIPIENT CILINDRIC VERTICAL, DE MARE PRESIUNE, CU FUNCȚIE DE ACUMULATOR ENERGETIC ÎNTR-O CENTRALĂ HIDROPNEUMATICĂ. II*)

de A. PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se prezintă principalele rezultate obținute în urma efectuării unor studii, cercetări, determinări (măsurări) și analize teoretice-experimentale privind parametrii ce caracterizează ciclurile de presiune corespunzătoare funcționării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcție de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. Lucrarea se finalizează printr-un grafic de lucru, cu ajutorul căruia poate fi precizat, oricînd și în mod acoperitor, numărul ciclurilor de presiune preluate de către recipientul respectiv pentru o anumită durată totală de serviciu.

4. PRELUCRAREA ȘI INTERPRETAREA REZULTATELOR, OBȚINUTE PRIN ÎNREGISTRAREA AUTOMATĂ A CICLURILOR DE PRESIUNE

În vederea evidențierii sugestive a rezultatelor privind valorile mărimilor caracteristice corespunzătoare ciclurilor de presiune din recipientul *3* (fig. 1), s-a procedat la reprezentarea grafică a valorilor statistice respective pentru fiecare interval caracteristic $\Delta\tau$ din cadrul aceleiași serii de înregistrări. Prin interpretarea atentă, calitativă și cantitativă, a dependențelor care au rezultat în acest fel, au fost obținute mai multe serii de date interesante și inedite, care se vor prezenta și comenta în continuare

4.1. MĂRIMILE SINGULARE $p_{max\,max}$ ȘI $p_{min\,min}$ ALE CICLURILOR DE PRESIUNE

În ansamblul celor cinci serii de înregistrări, asupra cărora s-au extins cercetările, în general, valorile singulare $p_{max\,max}$ și $p_{min\,min}$ au variat neuniform, cu un factor de neuniformitate moderat sau mare, în mod nedefinit și — de la caz la caz — prin salturi mici, mari sau (chiar) foarte mari.

*) Partea I este publicată în nr. 3/1976 al acestei reviste.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 2, 1977, P. 263–276

Pe durata — de circa 320,4 h (tab. 1) —a tuturor seriilor de înregistrări efectuate și studiate, valorile *cele mai extreme* $p_{\max\max}$ și $p_{\min\min}$ s-au înscris în următorul domeniu general:

$$p_{\max\max} = 306{,}0 \ldots 345{,}0\ (347{,}2)\ \text{daN/cm}^2 = 312{,}0 \ldots 352\ (354{,}0)\ \text{kgf/cm}^2; \tag{6}$$

$$p_{\min\min} = 212{,}8 \ldots 229{,}5\ \text{daN/cm}^2 = 217{,}0 \ldots 234{,}0\ \text{kgf/cm}^2, \tag{7}$$

în dependență de condițiile funcționării centralei hidropneumatice pentru diferite trepte de valori p_m.

De la o perioadă de funcționare la alta, lățimea L (fig. 9) a benzii de dispersie a valorilor singulare preponderente $p_{\max\max}$ și $p_{\min\min}$ s-a înscris în următorul domeniu general:

$$L_{(\max\max)} = 7{,}845 \ldots 46{,}09\ \text{daN/cm}^2 = 8 \ldots 47\ \text{kgf/cm}^2, \tag{8}$$

$$L_{(\min\min)} = 19{,}61 \ldots 40{,}21\ \text{daN/cm}^2 = 20 \ldots 41\ \text{kgf/cm}^2, \tag{9}$$

în funcție de condițiile (durată, funcționarea sau nefuncționarea compresorului de aer etc.) și parametrii (p_m, debitul de emulsie circulată și recirculată, apăsarea, frecvența și/sau cursa elementului activ al consumatorului energetic etc. ai) regimului de lucru în care și pentru care s-a făcut exploatarea centralei hidropneumatice.

Valorile singulare *preponderente* $p_{\max\max}$ și $p_{\min\min}$ s-au înscris, în general, în următorul domeniu:

$$p_{\max\max} = 274{,}6 \ldots 313{,}8\ \text{daN/cm}^2 = 280 \ldots 320\ \text{kgf/cm}^2, \tag{10}$$

$$p_{\min\min} = 225{,}6 \ldots 274{,}6\ \text{daN/cm}^2 = 230 \ldots 280\ \text{kgf/cm}^2. \tag{11}$$

Pentru toate cele cinci serii de înregistrări, valorile corespunzătoare ale coeficienților de apreciere P_1 și P_2 s-au înscris, *în mod sistematic*, în următorul domeniu:

$$P_1 = 1{,}01 \ldots 1{,}10, \tag{12}$$

$$P_2 = 0{,}85 \ldots 0{,}95, \tag{13}$$

ceea ce înseamnă că valorile singulare:

— $p_{\max\max}$ (au avut o abatere δ_1 în plus față de) au depășit — de asemenea în mod sistematic — valorile corespunzătoare p_m (egală) cu circa 1...10%;

— $p_{\min\min}$ (au avut o abatere δ_2 în minus față de) au coborît — de asemenea în mod sistematic — sub valorile corespunzătoare p_m (egală) cu circa 5...15%.

Valorile cele mai mici $p_{\min\min}$ și valorile cele mai mari $p_{\max\max}$, precizate anterior, *nu apar* și, deci, nu pot fi înregistrate în cuprinsul *aceluiași interval caracteristic*, dacă durata $\Delta\tau$ a intervalului respectiv nu

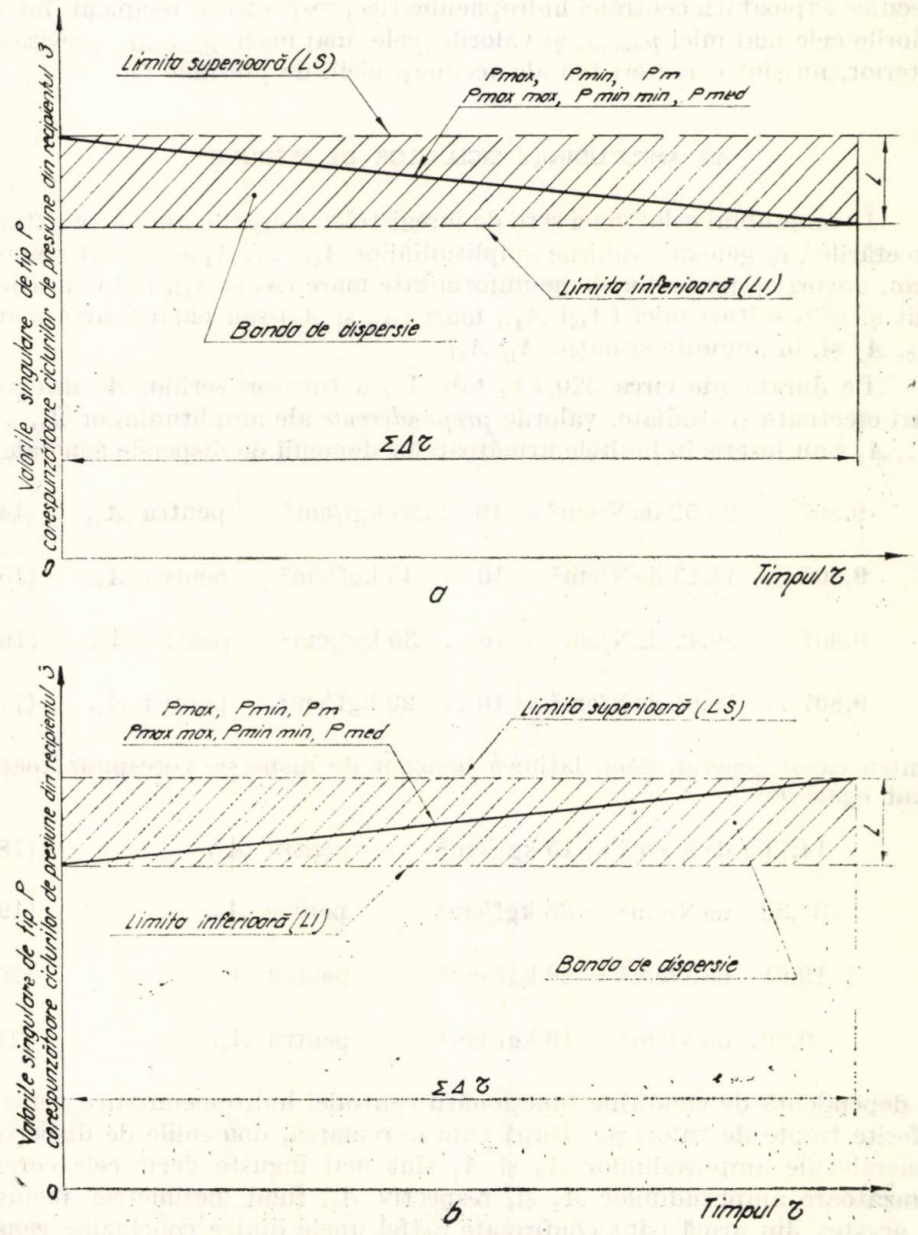


Fig. 9. Banda de dispersie a valorilor singulare preponderente ale mărimilor de tip p corespunzătoare ciclurilor de presiune din recipientul *3*.

a — compresorul de aer nu funcţionează; *b* — compresorul de aer funcţionează.

este corespunzător de mare (de la circa 2h, în situaţii particulare, pînă la circa 20 h, 30 h şi chiar 50 h, în situaţii obişnuite). Aşadar, în condiţiile specifice exploatării centralei hidropneumatice, respectiv a recipientului *3*, valorile cele mai mici $p_{\min\,\min}$ şi valorile cele mai mari $p_{\max\,\max}$, precizate anterior, nu sînt caracteristici ale aceluiaşi ciclu de presiune *).

4.2. AMPLITUDINILE CICLURILOR DE PRESIUNE

În ansamblul celor cinci serii de înregistrări, asupra cărora s-au extins cercetările , în general, valorile amplitudinilor $A_1, \ldots, A_4$ au variat neuniform, uneori cu un factor de neuniformitate mare (A_3 şi A_4), în mod nedefinit şi prin salturi mici (A_1şi A_4), mari (A_2 şi A_3) sau chiar foarte mari (A_2, A_3 şi, în anumite situaţii, A_1, A_4).

Pe durata (de circa 320,4 h, tab. 1) a tuturor seriilor de înregistrări efectuate şi studiate, valorile *preponderente* ale amplitudinilor $A_1, \ldots$ $\ldots, A_4$ s-au înscris în limitele următoarelor domenii de dispersie generale :

$$9{,}807 \ldots 24{,}52 \text{ daN/cm}^2 = 10 \ldots 25 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_1, \tag{14}$$

$$9{,}807 \ldots 44{,}13 \text{ daN/cm}^2 = 10 \ldots 45 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_2, \tag{15}$$

$$9{,}807 \ldots 29{,}42 \text{ daN/cm}^2 = 10 \ldots 30 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_3, \tag{16}$$

$$9{,}807 \ldots 19{,}61 \text{ daN/cm}^2 = 10 \ldots 20 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_4, \tag{17}$$

pentru cazul general, deci, lăţimea benzilor de dispersie corespunzătoare fiind egală cu

$$14{,}71 \text{ daN/cm}^2 = 15 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_1, \tag{18}$$

$$34{,}32 \text{ daN/cm}^2 = 35 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_2, \tag{19}$$

$$19{,}61 \text{ daN/cm}^2 = 20 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_3, \tag{20}$$

$$9{,}807 \text{ daN/cm}^2 = 10 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{pentru } A_4, \tag{21}$$

în dependenţă de condiţiile funcţionării centralei hidropneumatice pentru diferite trepte de valori p_m. După cum se remarcă, domeniile de dispersie generale ale amplitudinilor A_3 şi A_4 sînt mai înguste decît cele corespunzătoare amplitudinilor A_2 şi, respectiv A_1, fiind nesimetric incluse în acestea din urmă (sînt confirmate astfel unele dintre concluziile generale anterioare).

*) Se apreciază că este posibil să nu poată fi caracteristici ale aceluiaşi ciclu de presiune nici pentru cazul general.

Valorile (de regulă *singulare*, nepreponderente) *cele mai mari* (nivel valoric maxim) ale amplitudinilor $A_1, \ldots, A_4$ s-au înscris în următorul domeniu general:

$$A_{1\max} = 27{,}07 \ldots 73{,}55 \text{ daN/cm}^2 = 27{,}6 \ldots 75{,}0 \text{ kgf/cm}^2, \quad (22)$$

$$A_{2\max} = 48{,}25 \ldots 62{,}47 \text{ daN/cm}^2 = 49{,}2 \ldots 63{,}7 \text{ kgf/cm}^2, \quad (23)$$

$$A_{3\max} = 31{,}28 \ldots 62{,}37 \text{ daN/cm}^2 = 31{,}9 \ldots 63{,}6 \text{ kgf/cm}^2 \ (\leqslant A_{2\max}), \quad (24)$$

$$A_{4\max} = 20{,}01 \ldots 31{,}19 \text{ daN/cm}^2 = 20{,}4 \ldots 31{,}8 \text{ kgf/cm}^2 \ (\leqslant A_{1\max}), \quad (25)$$

de asemenea în dependență de condițiile funcționării centralei hidropneumatice pentru diferite trepte de valori p_m. Însă, valorile acestea ($A_{1\max}, \ldots, A_{4\max}$) nu apar și, deci, nu pot fi înregistrate în cuprinsul aceluiași interval caracteristic, dacă durata $\Delta\tau$ a intervalului respectiv nu este corespunzător de mare. Așadar, în condițiile specifice exploatării centralei hidropneumatice (recipientului *3*), valorile cele mai mari $A_{1\max}$ și $A_{2\max}$, respectiv $A_{4\max}$ și $A_{3\max}$, precizate anterior, nu sînt (și este probabil să nu poată fi nici pentru cazul general) caracteristici ale aceluiași ciclu de presiune.

În general, ciclurile de presiune studiate sînt nestaționare, tipul lor schimbîndu-se mereu și în mod nedefinit (în limitele *CP* 1 ... *CP* 6 — tab.3 și 4, fig. 6 și 7) de la un interval caracteristic la următorul sau următoarele

Tabelul 4

Precizarea tipurilor de cicluri de presiune nestaționare pentru diferite cazuri* specifice regimului de funcționare al recipientului *3*

Nr. crt.	Cazul studiat	Corelarea mărimilor: $p_{\max\max}$ și $p'_{\max}$	Corelarea mărimilor: $p_{\min\min}$ și $p'_{\min}$	Tipul ciclurilor de presiune nestaționare (tab.3, fig. 6 și fig. 7)	Observații
1	$A_1 = A_4;\ A_2 > A_3$	$p_{\max\max} = p'_{\max}$	$p_{\min\min} < p'_{\min}$	*CP* 3 sau *CP* 6	
2	$A_1 > A_4;\ A_2 = A_3$	$p_{\max\max} > p'_{\max}$	$p_{\min\min} = p'_{\min}$	*CP* 4 sau *CP* 5	Precizarea corectă a tipului de cicluri de presiune nestaționare se va face în funcție de modul cum se corelează coeficienții corespunzători de neuniformitate *r* și de asimetrie *R*
3	$A_1 = A_4;\ A_2 = A_3$	$p_{\max\max} = p'_{\max}$	$p_{\min\min} = p'_{\min}$	*CP* 2	
4	$A_1 > A_4;\ A_2 > A_3$	$p_{\max\max} > p'_{\max}$	$p_{\min\min} < p'_{\min}$	*CP* 1	
5	$A_1 \approx A_4;\ A_2 > A_3$	$p_{\max\max} \approx p'_{\max}$	$p_{\min\min} < p'_{\min}$	*CP* 1, *CP* 3 sau *CP* 6 (aproximativ)	
6	$A_1 > A_4;\ A_2 \approx A_3$	$p_{\max\max} > p'_{\max}$	$p_{\min\min} \approx p'_{\min}$	*CP* 1, *CP* 4 sau *CP* 6 (aproximativ)	
7	$A_1 \approx A_4;\ A_2 \approx A_3$	$p_{\max\max} \approx p'_{\max}$	$p_{\min\min} \approx p'_{\min}$	*CP* 1 sau *CP* 2 (aproximativ)	

* Semnificația notațiilor folosite rezultă din figurile 6 și 7.

și chiar în cuprinsul aceluiași interval caracteristic (dacă durata $\Delta\tau$ a acestuia este corespunzător de mare), în funcție de condițiile exploatării centralei hidropneumatice (în care este integrat recipientul *3*). În unele cazuri particulare, ciclurile de presiune nestaționare sînt de tipul celor schematizate în figura 8, adică asimetrice cu neuniformități mari.

4.3. COEFICIENȚII DE NEUNIFORMITATE AI CICLURILOR DE PRESIUNE

Pentru evidențierea, compararea și aprecierea calitativă și cantitativă a tipurilor de clicuri de presiune specifice condițiilor de lucru ale recipientului *3*, au fost evaluați prin calcul coeficienții (factorii) de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$. A rezultat astfel incontestabil că, în toate cele cinci serii de înregistrări și în toate intervalele caracteristice $\Delta\tau$ studiate, presiunea din recipientul *3* a variat *ciclic*, ciclurile de presiune corespunzătoare fiind *) de tipul unuia dintre cele indicate în tabelul 5 pentru zece cazuri tipice distincte **) identificate și studiate.

Tabelul 5

Precizarea tipurilor de cicluri de presiune pentru diferite cazuri * specifice regimului de funcționare al recipientului *3*

Nr. crt.	Cazul studiat (tab. 4)	Corelarea coeficienților de neuniformitate r_1, r_2, r_3 și r_4	Tipul ciclurilor de presiune (tab. 3, fig. 6 și fig. 7)	Nr. crt. în tab. 4	Observații
1	$A_1 = A_4;\ A_2 > A_3$	$r_1 = r_4 > r_2 = r_3$	*CP* 3 sau *CP* 6	1	
2	$A_1 > A_4;\ A_2 = A_3$	$r_1 = r_2 > r_3 = r_4$	*CP* 4 sau *CP* 5	2	
3	$A_1 = A_4 > A_2 = A_3$	$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 > 1$	*CP* 2	3	
4	$A_1 = A_4 < A_2 = A_3$	$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 < 1$	*CP* 2	3	La precizarea concretă a tipului ciclurilor de presiune nestaționare se vor lua în considerație, de asemenea, valorile coeficienților corespunzători de asimetrie $R_1 \ldots R_5$
5	$A_1 > A_4;\ A_2 > A_3$	$r_1 > r_4 > r_3;\ r_1 > r_2 > r_3$	*CP* 1	4	
6	$A_1 \approx A_4;\ A_2 > A_3$	$r_1 \approx r_4 > r_2 \approx r_3$	*CP* 1, *CP* 3, *CP* 6 (aproximativ)	5	
7	$A_1 > A_4;\ A_2 \approx A_3$	$r_1 \approx r_2 > r_3 \approx r_4$	*CP* 1, *CP* 4, *CP* 5 (aproximativ)	6	
8	$A_1 \approx A_4 > A_2 \approx A_3$	$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r_4 > 1$	*CP* 1, *CP* 2 (aproximativ)	7	
9	$A_1 \approx A_4 < A_2 \approx A_3$	$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r_4 < 1$	*CP* 1, *CP* 2 (aproximativ)	7	
10	$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$	$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r = 1$	*COP* (tab. 2 și fig. 3 *c*)	—	

* Semnificația notațiilor folosite rezultă din figurile 6 și 7.

Trebuie remarcat, însă, că ciclurile de presiune nestaționare (de tipul *CP* 1 ... *CP* 6 — fig. 6 și 7) sînt preponderente în raport cu cele staționare, succesiunea lor (nestaționar de un tip — nestaționar de ace-

*) De la caz la caz, în funcție de condițiile în care s-a făcut exploatarea centralei hidropneumatice.

**) Distincția s-a făcut după modul cum se corelează coeficienții (factorii) de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$.

laşi tip; nestaţionar de un tip — nestaţionar de alt tip; nestaţionar — staţionar etc.) realizîndu-se în mod nedefinit şi fiind, deci, neperiodică, arbitrară. De aici rezultă inechivoc că, pentru o perioadă de funcţionare suficient de îndelungată a recipientului *3*, în ansamblul lor, ciclurile de presiune sînt *nestaţionare cu variaţie în mod nedefinit*. Schematizarea acestora în coordonate $p-N$ (fig. 5 *c* şi *d*) în alternativa luării în consideraţie numai a valorilor $p_{\max\max}$ şi $p_{\min\min}$ corespunzătoare intervalelor caracteristice $\Delta\tau$ demonstrează, totuşi, că ciclurile de presiune respective pot fi considerate — sub rezerva preciziei calculului statistic de prognoză — ca fiind *nestaţionare cu variaţie neperiodică şi discontinuă*.

Trebuie remarcat de asemenea că, în intervalele caracteristice $\Delta\tau$ pentru care $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r = 1{,}0$, ciclurile de presiune sînt *staţionare* (faţă de p_m) *simetrice* (*COP* în tab. 2 şi fig. 3 *c*), iar în intervalele caracteristice $\Delta\tau$ pentru care factorii de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$ au valori (convenţional) pozitive, ciclurile de presiune sînt *nestaţionare sensibil asimetrice* (faţă de p_m) *vu neuniformităţi mari*, de tipul celor schematizate în figura 8.

Pentru seriile de înregistrări studiate (tab. 1), valorile (convenţional) negative ale factorilor de neuniformitate r s-au înscris în următoarele domenii (tab. 6):

$$r_1 = 0{,}330 \ldots 5{,}050\,;\ r_2 = 0{,}194 \ldots 3{,}050, \qquad (26\,;\,27)$$

$$r_3 = 0{,}016 \ldots 1{,}091\,;\ r_4 = 0{,}053 \ldots 1{,}574, \qquad (28\,;\,29)$$

Tabelul 6

Valorile coeficienţilor de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$, corespunzătoare ciclurilor de presiune din recipientul *3* (fig. 1)

Seria de înregistrări	Valorile*) coeficienţilor de neuniformitate							
	$r_1 < 0$	$r_2 < 0$	$r_3 < 0$	$r_4 < 0$	$r_1 > 0$	$r_2 > 0$	$r_3 > 0$	$r_4 > 0$
I	0,471... ...2,800	0,403... ...1,534	0,016... ...1,000	0,053... ...1,510	—	—	0,091... ...0,424	0,234... ...0,574
II	0,342... ...3,050	0,333... ...3,050	0,122... ...1,091	0,231... ...1,352	—	—	0,156... ...1,000	0,361... ...2,000
III	0,330... ...1,809	0,194... ...1,211	0,042... ...0,048	0,064... ...1,315	—	—	0,041... ...0,333	0,110... ...0,730
IV	0,354... ...1,920	0,354... ...1,720	0,354... ...1,050	0,354... ...1,399	2,650 3,480	—	—	1,530 1,951
V	1,889... ...5,050	0,661... ...1,982	0,112... ...0,996	0,262... ...1,574	—	—	—	—

*) Valori convenţional negative (<0) sau convenţional pozitive (>0).

Observaţii — 1. Nu s-au luat în consideraţie valorile $r_1, \ldots, r_4$ corespunzătoare intervalelor caracteristice $\Delta\tau$ prezentînd variaţie (liniar) monotonă a presiunii (statice) din recipientul 3 sau anomalii şi accidente de înregistrare.

2. Valorile extreme indicate pentru coeficienţii de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$ sînt *valori singulare*, corespunzătoare unor situaţii izolate, particulare. În general, *valorile sistematice* ale coeficienţilor de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$ se înscriu în limitele unor domenii de dispersie (valorică) mai restrînse decît cele indicate în tabelul de faţă.

iar valorile (convenţional) pozitive ale aceloraşi factori s-au înscris în următoarele domenii (tab. 6):

$$r_1 = 2{,}650 \text{ şi } 3{,}480\,;\ r_2 = 0{,}000, \qquad (30\,;\ 31)$$

$$r_3 = 0{,}041 \ldots 1{,}000\,;\ r_4 = 0{,}110 \ldots 2{,}000, \qquad (32\,;\ 33)$$

extremele domeniilor indicate fiind valori singulare, corespunzătoare unor situaţii izolate, particulare. De remarcat, însă, că valorile sistematice ale factorilor de neuniformitate $r_1, \ldots, r_4$ se înscriu, în general, în limitele unor domenii de dispersie mai restrînse decît cele precizate anterior (tab. 6).

★

Rezultă următoarele corelaţii între amplitudinile $A_1, \ldots, A_4$, care, în general, nu sînt caracteristici ale aceluiaşi ciclu de presiune *), dar sînt caracteristici (A_1 cu A_3 şi A_2 cu A_4 — fig. 6) ale anumitor cicluri de presiune ce se succed în mod nedefinit în cuprinsul unui interval $\Delta\tau$ dat:

1. de la caz la caz, amplitudinea A_1 este mai mare (de pînă la circa 5 ori) sau mai mică (de pînă la circa 3 ori) decît amplitudinea A_3, ceea ce dovedeşte incontestabil că ciclurile de presiune corespunzătoare sînt *inegal asimetrice* (faţă de p_m); evident, pentru $r_1 = -1{,}00$ (caz particular), rezultă $A_1 = A_3$, ceea ce înseamnă că ciclurile de presiune respective sînt, de asemenea, inegal, în funcţie de valorile amplitudinilor A_1, simetrice faţă de valoarea p_m; pentru ciclurile de presiune cu $A_3 > 0$, amplitudinea A_1 continuă — cum era şi firesc — să rămînă mai mare (de circa 2,5 ... 3,5 ori) decît amplitudinea A_3;

2. de la un interval caracteristic $\Delta\tau$ la următorul sau următoarele, amplitudinea A_1 este în destul de multe situaţii mai mare (de pînă la circa 3 ori) şi în cele mai multe situaţii mai mică (de pînă la 5 ori) decît amplitudinea A_2, aceasta dovedind fără echivoc că ciclurile de presiune corespunzătoare sînt *nestaţionare*; evident, pentru $r_2 = -1{,}00$ (caz particular), rezultă $A_1 = A_2$, fără ca aceasta să însemne că ciclurile de presiune din intervalul dat sînt staţionare; de remarcat că r_2 nu poate avea valori (convenţional) pozitive decît numai dacă se schimbă semnificaţia mărimilor $p_{\max\max}$ şi $p_{\min\min}$;

3. amplitudinea A_2 este în marea majoritate a situaţiilor mai mare (de pînă la circa 62 de ori) şi numai în unele situaţii izolate mai mică (de numai pînă la circa 1,1 ori) decît amplitudinea A_4, ceea ce dovedeşte fără tăgadă că ciclurile de presiune corespunzătoare sînt inegal (faţă de p_m) *asimetrice*; evident, pentru $r_3 = -1{,}00$ (caz particular), rezultă $A_2 = A_4$, ceea ce înseamnă că ciclurile de presiune respective sînt — de asemenea inegal, în funcţie de valorile amplitudinilor A_2 — asimetrice faţă de valoarea p_m; pentru ciclurile de presiune cu $A_4 < 0$, amplitudinea A_2 continuă — cum era şi normal — să rămînă mai mare (de circa 1 ... 24 de ori) decît amplitudinea A_4;

*) Amplitudinile $A_1, \ldots, A_4$ (fig. 6) pot fi caracteristici ale aceluiaşi ciclu de presiune într-o serie de cazuri particulare, pentru care, evident, $A_1 = A_4$ şi $A_2 = A_3$.

4. de la un interval $\Delta\tau$ la următorul sau următoarele, amplitudinea A_4 este în destul de multe situaţii puţin mai mare (de pînă la circa 1,6 ori) şi în cele mai multe situaţii mult mai mică (de pînă la circa 19 ori) decît amplitudinea A_3, aceasta dovedind din nou fără echivoc că ciclurile de presiune corespunzătoare sînt *nestaţionare*; evident, pentru $r_4 = -1{,}00$ (caz particular), rezultă $A_3 = A_4$, fără ca aceasta să însemne că ciclurile de presiune din intervalul $\Delta\tau$ dat sînt staţionare; de remarcat că r_4 poate avea valori (convenţional) pozitive pentru cazurile real posibile $A_3 > 0$ sau $A_4 < 0$.

4.4. COEFICIENŢII DE ASIMETRIE AI CICLURILOR DE PRESIUNE

Valorile, toate pozitive, ale coeficienţilor de asimetrie $R_1, \ldots, R_4$, evaluate prin calcul, s-au înscris în următoarele domenii (tab. 7):

$$R_1 = 0{,}713 \ldots 0{,}964, \quad R_2 = 0{,}644 \ldots 0{,}918, \tag{34;35}$$

$$R_3 = 0{,}713 \ldots 1{,}000, \quad R_4 = 0{,}713 \ldots 1{,}020, \tag{36;37}$$

Tabelul 7

Valorile coeficienţilor de asimetrie $R_1, \ldots, R_5$ corespunzătoare ciclurilor de presiune din recipientul *3* (fig. 1)

Seria de înregistrări	Valorile coeficienţilor de asimetrie				
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
I	0,713...0,926	0,713...0,918	0,713...0,965	0,713...0,974	0,889...0,923
II	0,723...0,925	0,723...0,913	0,752...1,000	0,752...1,020	0,875...0,944
III	0,731...0,917	0,731...0,917	0,731...0,958	0,731...0,978	0,819...0,920
IV	0,760...0,964	0,760...0,915	0,760...0,915	0,760...0,988	0,899...0,916
V	0,738...0,890	0,644...0,789	0,749...0,847	0,838...0,945	0,902...0,909

Observaţii. 1. Nu s-au luat în consideraţie valorile $R_1, \ldots, R_5$ corespunzătoare intervalelor caracteristice $\Delta\tau$ prezentînd variaţie (liniar) monotonă a presiunii (statice) din recipientul *3* sau anomalii şi accidente de înregistrare.

2. Valorile extreme indicate pentru coeficienţii de asimetrie $R_1, \ldots, R_5$ sînt *valori singulare*, corespunzătoare unor situaţii izolate, particulare. În general, *valorile sistematice* ale coeficienţilor de asimetrie $R_1, \ldots, R_4$ se înscriu în limitele unor domenii de dispersie (valorică) mai restrînse decît cele indicate în tabelul de faţă.

extremele domeniilor indicate fiind valori singulare, corespunzătoare unor situaţii izolate, particulare. De remarcat, însă, că valorile sistematice ale coeficienţilor $R_1, \ldots, R_4$ se înscriu, în general, în limitele unor domenii de dispersie mai restrînse decît cele precizate anterior (tab. 7). Rezultă, aşadar, că

$$0 < R_1 < +1; \quad 0 < R_2 < +1; \quad 0 < R_3 \leqslant +1, \tag{38}$$

ceea ce înseamnă că ciclurile de presiune studiate sînt *cicluri oscilante pozitive* (COP în tab. 2) *nestaţionare şi* (faţă de p_m) *asimetrice*.

În funcție de modul cum se corelează coeficienții de asimetrie $R_1, \ldots, R_5$, ciclurile de presiune studiate sînt de diferite tipuri (*CP* 1 ... *CP* 6 în tab. 3 și fig. 6, respectiv 7), confirmîndu-se concludent preponderența categorică a ciclurilor de presiune *nestaționare* de tip *CP* 1 (mai ales), *CP* 2 și *CP* 3, față de cele de tip *CP* 4 ... *CP* 6, indiferent de durata $\Delta\tau$ a intervalelor caracteristice. Dacă durata $\Delta\tau$ se va extinde pînă la identificarea cu durata înregistrării efective a ciclurilor de presiune (tab. 1) pentru fiecare dintre seriile (I, ..., V) de înregistrări realizate, evident, atunci ciclurile de presiune nestaționare vor fi (în ansamblu) numai de tip *CP* 1. Se regăsește astfel o concluzie anterioară conform căreia, pentru durate de funcționare neîntreruptă a recipientului *3* suficient de îndelungate, în ansamblu, ciclurile de presiune sînt *nestaționare cu variație în mod nedefinit*, însă ele pot fi considerate — sub rezerva preciziei calculului statistic de prognoză — ca fiind *nestaționare cu variație discontinuă neperiodică*.

Dată fiind modalitatea de definire a coeficienților (factorilor) de asimetrie $R_1, \ldots, R_4$, se înțelege că numai R_1 și R_3 sînt — fiecare în parte — caracteristici ale (dar, în general, nu ale acelorași) anumitor cicluri de presiune ce se succed în mod nedefinit în cuprinsul unui interval $\Delta\tau$ dat. Factorii R_2 și R_4 sînt numiți în mod convențional coeficienți de asimetrie și nu sînt (nici nu pot fi) caracteristici ale acelorași cicluri de presiune pentru cazul general (fig. 6), ei avînd doar o semnificație informativ-orientativă *) pentru un anumit interval $\Delta\tau$.

În cazurile ciclurilor de presiune *oscilante pozitive* (*COP* în tab. 2 și fig. 3, *c*) sau ale unor intervale $\Delta\tau$ suficient de *înguste*, pentru care $p_{\max\max} = p'_{\max} = p_{\max}$ și $p_{\min\min} = p'_{\min} = p_{\min}$, rezultă în mod evident:

$$0 < R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R < +1, \tag{39}$$

factorii R_2 și R_4 — coeficienți de asimetrie în astfel de cazuri (particulare) — devenind caracteristici (cu valori semnificative) ale ciclurilor de presiune corespunzătoare. În sensul strict al definirii riguroase, factorii R_2 și R_4 sînt, de asemenea, coeficienți de asimetrie în cazurile (particulare ale) tipurilor (*CP* 2, ..., *CP* 6) de cicluri de presiune nestaționare studiate și prezentate în tabelul 3.

În limitele preciziei calculului statistic banal, rezultă

$$p_{\min\min} = R_2 p_{\max\max} = (0{,}644 \ldots 0{,}918)\ p_{\max\max}, \tag{40}$$

$$p'_{\min} = R_1 p_{\max\max} = (0{,}713 \ldots 0{,}964)\ p_{\max\max}, \tag{41}$$

$$p'_{\max} = R_3^{-1} p_{\min\min} = (1{,}000 \ldots 1{,}403)\ p_{\min\min} \leqslant p_{\max\max} \tag{42}$$

$$p'_{\max} = R_4^{-1} p'_{\min} = (0{,}980 \ldots 1{,}403)\ p'_{\min} \leqslant p_{\max\max}, \tag{43}$$

*) În cazul general, pentru un anumit ciclu de presiune, valorile factorilor R_2 și R_4, care pot fi supraunitare ($> +1$), sînt nesemnificative.

putîndu-se verifica fără dificultate concordanța bună a acestor din urmă rezultate cu cele precizate anterior (egalitățile 6, 7, 10, 11 etc.).

Rezultă deci

$$\Delta p_{max} = p_{max\,max} - p_{min\,min} = A_1 + A_2 =$$

$$= (1 - R_2)\ p_{max\,max} = (0{,}082 \ldots 0{,}356)\ p_{max\,max}, \tag{44}$$

$$\Delta p'_{max} = p_{max\,max} - p'_{min} = (1 - R_1)\ p_{max\,max} =$$

$$= (0{,}036 \ldots 0{,}287)\ p_{max\,max} \leqslant \Delta p_{max}, \tag{45}$$

$$\Delta p''_{max} = p'_{max} - p_{min\,min} \leqslant \Delta p_{max}, \tag{46}$$

ceea ce înseamnă că, pe parcursul unui același anumit ciclu, presiunea din recipientul *3 scade* — în funcție de modul cum se face exploatarea centralei hidropneumatice — cu circa *) 3 ...30% (formula 45), teoretic această scădere putînd ajunge pînă la circa *) 8 ...40% (formula 44).

4.5. MĂRIMILE SISTEMATICE p_{max} ȘI p_{min} ALE CICLURILOR DE PRESIUNE. COEFICIENTUL DE ASIMETRIE R_5

În ansamblul celor cinci serii de înregistrări asupra cărora s-au extins cercetările, în general, valorile sistematice p_{max} și p_{min} au variat aproape *uniform*, în mod *nedefinit* și prin *salturi* mici sau neînsemnat de mici (uneori cvasiuniform sau uniform).

Pe durata (de circa 320,4 h — tab. 1 — a) tuturor seriilor de înregistrări efectuate și studiate, valorile *cele mai mari* p_{max} și cele mai mici p_{min} s-au înscris în următoarele domenii generale :

$$p_{max} = 291{,}8 \ldots 317{,}7\ \text{daN/cm}^2 = 297{,}6 \ldots 324{,}0\ \text{kgf/cm}^2, \tag{47}$$

$$p_{min} = 234{,}2 \ldots 259{,}9\ \text{daN/cm}^2 = 238{,}8 \ldots 265{,}0\ \text{kgf/cm}^2, \tag{48}$$

în dependență de condițiile funcționării centralei hidropneumatice pentru diferite trepte de valori p_m.

De la o perioadă de funcționare la alta, lățimea L (fig. 9) a benzii de dispersie a valorilor sistematice p_{max} și p_{min} s-a înscris în următoarele domenii generale *) :

$$L_{(max)} = 6{,}865 \ldots 19{,}61\ \text{daN/cm}^2 = 7 \ldots 20\ \text{kgf/cm}^2, \tag{49}$$

$$L_{(min)} = 2{,}942 \ldots 14{,}71\ \text{daN/cm}^2 = 3 \ldots 15\ \text{kgf/cm}^2, \tag{50}$$

*) În acest caz, lățimea L a benzilor de dispersie este cu mult mai mică (și mai coborîtă valoric) decît cea corespunzătoare benzii de dispersie a valorilor singulare preponderente $p_{max\,max}$ (formula 8) și, respectiv, $p_{min\,min}$ (formula 9).

în funcție de condițiile și parametrii regimului de lucru în care și pentru care s-a făcut exploatarea centralei hidropneumatice.

În cazul *general*, limitele *LS* și *LI* ale benzilor de dispersie (fig. 9) sînt :

— ceva mai coborîte sau sensibil mai coborîte pentru valorile sistematice p_{max}, față de valorile singulare $p_{max\,max}$;

— mai ridicate sau mult mai ridicate pentru valorile sistematice p_{min}, față de valorile singulare $p_{min\,min}$.

În unele cazuri *particulare*, nesemnificative, însă, limitele respective sînt aceleași pentru valorile extreme sistematice (p_{max} și p_{min}) și pentru cele singulare preponderente ($p_{max\,max}$ și $p_{min\,min}$), în destul de rare situații *) (cărora le corespund anumite durate $\Delta\tau$, determinate), rezultînd

$$p_{max} = p_{max\,max} \text{ sau } p_{max} \approx p_{max\,max}, \tag{51}$$

$$p_{min} = p_{min\,min} \text{ sau } p_{min} \approx p_{min\,min}. \tag{52}$$

Valorile *sistematice* p_{max} și p_{min} s-au înscris, în general, în următoarele domenii :

$$p_{max} = 267{,}7 \ldots 304{,}0 \text{ daN/cm}^2 = 273{,}0 \ldots 310{,}0 \text{ kgf/cm}^2, \tag{53}$$

$$p_{min} = 243{,}2 \ldots 274{,}6 \text{ daN/cm}^2 = 248{,}0 \ldots 280{,}0 \text{ kgf/cm}^2. \tag{54}$$

De remarcat că valorile cele mai mici p_{min} și valorile cele mai mari p_{max}, precizate anterior, nu sînt caracteristici ale unui și mereu ale aceluiași ciclu de presiune și, deci, nu pot fi înregistrate, căutate, presupuse, admise etc. ca atare.

Pentru toate cele cinci serii de înregistrări, valorile coeficienților de apreciere corespunzători s-au înscris, ***în mod sistematic***, în următoarele domenii :

$$P_3 = 1{,}030 \ldots 1{,}054\,; \quad P_4 = 0{,}94 \ldots 0{,}96, \tag{55;56}$$

ceea ce înseamnă că :

— valorile p_{max} (au avut o abatere δ_3 în plus față de) au depășit — de asemenea în mod sistematic — valorile corespunzătoare p_m (egală) cu circa 3,0 ... 5,4% ;

— valorile p_{min} (au avut o abatere δ_4 în minus față de) au coborît — de asemenea în mod sistematic — sub valorile corespunzătoare p_m (egală) cu circa 4,0 ... 6,0%.

*) V. ciclurile de presiune nestaționare de tip CP 6 și CP 5 (fig. 7, e și d).

★

Observații. Valorile *particulare extreme* ale factorilor de apreciere P au fost următoarele:

— $P_{1\,max} = 1{,}279$, pentru care abaterea (cea mai mare) în plus (față de $p_m = 266{,}5$ daN/cm² = 271,8 kgf/cm², căruia îi corespunde $A_1 = 73{,}55$ daN/cm² = 75,0 kgf/cm²) a fost $\delta_{1\,max} = 27{,}9\,\%$;

— $P_{2\,max} = 0{,}977$, pentru care abaterea (cea mai mică) în minus (față de $p_m = 271{,}8$ daN/cm² = 277,2 kgf/cm², căruia îi corespunde $A_2 = 25{,}89$ daN/cm² = 26,4 kgf/cm²) a fost $\delta_{2\,min} = 2{,}3\,\%$;

— $P_{2min} = 0{,}774$, pentru care abaterea (cea mai mare) în minus (față de $p_m = 275{,}4$ daN/cm² = 280,8 kgf/cm², căruia îi corespunde $A_2 = 62{,}37$ daN/cm² = 63,6 kgf/cm²) a fost $\delta_{2\,max} = 22{,}6\,\%$;

— $P_{3max} = 1{,}069$, pentru care abaterea (cea mai mare) în plus (față de $p_m = 265{,}4$ daN/cm² = 270,6 kgf/cm², căruia îi corespunde $A_1 = 18{,}24$ daN/cm² = 18,6 kgf/cm²) a fost $\delta_{3\,max} = 6{,}9\,\%$;

— $P_{4\,max} = 0{,}968$, pentru care abaterea (cea mai mică) în minus (față de $p_m = 234{,}2$ daN/cm² = 238,8 kgf/cm², căruia îi corespunde $A_2 = 9{,}414$ daN/cm² = 9,6 kgf/cm²) a fost $\delta_{4\,min} = 3{,}2\,\%$;

— $P_{4\,min} = 0{,}896$, pentru care abaterea (cea mai mare) în minus (față de $p_m = 261{,}2$ daN/cm² = 266,4 kgf/cm², căruia îi corespunde $A_2 = 27{,}07$ daN/cm² = 27,6 kgf/cm²) a fost $\delta_{4\,max} = 10{,}4\,\%$.

★

Valorile (toate pozitive ale) coeficientului de asimetrie R_5 s-au înscris în următorul domeniu:

$$R_5 = 0{,}819 \ldots 0{,}944, \tag{57}$$

extremele acestui domeniu fiind valori *singulare*, corespunzătoare unor situații izolate, particulare. De remarcat, deci, că valorile *sistematice* ale factorului R_5 se înscriu, în general, în limitele unui domeniu de dispersie mai restrîns decît cel precizat prin formula (57).

Rezultă, așadar, că (tab. 7)

$$0 < R_5 < +1, \tag{58}$$

ceea ce înseamnă — și de această dată (vezi formulele 38) — că ciclurile de presiune studiate sînt de tip *COP* (tab. 2). După cum rezultă din figura 7, aceste cicluri de presiune sînt — de regulă — cvasistaționare și cvasisimetrice (față de p_m), în succesiunea lor regăsindu-se, de asemenea, destul de multe cicluri de presiune (de tipul în discuție) riguros staționare și simetrice (față de p_m — fig. 3 *c*).

De remarcat că, pe durata funcționării neîntrerupte îndelungate a recipientului *3*, în ansamblu, ponderea ciclurilor de tip *COP* cvasistaționare și „cvasisimetrice" (fig. 3 *c* și fig. 7) a fost *considerabilă*, pentru unele dintre intervalele caracteristice $\Delta\tau$ fiind înregistrate numai astfel de cicluri de presiune (în mod sistematic, $\Delta\tau = 0{,}15 \ldots 0{,}50$ h; în mod singular, dar uneori reprezentativ, $\Delta\tau = 0{,}04 \ldots 2{,}00$ h*).

*) Trebuie reținute, în mod deosebit, numai valorile maxime $\Delta\tau$, deoarece — evident — valorile minime $\Delta\tau$ nu întotdeauna sînt concludente. Cu cît durata unui interval caracteristic este mai mică, cu atît probabilitatea regăsirii prin înregistrare a ciclurilor de presiune numai de același tip (cu aceeași treaptă de amplitudini — fig. 5 *a* și *b*) este mai mare.

În baza formulei (57) și în limitele preciziei calculului statistic banal, rezultă

$$p_{min} = R_5\, p_{max} = (0{,}819 \ldots 0{,}944)\; p_{max}, \tag{59}$$

putîndu-se verifica fără dificultate concordanța bună a acestor din urmă rezultate cu cele prezentate anterior (egalitățile 47, 48 și 53, 54). Așadar

$$\Delta p = p_{max} - p_{min} = (1 - R_5)\; p_{max} = (0{,}056 \ldots 0{,}181)\; p_{max}, \tag{60}$$

ceea ce înseamnă că, pe parcursul unui același anumit ciclu (*COP* cvasistaționar și cvasisimetric față de p_m sau staționar și simetric față de p_m), presiunea din recipientul *3 scade* — de la caz la caz, în funcție de regimul în care și pentru care se face exploatarea centralei hidropneumatice — cu circa *) 5 ... 18%.

Primită la redacție la 13 iulie 1975

*) V. partea a III-a a lucrării.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL DISPOZITIVELOR PENTRU ILUMINAREA CRITICĂ LA MICROSCOAPE

de PETRE DODOC
Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă criteriile care stau la baza alegerii modului de iluminare, se formulează condițiile pe care trebuie să le satisfacă dispozitivele de iluminat ale microscoapelor și apoi se explică în detaliu construcția, funcționarea și calculul dispozitivelor pentru iluminarea critică.

1. TEORIA ȘI CONSTRUCȚIA DISPOZITIVELOR DE ILUMINAT

Dispozitivul de iluminat reprezintă un subansamblu care determină în mod hotărîtor calitatea imaginii. De aceea, construcției și funcționării corecte a acestuia trebuie să i se acorde o importanță deosebită.

Obiectele transparente la radiațiile vizibile sînt iluminate cu fascicule de raze care trec prin obiect de la dispozitivul de iluminat spre obiectivul microscopului. Acest mod de iluminare (cu lumină transmisă) se numește „iluminare diascopică", pe scurt „DIA".

Iluminarea obiectelor opace se face cu fascicule incidente, obiectele jucînd rolul oglinzilor. În acest caz avem de-a face cu modul de „iluminare episcopică" sau „EPI".

Cînd în obiectiv intră lumina transmisă sau reflectată direct de către obiect, cîmpul obiect apare uniform iluminat, iar elementele constitutive ale obiectelor se deosebesc în luminanță.
Se spune în acest caz că cercetarea (observarea) obiectului are loc în „cîmp iluminat".

Dacă în obiectivul microscopului intră numai lumina reflectată difuz de elementele obiectului, în cîmpul vizual apare structura obiectului iluminată pe „fond întunecat"; se spune că iluminarea obiectului se face „în cîmp întunecat".

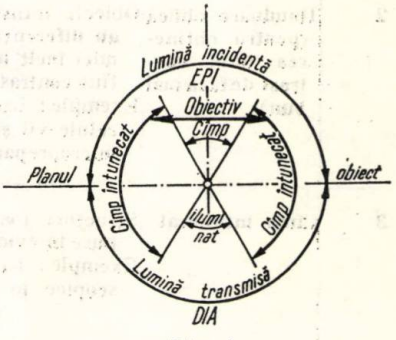


Fig. 1

Ambele moduri de iluminare pot fi folosite atît pentru obiecte transparente, cît și pentru obiecte opace.

Posibilitățile de iluminare a unui obiect supus cercetării microscopice rezultă din figura 1.

1.1. ALEGEREA MODULUI DE ILUMINARE

Alegerea corectă a modului de iluminare a unui obiect microscopic reprezintă o problemă dificilă ce nu poate fi soluționată satisfăcător decît de către aceia care stăpînesc perfect mijloacele și procedeele de cercetare în microscopie. Cîteva indicații se dau în tabela 1.

Tabela 1

Nr. crt.	Procedeul de iluminare / Metoda de cercetare	DIA	EPI
1	a) Cîmp iluminat cu lumină naturală	Toate obiectele transparente care posedă : a) contrast de absorbție datorită culorii proprii sau culorii artificiale ; b) contrast de interferență datorită diferențelor mari în grosimile optice ale elementelor constitutive. Exemple : infuzori, celule de plante, granule tari, cristale de zahăr, de sare și de alte substanțe, fire de lînă, de bumbac și artificiale etc.	Toate eșantioanele cu relief care prezintă structuri cristaline, obținute prin polizare și eventual atacate cu acizi.
	b) Cîmp iluminat cu lumină polarizată liniar	Toate obiectele transparente la care dubla refracție poate fi pusă în evidență cu ajutorul microscopului polarizant. Exemple : granule dure, fibre mușchiulare, fibre de bumbac, cristale, eșantioane de roci.	Eșantioane ale căror elemente constitutive influențează lumina polarizată la reflexie. Exemple : eșantioane de minereuri, eșantioane metalice.
2	Iluminare oblică (pentru obținerea unui contrast de fază mai bun)	Obiecte transparente neabsorbante care au diferențe de grosimi optice atît de mici încît în cîmp iluminat nu se obține contrastul dorit în planul imagine. Exemple : bacterii vii, microorganisme, celule vii și culturi de celule, diferite micropreparate colorate și necolorate.	Eșantioane ale căror suprafețe prezintă foarte mici diferențe de nivel între elementele singulare constitutive. Exemplu : eșantioane metalice foarte fin polisate.
3	Cîmp întunecat	Structuri foarte mici care nu pot fi puse în evidență cu nici o altă metodă. Exemple : bacterii, particole submicroscopice în suspensie	a) Toate obiectele opace cu structuri ale suprafețelor care trebuie să fie reprezentate natural. (Se folosește iluminare unilaterală în cîmp întunecat) b) Toate obiectele opace cu reflexie selectivă cînd trebuie redate culorile (fotografii color). Exemplu : suprafețe colorate de orice fel.

1.2. CONDIȚIILE PE CARE TREBUIE SĂ LE ÎNDEPLINEASCĂ DISPOZITIVELE DE ILUMINAT ALE MICROSCOAPELOR

Dispozitivele de iluminat ale microscoapelor moderne de cercetare trebuie să posede astfel de caracteristici încît ele să satisfacă următoarele condiții generale :

a) să ilumineze cîmpul obiect în mod uniform și suficient de puternic pentru ca în planul imagine să se obțină luminanța dorită ;

b) să ilumineze obiectul cu fascicule telecentrice sub unghiul de apertură $\pm \sigma_0$ pentru a realiza imaginile primare și secundare conform teoriei lui Abbe în scopul obținerii detaliilor în planul imagine ;

c) să delimiteze net (clar) cîmpul obiect pentru ca imaginea să apară net conturată ;

d) să fie astfel construit încît în planul imagine să nu apară imaginea sursei, altfel calitatea imaginii este compromisă ;

e) să permită variația continuă a unghiului de apertură (deschidere), corespunzător aperturii obiectivului și metodei de cercetare folosite ;

f) să facă posibilă variația continuă a mărimii cîmpului obiect în scopul cercetării atente a anumitor zone din acest cîmp ;

g) să fie prevăzut cu diferite mecanisme și dispozitive care să asigure mișcările axiale și transversale ale principalelor elemente și subansambluri constitutive în scopul realizării unor efecte speciale sau al reglării ;

h) sursa de iluminat să aibă dimensiuni minime posibile, strălucire mare și radiații calorice reduse pentru a evita influențarea micropreparatului și tensionarea elementelor constructive ;

i) să aibă dimensiuni de gabarit minime posibile pentru a economisi materialele și deci pentru a reduce prețul de cost.

1.3. CLASIFICAREA DISPOZITIVELOR DE ILUMINAT

Dispozitivele de iluminat pot fi clasificate după mai multe criterii. Astfel :

1.3.1. După natura obiectului de cercetat :

— dispozitive pentru iluminarea obiectelor transparente (iluminarea DIA) ;

— dispozitive pentru iluminarea obiectelor opace (iluminarea EPI) ;

1.3.2. După gradul de complexitate :

— lămpi și proiectoare ;

— dispozitive pentru iluminarea critică (dispozitive bazate pe principiul lui Abbe) ;

— dispozitive pentru iluminarea completă (dispozitive bazate pe principiul lui Köhler).

1.3.3. După metoda de cercetare :

— dispozitive de iluminat în cîmp iluminat ;

— dispozitive de iluminat în cîmp întunecat ;

— dispozitive pentru contrastul de fază;
— dispozitive pentru polarizare;
— dispozitive pentru interferență;
— dispozitive speciale (combinate).

2. CALCULUL DE GABARIT AL DISPOZITIVELOR PENTRU ILUMINAREA CRITICĂ

În capitolul 1 s-au descris principiile care stau la baza construcției și funcționării corecte a dispozitivelor de iluminat folosite la microscoape. În cele ce urmează se dau cîteva indicații cu privire la dimensionarea corectă a dispozitivelor pentru iluminarea critică (dispozitive de tip Abbe).

2.1. GENERALITĂȚI

După stabilirea schemei optice a aparatului se trece la efectuarea calculului de gabarit care are drept scop determinarea parametrilor constructivi ai elementelor constitutive ale aparatului. În general se pornește de la datele impuse prin temă. Pentru dispozitivele de iluminat ale microscoapelor prezintă importanță deosebită caracteristicile obiectivului, acestea fiind elementele de pornire la efectuarea calculului.

În cazul în care nu se impune de la început construcția unui anumit subansamblu (spre exemplu colectorul sau condensorul, calculul se face în etape, considerînd mai întîi subansamblurile — oricît ar fi ele de complexe — ca fiind lentile infinit subțiri (cu planele principale suprapuse), după care, în etapa următoare, se trece la stabilirea caracteristicilor elementelor constitutive ale subansamblului, acestea considerîndu-se tot lentile infinit subțiri situate la distanțe finite una de alta.

2.2. DISPOZITIVE DE ILUMINAT DE TIP ABBE (I)

În figura 2 se indică modul de propagare a luminii prin dispozitivul de tip Abbe și elementele sale constitutive.

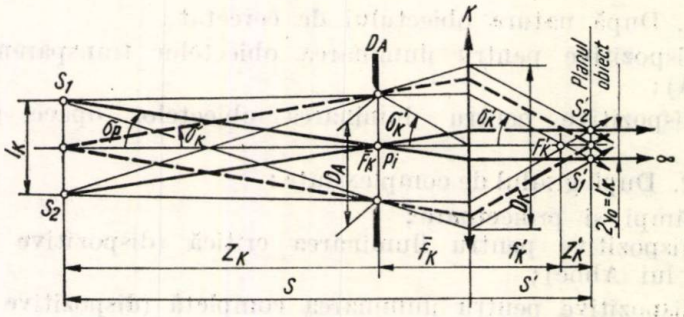


Fig. 2

Se observă că, prin montarea diafragmei de apertură D_A în planul focal obiect al condensorului K, obiectul este iluminat cu fascicule tele-

centrice, dar imaginea sursei $l_k = \overline{S_1 S_2}$ este formată de condensor chiar în planul obiect.

Așa cum s-a menționat, calculul de gabarit presupune mai întîi cunoașterea obiectivului, adică cunoașterea aperturii A_0, măririi transversale β'_0 și distanței focale f'_0. Apoi, se poate scrie :

$$A_0 = n_0 \cdot \sin \sigma_0, \tag{1}$$

și

$$A'_k = n'_k \cdot \sin \sigma'_k. \tag{2}$$

Întrucît $\sigma_0 = \sigma'_k$, $n_0 = n'_k$, rezultă

$$A'_k = A_0. \tag{3}$$

Pentru ca obiectul să fie iluminat uniform trebuie ca imaginea sursei să fie plană. Așadar, este necesar ca propagarea luminii să respecte legea sinusurilor :

$$n_k l_k \sin \sigma_k = l_k A_k = l'_k A'_k = 2y_0 A_0 = 2y' A'_0. \tag{4}$$

Din (4) se obține mărirea transversală a obiectivului

$$\beta'_0 = \frac{2y'_0}{2y_0} = \frac{A_0}{A'_0}, \tag{5}$$

sau apertura imagine a obiectivului

$$A'_0 = \frac{A_0}{\beta'_0}. \tag{6}$$

În tabela 2, care reprezintă legătura dintre mărirea transversală și apertură la un obiectiv fără imersie („uscat"), rezultă valorile maxime și minime ale aperturii :

$$A_{0_{min}} = 0{,}05 \text{ pentru } \beta'_{0_{min}} = 2{,}5 : 1$$

și

$$A_{0_{max}} = 1{,}00 \quad \text{pentru} \quad \beta'_{0_{max}} = 100 : 1.$$

Relația (6) dă imediat valorile extreme ale aperturii A'_0 :

$$A'_0 = \frac{A_{0_{min}}}{\beta'_{0_{min}}} = \frac{0{,}05}{2{,}5} = 0{,}02,$$

$$A'_0 = \frac{A_{0_{max}}}{\beta'_{0_{max}}} = \frac{1{,}00}{100} = 0{,}01.$$

După cum se poate vedea, apertura imagine a unui obiectiv „uscat" nu depășește valoarea de 0,03:

$$A'_{0_{max}} \leqslant 0{,}03. \tag{7}$$

Tabela 2

Mărirea transversală și aperturile obiect și imagine la obiective „uscate"

β'_0	2,5 : 1	4 : 1	6,3 ; 1	10 : 1	16 : 1	25 : 1	48 : 1	63 : 1	100 : 1
A_0	0,05— 0,08	0,10— 0,16	0,16— 0,25	0,20— 0,32	0,28— 0,50	0,45— 0,65	0,45— 0,95	0,85— 0,95	0,95— 1,00
A'_0	0,03								

Pe de altă parte, se cunoaște că diametrele exterioare ale montu-rilor ocularelor au valorile standardizate. De aceea, diametrul maxim al cîmpului imagine nu depășește valorile:

$$2y'_0 = 20 \text{ mm (pentru oculare normale)}$$

și (8)

$$2y'_0 = 28 \text{ mm (pentru oculare cu cîmp mare).}$$

Introducînd aceste valori în relația (4) se obține

$$2y'_0 A'_0 = 20.0{,}03 = 0{,}60 \tag{9}$$

și

$$2y'_0 A'_0 = 28.0{,}03 = 0{,}84.$$

Diametrul cîmpului obiect rezultă imediat din relațiile (5) și (8):

$$2y_{0_{max}} = \frac{2y'_0}{\beta'_{0_{min}}} = \frac{20}{2{,}5} = 8 \text{ mm},$$

pentru $2y'_0 = 20$ mm (10 a)

$$2y_{0_{min}} = \frac{2y'_0}{\beta'_{0_{max}}} = \frac{20}{100} = 0{,}2 \text{ mm},$$

și

$$2y_{0_{max}} = \frac{2y'_0}{\beta'_{0_{min}}} = \frac{28}{2{,}5} = 11{,}2 \text{ mm},$$

pentru $2y'_0 = 28$ mm. (10 b)

$$2y_{0_{max}} = \frac{2y'_0}{\beta'_{0_{min}}} = \frac{28}{100} = 0{,}28 \text{ mm}.$$

Pentru iluminarea obiectului trebuie folosite surse cu străluciri mari. Se știe însă că sursele cu străluciri mari au dimensiuni mici, fapt care conduce la utilizarea unor condensoare cu aperturi mari și deci la sisteme optice scumpe.

Folosirea unor condensoare simple și ieftine necesită limitarea unghiului de deschidere. Se poate admite apertura condensorului

$$A_{k_{max}} \leqslant 0{,}7, \tag{11}$$

fără ca sistemul optic să rezulte prea complicat.

Relațiile (4), (9) și (11) permit determinarea mărimii minime a sursei pentru ambele tipuri de oculare :

$$l_{k_{min}} = \frac{2y'_0 A'_0}{A_{k_{max}}} = \frac{0{,}60}{0{,}7} = 0{,}85 \text{ mm} \quad \text{(pentru oculare cu cîmp normal)}$$

și (12)

$$l_{k_{min}} = \frac{2y' A'}{A_{k_{max}}} = \frac{0{,}84}{0{,}7} = 1{,}2 \text{ mm} \quad \text{(pentru oculare cu cîmp mare).}$$

Pentru aperturi mai mici rezultă surse cu dimensiuni mai mari. Astfel, pentru $A_k = 0{,}1$ se obține $l_k = 6$ mm și, repectiv, $l_k = 8{,}4$ nm.

Se recomandă folosirea surselor care au atît dimensiuni mari cît și străluciri mari.

Cu un singur condensor nu pot fi acoperite toate valorile aperturii. De aceea trebuie să se folosească două condensoare pentru două domenii de aperturi.

Dacă, spre exemplu, se stabilesc domeniile :

1) $\beta'_{0_I} = 2{,}5 : 1 \ldots 10 ; 1$ și $A_{0_I} = 0{,}05 \ldots 0{,}25$

și

2) $\beta'_{0_{II}} = 16 : 1 \ldots 100 : 1$ și $A_{0_{II}} = 0{,}35 \ldots 1{,}00,$

se obține

$$l_k A_k = \frac{2y'_0}{\beta'_{0_{min}}} \cdot A_0 \text{ (pentru } \beta'_{0_{max}}), \tag{13}$$

de unde

$$l_k A_k = \frac{28}{2{,}5} 0{,}25 = 2 ; \qquad l_k A_k = \frac{20}{16} 1 = 1{,}25$$

şi

$$l_k A_k = \frac{28}{2,5} 0,25 = 2,8\,; \quad l_k A_k = \frac{28}{16} 1 = 1,75.$$

Pentru apertura maximă a condensorului $A'_{k_{max}} = 0,7$ rezultă

$$l_k = \frac{2}{0,7} = 2,9 \text{ mm}\,; \quad l_k = \frac{1,25}{0,7} = 1,78 \text{ mm}$$

şi

$$l_k = \frac{2,8}{0,7} = 4 \text{ mm}\,; \quad l_k = \frac{1,75}{0,7} = 2,5 \text{ mm}.$$

Aceste date arată că se poate folosi o sursă cu dimensiunea $l_k = 2,9$ mm pentru ocularele cu cîmp nare.

Admiţînd că imaginea sursei este egală cu obiectul, rezultă că mărirea transversală a condensorului depinde de cîmpul obiect şi de mărimea sursei după cum urmează :

$$\beta'_k = \frac{2y_0}{l_k} = \frac{8}{2,9} \ldots \frac{8}{1,78} = 2,76 \ldots 4,5 \quad \text{pentru} \quad \beta'_0 = 2,5 : 1$$

şi

$$\beta'_k = \frac{2y_0}{l_k} = \frac{0,2}{2,9} \ldots \frac{0,2}{1,78} = 0,07 \ldots 0,0112 \quad \text{pentru} \quad \beta'_0 = 100 : 1.$$

Deci, mărirea transversală pentru condensoarele microscoapelor care funcţionează cu oculare normale este

$$\beta'_k = 0,069 : 1 \ldots 4,5 : 1, \tag{14 a}$$

iar pentru ocularele cu cîmp mare este

$$\beta'_k = 0,0112 : 1 \ldots 4,56 : 1. \tag{14 b}$$

Celelalte elemente constructive se determină cu relaţiile următoare (vezi fig. 2);

$$\beta'_k = \frac{s'}{s} = \frac{\bar{f}_k}{\bar{z}_k} = \frac{z'_k}{f'_k} = \frac{2y_0}{l_k}. \tag{15}$$

Se alege focala condensorului :

$$z_k = \frac{\bar{f}_k}{\beta'_k}, \tag{16}$$

$$z'_k = f'_k \cdot \beta'_k, \tag{17}$$

$$s = s_k + \bar{f}_k, \tag{18}$$

$$s' = z'_k + f'_k, \tag{19}$$

$$D_A = 2f'_k \operatorname{tg} \sigma'_k = 2f'_k \operatorname{tg} \sigma_0, \tag{20}$$

$$D_k = 2s' \operatorname{tg} \sigma_0 + 2y_0 \text{ (pentru condensoare constituite dintr-un sistem simplu)} \tag{21}$$

$$\operatorname{tg} \sigma_p = \frac{y_0}{f_k} = \frac{l_k}{2z_k}. \tag{22}$$

Observații.

1. Imaginea l'_k a sursei l_k dată de condensorul K în planul obiect trebuie să fie ceva mai mare decît mărimea obiectului $2y_0$;

2. Limitarea cîmpului obiect trebuie făcută cu o diafragmă de cîmp montată în planul imaginii reale de după obiectiv, deoarece dispozitivul de iluminat nu posedă o astfel de diafragmă.

3. Condensorul K, constituit din mai multe lentile, va trebui montat în așa fel încît planul principal obiect al acestuia să coincidă cu poziția sistemului rezultant (echivalent) din fig. 3*b*.

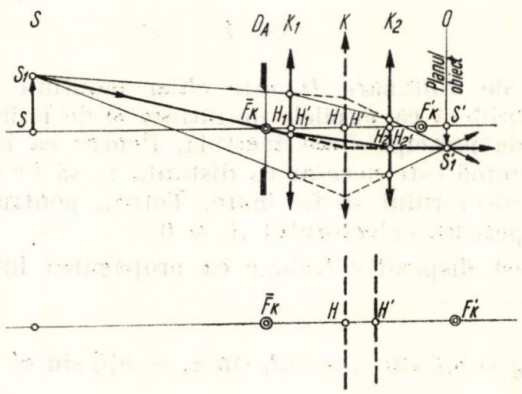


Fig. 3

4. În cazul cînd condensorul K este constituit din mai multe sisteme, spre exemplu K_1 și K_2 (fig. 3*a*), diametrul D_k dat de relația (21) nu prezintă interes practic; trebuie calculate diametrele sistemelor K_1 și K_2 care au valori mai mici decît D_k. Calculul se face fără dificultăți dacă sistemele menționate se consideră infinit subțiri.

2.3. DISPOZITIVUL DE ILUMIMAT DE TIP ABBE (II)

În figura 4 s-a prezentat schematic dispozitivul de iluminat de tip Abbe (II) constituit din sursa $l_c = \overline{S_1 S_2}$, colectorul C, diafragma de apertură D_A și condensorul K. Sursa l_c este situată la distanța z_c în fața planului focal obiect al colectorului C, iar diafragma D_A în planul focal obiect al condensorului.

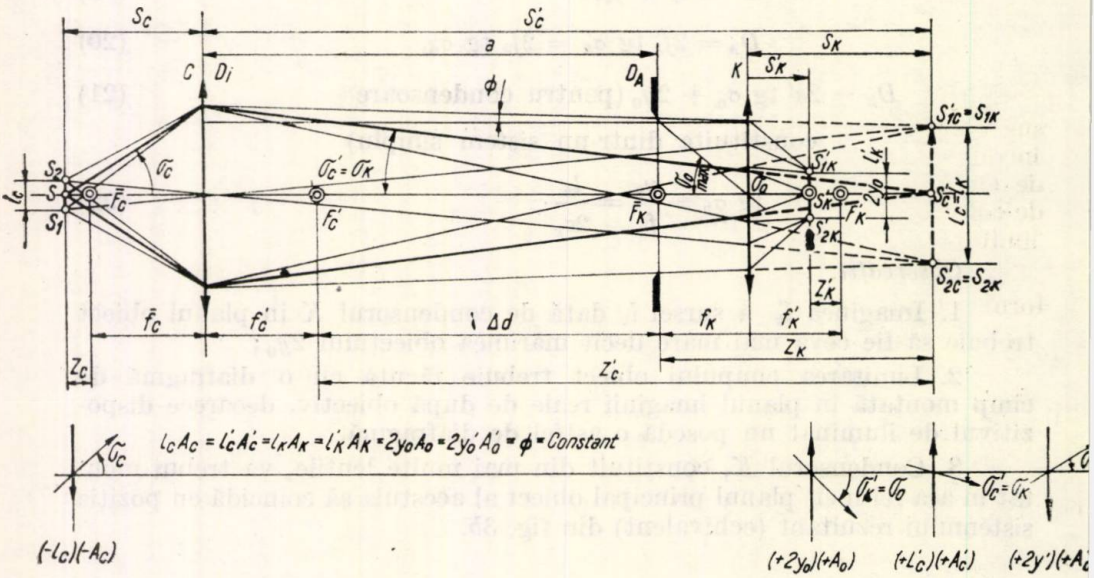


Fig. 4

Diafragma de iluminare D_i este chiar montura colectorului C și deci se poate considera că pupilele de intrare și de ieșire ale colectorului coincid cu planele principale ale acestuia. Pentru ca în aparat să intre cît mai multă lumină este necesar ca distanța z_c să fie mică, iar mărirea transversală a colectorului să fie mare. Totuși, pentru a folosi sisteme optice simple, apertura colectorului $A_c \leqslant 0{,}7$.

Și prin acest dispozitiv trebuie ca propagarea luminii să respecte legea sinusurilor :

$$n_c l_c \sin \sigma_0 = n'_c l'_c \sin \sigma'_c = n_k l_k \sin \sigma_k = n'_k l'_k \sin \sigma'_k =$$

$$= n_0 2y_0 \sin \sigma_0 = n'_0 2y'_0 \sin \sigma'_0 = \Phi = \text{const.}, \qquad (23)$$

sau

$$(-l_c)(-A_c) = (+l'_c)(+A'_c) = (+l_k)(+A_k) = (+l'_k)(+A'_k) =$$

$$= (+2y_0)(+A_0) = (-2y'_0)(-A'_0) = \Phi = \text{const.} \qquad (24)$$

Considerațiile făcute în § 2.2 sînt valabile și în acest caz. Elementele constructive se determină cu relațiile indicate în tabela 3 (vezi și exemplul numeric).

Pentru a realiza un dispozitiv de iluminat de tip Abbe (II) suficient de lung este necesar ca distanța e dintre colector și condensor să fie mare. Ca urmare, trebuie ca parametrii f'_c, β'_c și β'_k să aibă valori mari, iar focala f'_k să fie mică. Aceasta înseamnă că mărirea transversală a dispozitivului β'_d va fi mai mare și deci sursa $l_c < 2y_0$.

Cîmpul obiect este complet iluminat atunci cînd

$$l_c \beta'_d > 2y_0.$$

Unul dintre dezavantajele dispozitivelor de tip Abbe prezentate mai sus este și acela că obiectul nu este limitat net. Pentru înlăturarea acestui inconvenient este necesar ca în planul sursei S să se monteze o diafragmă de cîmp D_c, iar sursa S să fie înlocuită cu imaginea unei surse S_0 dată de colectorul C_0 (fig. 5). În acest fel, în planul obiect apare imaginea sursei limitată net.

Dispozitivul de iluminat de tip Abbe (II) poate fi construit și conform schemei din figura 6, în care sursa $l_c = \overline{S_1 S_2}$ este plasată în planul

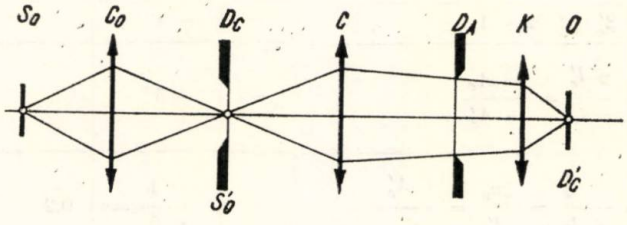


Fig. 5

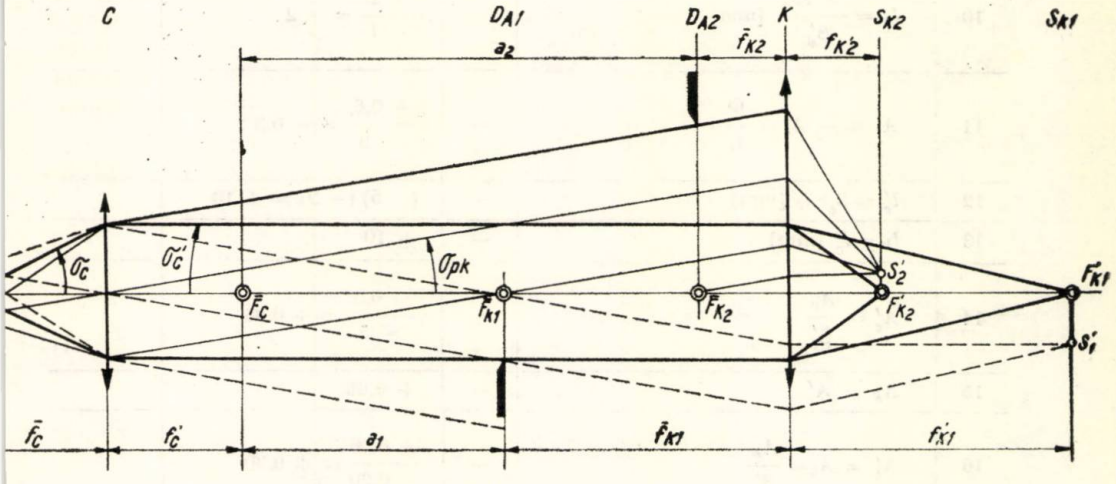


Fig. 6

Tabela 3

Calculul dispozitivului de iluminat de tip Abbe (II)

Nr. crt.	Parametrul de calculat	Semnul	Exemplu numeric	Observații
1	2	3	4	5
1	$A_0 = n_0 \sin \sigma_0$	+	+ 0,3	Se cunoaște
2	$\beta'_0 = \dfrac{-2y'_0}{+2y_0} = \dfrac{+A_0}{-A'_0}$	−	10 : 1	Se cunoaște
3	$N_{0c} = -2y'_0$ [mm]	−	− 20	Se cunoaște
4	$2y_0 = \dfrac{-2y'_0}{\beta'_0}$ [mm]	+	$\dfrac{-20}{-10} = +2$	
5	$\Phi = 2y_0 A_0$	+	(+ 2) (+0,3) = + 0,6	
6	$A'_0 = \dfrac{+A_0}{-\beta'_0}$	−	$\dfrac{+0,3}{-10} = -0,03$	
7	$\beta'_d = \beta'_c \cdot \beta'_k \geqq -1$	−	− 1	Se alege
8	$\beta'_c = \dfrac{+l'_c}{-l_c} = \dfrac{-A_c}{+A'_c}$	−	− 5	Se alege
9	$\beta'_k = \dfrac{+l'_k}{+l_k} = \dfrac{2y_0}{l'_c} = \dfrac{+A'_c}{A_c}$	+	$\dfrac{-1}{-5} = +0,2$	
10	$l_c = \dfrac{+2y_0}{\beta'_d}$ [mm]	−	$\dfrac{+2}{-1} = -2$	
11	$A_c = -A_0 = \dfrac{\Phi}{l_c}$	−	$\dfrac{+0,6}{-2} = -0,3$	
12	$l'_c = \beta'_c \cdot l_c$ [mm]	+	(− 5) (− 2) = + 10	
13	$l_k = l'_c$ [mm]	+	+ 10	
14	$A'_c = \dfrac{A_c}{\beta'_c}$	+	$\dfrac{-0,3}{-5} = +0,06$	
15	$A_k = A'_c$	+	+ 0,06	
16	$A'_k = A_0 = \dfrac{A_k}{\beta'_k}$	+	$\dfrac{+0,06}{+0,20} = +0,30$	

Tabela 3 (continuare)

1	2	3	4	5
17	$f'_c = -\bar{f}_c$ [mm]	+	30	Se alege
18	$s_c = f'_c \dfrac{1-\beta'_c}{\beta'_c}$ [mm]	−	$30\dfrac{1-(-5)}{-5} = -36$	f'_c și β'_c se introduc cu semnele respective
19	$s'_c = f'_c(1-\beta'_c)$ [mm]	+	$30[1-(-5)] = +180$	
20	$f'_k = -\bar{f}_k$ [mm]	+	30	Se alege
21	$s_k = f'_k \dfrac{1-\beta'_k}{\beta'_k}$ [mm]	+	$30\dfrac{1-(+0{,}2)}{+0{,}2} = +120$	
22	$s'_k = f'_k(1-\beta'_k)$ [mm]	+	$30(1-0{,}2) = +24$	
23	$z_c = \dfrac{f'_c}{\beta'_c} = s_c + f'_c$ [mm]	+	$\dfrac{+30}{-5} = -6$	
24	$z'_c = -f'_c \cdot \beta'_c = s'_c - f'_c$ [mm]	+	$(-)(+30)(-5) = +150$	
25	$z_k = \dfrac{f'_k}{\beta'_k} = s_k + f'_k$ [mm]	+	$\dfrac{+30}{+0{,}2} = +150$	
26	$z'_k = -f'_k\beta'_k = s'_k - f'_k$ [mm]	+	$-(+30)(+0{,}2) = -6$	
27	$a = s'_c - z_k$ [mm]	+	$+180-150 = +30$	
28	$\Delta_d = \overline{F'_cF_k} = z'_c - z_k$ [mm]	+	$+150-(+150) = 0$	
29	$e = \overline{CK} = f'_c + \Delta_d - \bar{f}$ [mm]	+	$+30+0-(-30) = +60$	
30	$\operatorname{tg}\sigma_c = \dfrac{\sin\sigma_c}{\cos\sigma_c} \approx A_c + \dfrac{A_c^3}{2}$	−	$-0{,}3+\dfrac{-0{,}3^3}{2} = -0{,}313$	
31	$D_c = 2s_c \operatorname{tg}\sigma_c$ [mm]	+	$2(-36)(-0{,}313) = +22{,}5$	
32	$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{D_c - l'_c}{2\,s'_c}$	+	$\dfrac{22{,}5-10}{2.180} = +0{,}0341$	
33	$D_A = D_C - 2\,a \operatorname{tg}\theta$ [mm]	+	$22{,}5 - 2.30(+0{,}0341) = +20{,}454$	
34	$D_k = D_C - 2(s'_c - s_k)\operatorname{tg}\theta$ [mm]	+	$22{,}5 - 2(180-120).(+0{,}0341) = 18{,}408$	
35	$\operatorname{tg}\sigma_{0_{max}} = \dfrac{D_A}{2f'_k} = \dfrac{D_k - 2y_0}{2s'_k}$	+	$\dfrac{20{,}454}{2.30} = 0{,}340$	
36	$A_0 = \sin\sigma_0 = \dfrac{\operatorname{tg}\sigma_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\sigma_0}}$	+	$\dfrac{0{,}34}{\sqrt{1+0{,}34^2}} = 0{,}30$	Relație de verificare

focal al colectorului C. Trebuie însă avut în vedere faptul că, în același timp, sursa l_c trebuie să coincidă cu centrul de curbură al primului dioptru al meniscului aplanetic convergent.

Pentru a limita diametrul condensorului la o valoare mică este necesar să se folosească o diafragmă de apertură (D_A) mică.

O poziție favorabilă a diafragmei este aceea care corespunde valorii $D_A = D_C$. În acest caz diametrul condensorului $D_k = D_A + 2y_0$. Această valoare poate fi micșorată dacă condensorul este un sistem compus (vezi § 2.2).

Din figura 6 mai rezultă relațiile :

$$D_c = 2f'_c \operatorname{tg} \sigma_c ; \quad \operatorname{tg} \sigma'_c = 0 ; \quad 2y_0 = 2f'_k \operatorname{tg} \sigma_{pc} ;$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{pc} = \frac{l_c}{f'_c} ; \quad \frac{D_c}{2y_0} = \frac{f'_c + a}{f'_k} . \tag{25}$$

Primită la redacție la 7 iunie 1974

NOTE

ANEMOMETRIE CU LASER*)

de V. I. VLAD
Institutul de fizică atomică București,

Anemometria cu laser este o tehnică de măsurare a componentelor vitezei unui mediu transparent în mișcare. Pe scurt, două fascicule de lumină coerente sînt focalizate în același punct de interes — „volumul de măsurare". Cele mai multe curgeri sînt contaminate cu mici particule (0,1—2 μm). Cînd una din aceste particule intră în volumul de măsură ($V \sim 0{,}5$ mm^3 și lungimea în direcția curgerii $\sim 0{,}5$ mm), lumina este difuzată în toate direcțiile și o parte din ea este captată cu ajutorul unui telescop-fotodetector. Mișcarea particulei produce o deviație în frecvența luminii difuzate cunoscută sub numele de „deplasare de frecvență Doppler", care este proporțională cu o componentă a vitezei particulei. Avantajele anemometrelor cu laser față de alte tehnici constau în absența oricăror traductori din fluid (deci și a perturbațiilor corespunzătoare), rezoluția foarte mare (pînă la 10 μm) și măsurarea absolută și precisă legată direct de frecvența laserului.

În ultimii ani, au fost dezvoltate un număr mare de metode pentru extragerea informației asupra vitezei din semnalul produs de fotodetector : filtre fixe, filtre cu reglaj automat al frecvenței, analizoare de spectru, corelatori de fotoni, discriminatori de bandă largă și tehnici de numărare [1], [2]. Din anul 1970, am investigat undele acustice (ultrasonore) și vibrații în plăci subțiri cu ajutorul semnalelor laser modulate în frecvență și a detecției optice prin heterodinare [3]—[5]. Studiile noastre de anemometrie cu laser au fost prezentate numai parțial și aici vom arăta principalele rezultate obținute experimental.

Există mai multe configurații de detecție optică prin heterodinare în anemometria cu laser, dintre care noi am utilizat două :

a) configurația diferențială (fig. 1*a*), preferată pentru densități mici de particule (1—100 în volumul de măsură, în solide semitransparente în mișcare) lichide, gaze ;

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 2, 1977, P. 291—295

b) configurația cu referință locală (fig. 1*b*), preferată pentru densități mari de particule (100—1 000, în flăcări).

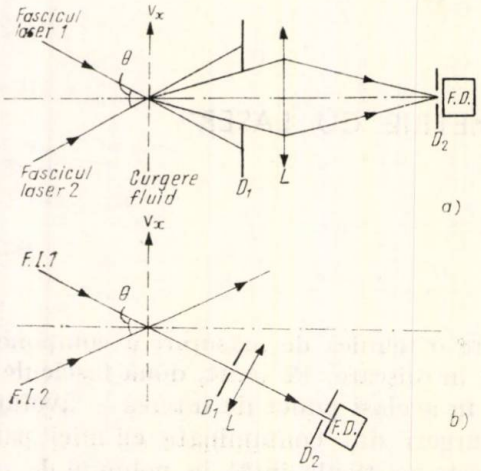


Fig. 1. — Anemometru cu laser : *a)* diferențial și *b)* cu referință locală.

În ambele configurații, deplasarea de frecvență Doppler se determină simplu :

$$f_D = \frac{2v_x \sin(\theta/2)}{\lambda}. \tag{1}$$

În figura 2, am trasat curbele $f_D = \varphi(v_x, \theta)$.

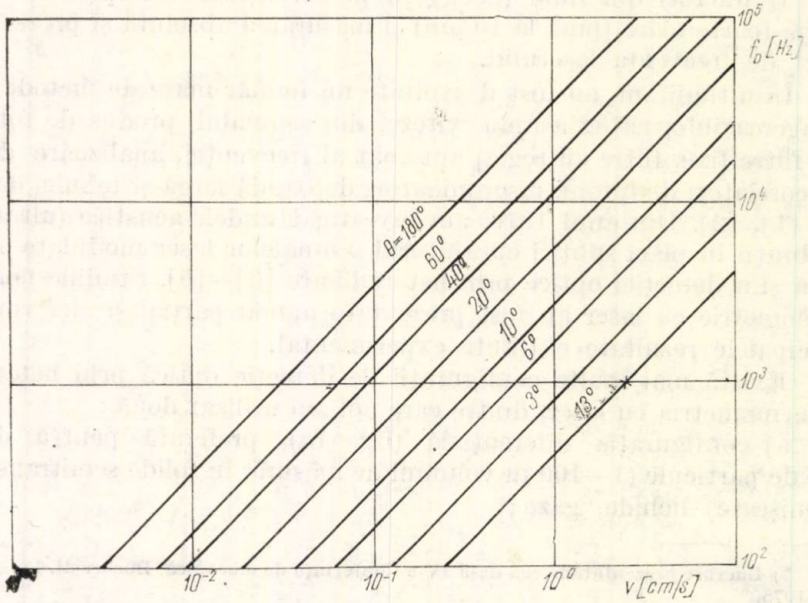
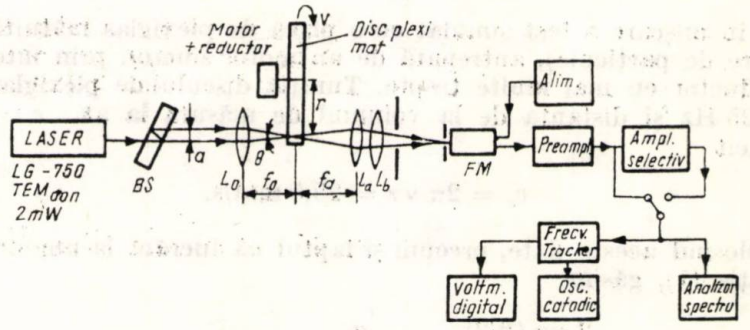


Fig. 2. — Dependența deplasării în frecvență Doppler a luminii de viteza longitudinală a fluidului și de unghiul între fasciculele laser de analiză.

Un montaj experimental concret de tipul 1*b* este arătat în figura 3. Divizarea fasciculului laser (LG-750, 2mW, TEMoon, $\lambda = 0{,}633$ μm) se face cu ajutorul unei lame cu fețe plan-paralele care produce două fas-



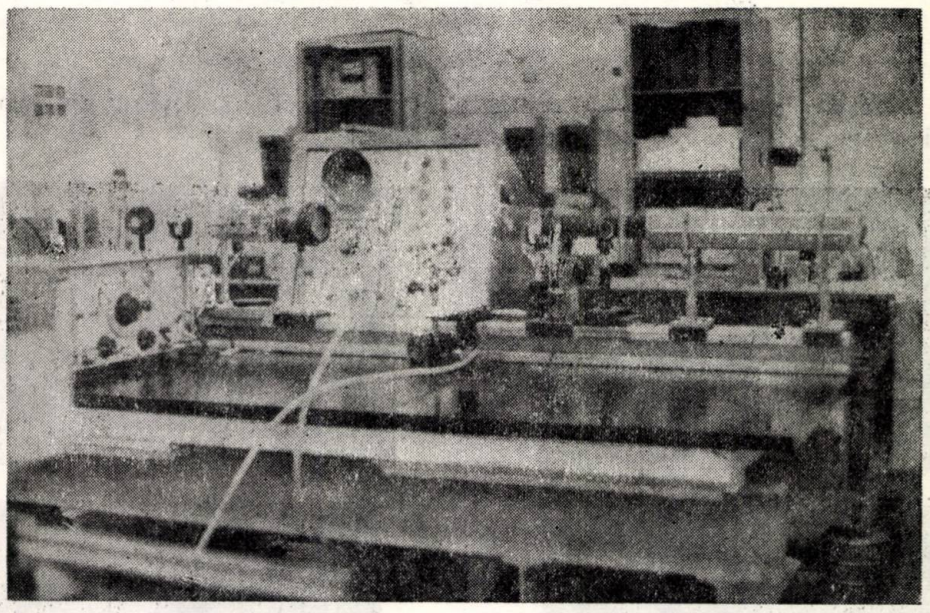


Fig. 3*a*). — Schema concretă a unui anemometru cu laser (IFA); (b) Fotografia anemometrului cu laser ALDOH-IFA.

cicule paralele și cu puteri într-un raport convenabil (1/9). Dacă grosimea lamei este t, distanța între fasciculele paralele este

$$a = \frac{t \sin 2\alpha}{(n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}}. \qquad (2)$$

Pentru lama utilizată ($BK-7$), $n=1{,}5$ și se poate determina ușor $\alpha_M = 49°$, ceea ce dă

$$a = 0{,}764\ \mathrm{t} = 6\ \mathrm{mm}.$$

În calitate de lentile Fourier, am utilizat două obiective cu

$$f_0 = 245 \text{ mm} \text{ și } f_0 = 360 \text{ mm}.$$

Fluidul în mișcare a fost simulat cu o placă de plexiglas mătuită (densitate mare de particule), antrenată de un motor sincron prin intermediul unui reductor cu mai multe trepte. Turația discului de plexiglas a fost $\nu = 0{,}125$ Hz și distanța de la volumul de măsură la ax : $r = 32$ mm, astfel încît

$$v_x = 2\pi \nu r = 25{,}5 \text{ mm/s}. \tag{3}$$

Folosind aceste date, precum și faptul că lucrăm la unghiuri mici, din relația (1), găsim

$$f_D = \frac{2 \sin(\theta/2)}{\lambda} v_x \sim \frac{a}{f_0 \lambda} v_x = 38.7 \, v_x [\text{mm/s}], \tag{4}$$

$$f_D \sim 970 \text{ Hz}.$$

Experimental, folosind un amplificator selectiv și separat un analizor de spectru, am găsit $f_D \sim 1$ KHz (fig. 4).

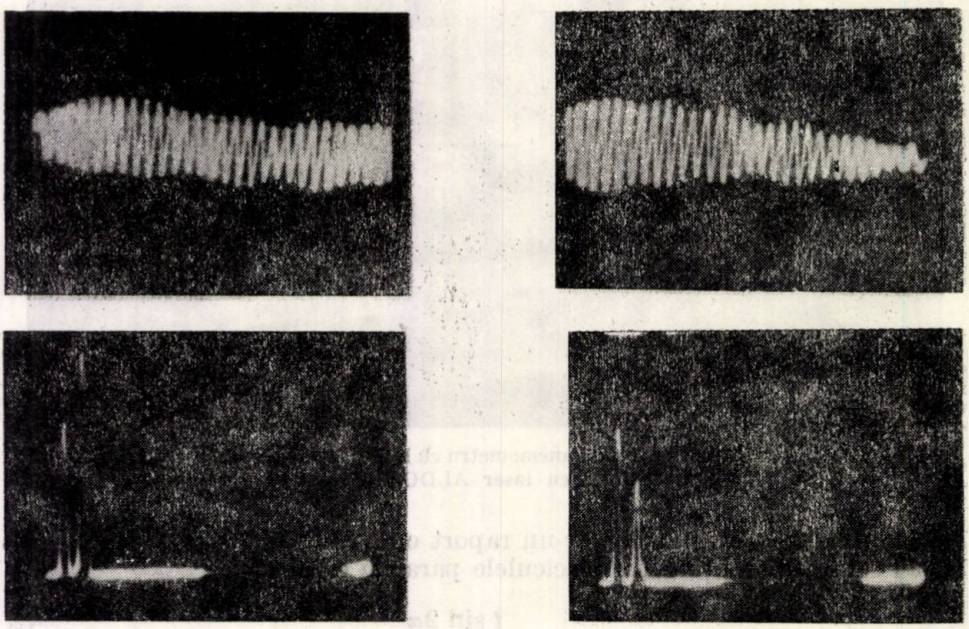


Fig. 4. — Semnale Doppler produse de anemometrul cu laser pe : *a)* osciloscop, *b)* analizorul de spectru.

Printr-o colaborare, am făcut experimentări cu un filtru cu control automat al frecvenței, realizat sub formă integrată pentru prima dată în R.S.R. (de ing. A. Hartular, la IPRS). Dispozitivul *FCAF* are proprie-

tatea de a urmări automat variațiile de frecvență produse de mișcarea fluidului și de a furniza un semnal cu frecvența egală cu frecvența Doppler, care poate fi citită precis cu un frecvențmetru numeric. Schema *FCAF* este dată în figura 5. Rezultatul experimental obținut cu acest dispozitiv a fost

$$f_D = 1{,}00 - 1{,}07 \text{ KHz}.$$

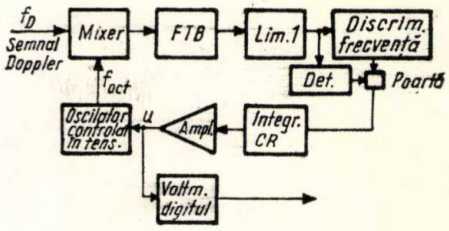


Fig. 5. — Schema unui filtru cu control automat al frecvenței.

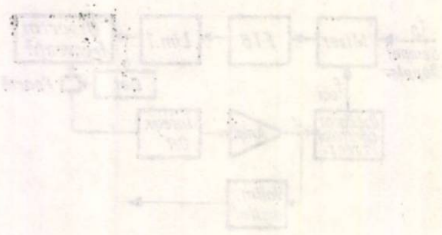
Dispersia de frecvență este de așteptat datorită fluctuațiilor de viteză ale motorului, cît și datorită unei lărgiri de tipul ambiguității din radarul Doppler (lărgimea finită a fasciculelor laser, lărgimea limitată a semnalelor Doppler).

Pe baza experimentărilor făcute ulterior pe curgeri în conducte, am pus la punct instalația pentru uz industrial *ALDOH* (anemometru cu laser folosind detecția optică prin heterodinare).

În final, țin să mulțumesc ing. N. Miron și tehnicienilor principali M. Popescu și V. Sandu pentru sprijinul acordat în efectuarea unor experimentări cu instalația ALDOH.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Durst, M. Zaré, *Bibliography on Laser Doppler Anemometry Literature*, DISA Information Department, Denmark, Publ. *4208* (1974).
2. * * * *Proceedings of the Conference on Electro-optic Systems in Flow Measurement at Southampton University*, Optoelectronics, **4**, *5* (1972) și **5**, *1* (1973).
3. V. I. Vlad, *Detecția optică prin heterodinare a semnalelor laser modulate în frecvență*, Cercetările multidisciplinare și interdisciplinare. Originea, dezvoltarea și perspectivele lor, Edit. Academiei R.S.R., București, 1972, p. 281.
4. — *Raport anual 633A/1975*, Institutul de fizică atomică București, 1975.
5. — *Introducere în holografie*, Edit. Academiei, București, 1973, p. 161—166.



RECENZII

OPTIMIZATION IN STRUCTURAL DESIGN. (Optimizarea proiectării structurilor). Editors A. Sawczuk, Z. Mróz. IUTAM Symposium Warsaw/Poland 1973. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

Cartea conține o descriere detaliată a lucrărilor celui de-al doilea simpozion IUTAM în problema optimizării structurilor, ținut în Polonia, la Varșovia, în perioada 21—24 august 1973.

În cadrul lucrărilor acestui simpozion au fost prezentate 40 de comunicări, împărțite în 10 secțiuni, care au abordat problemele cele mai variate și actuale din domeniul teoriei și practicii optimizării structurale și anume: metodele matematice de optimizare și programarea matematică, dinamica, optimizarea formei, optimizarea plăcilor curbe subțiri, metode probabilistice în optimizare; optimizarea ramelor și cadrelor, precum și a structurilor ranforsate, optimizarea structurilor plastice și structurilor supuse la vibrații.

În cadrul metodelor matematice ale optimizării și a programării matematice au fost tratate: problema grafelor în proiectarea structurilor, aplicațiile teoriei controlului optimal, formularea variațională pentru problemele optimizării structurilor și a proiectării în domeniul plastic; optimizarea în condițiile discretizării și discontinuității; problemele jocurilor în teoria optimizării și aplicarea programării dinamice la optimizarea structurilor.

În cadrul problemelor de dinamică se remarcă lucrările referitoare la criteriile proiectării optimale a structurilor elastice supuse la sarcini dinamice și proiectarea optimală pentru stabilitate sub sarcini disipative, giroscopice sau circulatorii, iar la secțiunea de optimizarea formei — proiectarea optimă a sistemelor de suspensii și a arcelor funiculare.

În domeniul teoriei plăcilor curbe subțiri, au fost prezentate comunicările referitoare la proiectarea optimală a învelitorilor în raport cu stabilitatea lor, precum și la forma optimă a unor învelitori axisimetrice; iar în cadrul secțiunii de metode probabilistice au fost tratate problemele privind eficacitatea de cost a cercetării în proiectarea de structuri sub raportul incertitudinii și criteriile de optimizare a proiectării structurale probabilistice.

În problema optimizării structurilor ranforsate și a celor în formă de rame sau cadre, au fost tratate problemele referitoare la optimizarea învelișurilor de revoluție ranforsate cu fibre, proiectarea optimală a coșurilor de beton, a grinzilor cu zăbrele și a cadrelor simetrice plane de greutate minimă.

În cadrul secției de structuri plastice au fost prezentate comunicările referitoare la optimizarea plăcilor și barelor care lucrează în domeniul plastic, comportarea post-critică a structurilor optimale plastice, optimizarea formei structurilor plastice, iar în domeniul proiectării la sarcini vibratorii—problema proiectării optime la sarcini ciclice și proiectării cadrelor supuse unor sarcini mobile.

Multe dintre lucrările prezentate sînt direct-aplicabile pentru rezolvarea unor probleme practice. Astfel sînt comunicările referitoare la: proiectarea interactivă și automatizată a structurii navelor; proiectarea optimă a sistemelor de suspensii, a grinzilor cu zăbrele, a coșurilor de beton; a învelișurilor de revoluție ranforsate cu fibre.

Datorită varietății problemelor prezentate și aplicabilității lor practice, cartea prezintă un interes deosebit pentru cercetătorii, proiectanții și doctoranzii care se ocupă cu problemele optimizării structurilor. Deși nu cuprinde lucrări specifice aeronauticii, ea este foarte utilă și în acest domeniu, întrucît multe din problemele teoretice și metodele de calcul descrise pot fi extinse și aplicate structurilor aerospațiale.

G. V. Vasiliev

C. AVRAM şi V. BOTA, *STRUCTURI COMPUSE OŢEL-BETON ŞI BETON PRECOMPRIMAT — BETON ARMAT*, Editura tehnică, Bucureşti, 1975, 359 p., 208. fig., 227 ref. bibl.

Lucrarea reprezintă un tratat original, de bază, privind concepţia, calculul, alcătuirea şi execuţia structurilor compuse din oţel-beton şi beton precomprimat — beton armat, înscriindu-se în domeniile de „frontieră" a structurilor din oţel, beton armat şi beton precomprimat. Sînt sintetizate rezultatele la nivel mondial privind structurile compuse, incluzînd cercetările teoretice şi experimentale ale autorilor în cadrul Institutului politehnic „Traian Vuia" din Timişoara, cît şi contribuţiile în cadrul Comisiei mixte AIPC — CEB — CECM — FIP „Constructions mixtes acier — béton", ai cărei membri sînt.

În capitolul introductiv se prezintă diferite tipuri de elemente mixte, cîteva lucrări caracteristice ca tabliere de poduri, construcţii civile şi industriale, ce reflectă domeniile de utilizare a structurilor cu elemente mixte. Capitolul al 2-lea cuprinde notaţiile folosite. După ce sînt date caracteristicile materialelor utilizate la alcătuirea structurilor compuse (cap. 3), sînt descrise procedeele generale de execuţie (cap. 4 şi 5) şi de realizare constructivă a diferitelor elemente de legătură ale structurilor mixte (cap. 6).

Cea mai mare parte a lucrării este consacrată concepţiei şi calculului structurilor compuse, bazate atît pe metoda elastică (a rezistenţelor admisibile), cît şi pe metoda stărilor limită (cap. 7—10). Este de remarcat contribuţia importantă a autorilor la elaborarea unei metode unitare de calcul la stările limită a structurilor mixte oţel-beton, cît şi la formularea originală a teoriei de calcul la starea-limită de rezistenţă la încovoiere, considerîndu-se gradul real de plastificare a secţiunii mixte (cap. 9). Imaginea completă asupra stării de eforturi în elementele structurilor mixte este întregită prin luarea în considerare atît a influenţei contracţiei şi curgerii lente a betonului, cît şi a influenţei diferenţei de temperatură între cele două materiale.

În continuare, în lucrare sînt dezvoltate probleme ale calculului structurilor mixte static nedeterminate (cap. 11), ale calculului elementelor de legătură (cap. 12), alcătuirea şi calculul stîlpilor cu secţiune compusă (cap. 13), determinarea greutăţii minime a structurilor compuse oţel-beton (cap. 14) şi unele recomandări practice constructive privind realizarea cîtorva elemente mixte frecvente (cap. 15).

Cartea, prima de acest gen apărută în limba română, este deosebit de valoroasă şi foarte utilă inginerilor din execuţie, proiectare, cercetare şi învăţămînt, constituind un ghid în aplicarea structurilor mixte, care în anumite situaţii specifice reprezintă soluţii avantajoase şi competitive din punct de vedere tehnic şi economic, atît pentru construcţii industriale şi sociale, cît şi pentru construcţii de poduri.

Autorii au elaborat şi „Instrucţiunile tehnice pentru calculul şi alcătuirea constructivă a elementelor compuse oţel-beton", indicativ P. 83—74, care cuprind şi exemple de calcul (Bul. Construcţiilor, Vol. 6, 1975, p. 5—77).

Ovidiu Mirşu

RUDOLF KOLLER, *Konstruktionsmethode für den Maschinen-, Geräte- und Apparatebau* (Metodica proiectării în construcţia de maşini, de instrumente şi aparate). Springer-Verlag, Berlin, 1976, 191 p., 86 fig.

Lucrarea reprezintă o parte din cursul predat de autor la T. H. Aachen (Hochschultext) şi reprezintă o metodologie de alegere a directivelor pentru raţionalizarea şi automatizarea procesului de proiectare.

Conţinutul este împărţit în trei grupe:

A — Introducere, B — Directive pentru etapele procesului de proiectare şi C — Anexe.

În introducere, după ce justifică valoarea şi scopul unei metode de proiectare, se definesc obiectivele proiectării: sisteme de maşini, instrumente şi aparate funcţie de predominarea energiei, informaţiei sau materialului. În continuare se fac anumite consideraţii privind puterea, turaţia, randamentul şi influenţa lor asupra proiectării.

Grupa B conţine de fapt teoria elaborată de autor privind sinteza funcţiunii obiectului proiectat, ca de exemplu: emiţător-receptor, conducător-izolator, măritor-micşorator etc., sistematizate şi în figura 7.33.

În a doua parte a aceleiaşi grupe se tratează faza de concept bazată pe operaţii de bază, ca de exemplu cele de „transformare", „amplificare", „comunicare" etc., a energiei informaţiei sau a materialului. În final se arată restricţiile posibile şi se dau cîteva exemple.

Anexele din grupa a treia, în număr de 8 şi două cataloage de principii totalizează 38 pagini.

Lucrarea se încheie cu o bogată bibliografie.

În forma prezentată, lucrarea apare ca o enciclopedie privind fenomenele fizice şi parţial chimice care pot fi utilizate în proiectarea celor trei sisteme de obiecte supuse proiectării. Sistematizarea este dusă la extremis, prezentarea grafică foarte bună.

E. Botez

HERMANN PFAUTER, *Pfauter-Wälzfräsen. Teil 1. Verfahren, Maschinen, Werkzeuge, Anwendungstehnik, Wechselräder* (Frezarea prin rulare. Partea I-a. Procedee, maşini, unelte, tehnica utilizării, roţi de schimb). 2. erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 606 p., 573 fig.

Autorul lucrării este conducătorul firmei cu acelaşi nume, constructoare de maşini de danturat cu freză-melc. Lucrarea reprezintă reeditarea primei părţi a unui îndrumar (Handbuch) apărut în 1933, adresîndu-se inginerilor şi tehnicienilor care folosesc maşinile de danturat, ale acestei firme.

Conţinutul primei părţi este împărţit în cinci capitole.

Primul capitol intitulat „Prelucrarea danturilor" se referă rezumativ în special la prelucrarea danturilor prin frezare cu freza melc.

În capitolul al 2-lea se prezintă produsele firmei : maşinle de frezat Pfauter şi accesoriile acestora.

Capitolul al 3-lea este rezervat sculelor folosite pe aceste maşini, dîndu-se indicaţii utile în ceea ce priveşte ascuţirea, montarea etc. a sculelor.

Al 4-lea capitol se referă la danturarea roţilor dinţate (cilindrice) şi a angrenajelor cu melc-roată melcată, prezentîndu-se tehnologia alegerii maşinii, fixării piesei şi sculei, determinării parametrilor procesului de aşchiere etc. Se prezintă unele particularităţi ale acestui proces tehnologic, ca frezarea în diagonală, prelucrarea arborilor canelaţi, a danturilor bombate pentru cuplaje, a melcilor şi roţilor melcate prin cele trei metode : radială, tangenţială şi combinată, a melcilor globoidali, etc.

În capitolul al 5-lea se dau formulele pentru calculul roţilor de schimb, în scopul reglării acestor genuri de maşini de danturat.

Partea a doua a lucrării (care urmează să apară) va avea două capitole : 6 — Precizia — şi 7 — Economicitatea.

Este de remarcat prezentarea grafică excepţională, claritatea expunerii precum şi corectitudinea precizării sursei bibliografice, fiind indicate peste 230 titluri, numeroase standarde şi patente.

E. Botez

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 36, nr. 3 Mai — Iunie 1977

SUMAR

STUDII

Pag.

CORNELIU I. CRĂCIUN, Calculul debitelor pentru curgerea a două lichide vîscoase, separate diametral în conducta circulară 303

MIHAIL ROCO, GEORGETA FRĂSINEANU, Metodă de calcul a caracteristicilor de curgere ale fluidelor bifazate lichid-solid prin conducte şi canale 311

ALEXANDRU D. STAN, Asupra noţiunii de permeabilitate a unei fisuri deschise într-un zăcămînt petrolifer 325

SERGIU T. CHIRIACESCU, CONSTANTIN HUIU, DUMITRU MANGERON, Concepte ale „teoriei sistemelor" în studiul sistemelor mecanice liniare 335

PETRU NICOLAE NIŢESCU, NICOLAE I. MANOLESCU, Asupra sintezei cinematice a mecanismelor spaţiale cu cinci axe 351

GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, I. CONSTANTINESCU, Studiul răspunsului dinamic al principalelor tipuri de maşini vibratoare acţionate mecanic 369

A. PAVEL, Parametrii funcţionării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcţie de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. III. 381

EUGEN GEORGESCU, DAN MUCICHESCU, Asupra ciocnirii dintre un pod rulant şi structura portantă 395

RODICA MINCU, AURELIAN BĂLĂŞESCU, ANATOLIE MARCU, Unele rezultate ale utilizării corelaţiilor multiple în probleme de mecanica pămînturilor 407

DECEBAL M. ANASTASESCU, Contribuţii la calculul de conlucrare spaţială dintre suprastructură, fundaţie şi terenul de fundare 417

T. MLADINESCU, Aspecte noi în cercetarea capacităţii portante a roţilor dinţate cilindrice cu dantura dreaptă, executate din poliamidă cu adaos de bisulfură de molibden 429

ALEXANDRU NICA, Tribologia nucleară 441

NOTE

SERGIU IVANCENCO, Utilizarea teoriei „lagărului foarte scurt" în proiectarea lagărelor hidrodinamice radiale 451

AUREL OPREAN, LIVIU MASALAR, CONSTANTIN TÎRCOLEA, Modificări în cinematica pompelor şi motoarelor hidrostatice în scopul ameliorării performanţelor dinamice 455

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

CALCULUL DEBITELOR PENTRU CURGEREA A DOUĂ LICHIDE VÎSCOASE, SEPARATE DIAMETRAL ÎN CONDUCTA CIRCULARĂ

de CORNELIU I. CRĂCIUN
Institutul politehnic din București

În baza unor rezultate obținute anterior se calculează debitele a două fluide care curg separate diametral, sub același gradient de presiune, într-o conductă circulară.

I. FORMULE PENTRU VITEZE ȘI DEBITE ÎN CURGEREA STRATIFICATĂ

Se consideră curgerea stratificată a două lichide de viscozități dinamice μ_1, respectiv μ_2, în conducta de rază unitate. Se alege ca axă Oz axa conductei cu sensul de curgere al fluidelor și Ox în secțiunea normală paralelă cu linia de separare (fig. 1).

Curgerea are loc sub acțiunea gradientului de presiune $P = \dfrac{\partial p}{\partial z}$. Poziția liniei de separare poate fi caracterizată prin parametrii δ sau α legați prin relația $\cos \alpha = 1 - \delta$.

Vitezele în fiecare din cele două domenii $D_j (j = 1$ sau $2)$ au fost scrise [1] sub forma

$$v_j(x, y) = K_j \left\{ V_j(x, y) + \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2) \right\}, \quad (1)$$

în care

$$K_j = -\frac{1}{\mu_j} P. \quad (2)$$

Funcțiile $V_j(x, y)$, armonice în domeniile $D_j (j = 1$ sau $2)$, nule pe frontierele solide C_j, satisfac anumite condiții de racordare pe frontiera comună C_0. Fie $V_j^*(x, y)$ conjugata armonică a funcției $V_j(x, y)$ în domeniul D_j. Debitele

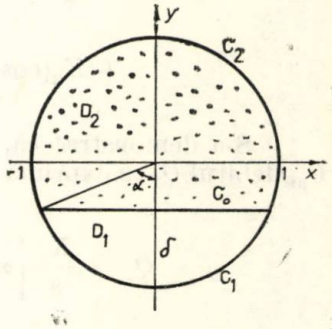


Fig. 1

au expresiile [1]:

$$Q_2 = \frac{K_2}{8}\left[\pi - \alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha\cdot\cos\alpha(3+2\sin^2\alpha)\right]+$$

$$+\frac{K_2}{2}\left\{\cos\alpha\int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} V_2(x,\ y_0)\mathrm{d}x + \int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} xV_2^*(x,\ y_0)\mathrm{d}x\right\}, \tag{3}$$

$$Q_1 = \frac{K_1}{8}\left[\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha(3+2\sin^2\alpha)\right]-$$

$$-\frac{K_1}{2}\left\{\cos\alpha\int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} V_1(x,\ y_0)\mathrm{d}x + \int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} xV_1^*(x,\ y_0)\mathrm{d}x\right\}. \tag{4}$$

Dacă se notează

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{5}$$

$$J(\alpha, m) = \frac{1}{2}\int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} V_2(x, y_0)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$J^*(\alpha, m) = \frac{1}{2}\int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} xV_2^*(x, y_0)\mathrm{d}x, \tag{7}$$

atunci

$$Q_2 = \frac{K_2}{8}\left[\pi - \alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha(3+2\sin^2\alpha)\right]+$$

$$+ K_2\{\cos\alpha\, J(\alpha, m) + J^*(\alpha, m)\}. \tag{8}$$

S-a demonstrat că, pe baza relațiilor de racordare existente pe linia C_0, debitul Q_1 se exprimă cu ajutorul aceleași integrale (6) și (7) sub forma

$$Q_1 = \frac{K_1}{8}\left[\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha(3+2\sin^2\alpha)\right]-$$

$$-K_1\left\{\frac{\cos\alpha}{m}\, J(\alpha,\ m) + J^*(\alpha,\ m) - \frac{m-1}{m}\,\frac{\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha}{6}\right\}. \tag{9}$$

II. IMPORTANȚA DETERMINĂRII DEBITELOR LA DIFERITE STRATIFICĂRI

Fie μ_2 viscozitatea lichidului transportat (ex. petrol). El curge singur în întreaga secțiune cu debitul de referință

$$Q_2^0 = K_2 \frac{\pi}{8}. \tag{10}$$

La injecția lichidului de viscozitate mai mică (ex. apă), care ocupă o poziție inferioară ($\rho_1 > \rho_2$), debitul transportat este Q_2 dat de formula (8). El depinde de raportul m al viscozităților și de parametrul de stratificare α, adică de grosimea stratului injectat. Dacă $m > 1$ și grosimea δ convenabil aleasă, atunci debitul transportat Q_2 poate fi superior celui de referință [2].

Debitul raportat se definește drept cîtul dintre debitul transportat în mișcarea stratificată și debitul de referință.

$$q_j = \frac{Q_j}{Q_j^0} \qquad (j = 1, 2). \tag{11}$$

Pentru cele două lichide, debitele de referință se scriu

$$q_2 = 1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{3\pi} \sin\alpha \cos\alpha (3 + 2\sin^2\alpha) +$$

$$+ \frac{8}{\pi} [\cos\alpha J(\alpha, m) + J^*(\alpha, m)], \tag{12}$$

$$q_1 = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{3\pi} \sin\alpha \cos\alpha (3 + 2\sin^2\alpha) -$$

$$- \frac{8}{\pi} \left[\frac{\cos\alpha}{m} J(\alpha, m) + J^*(\alpha, m) - \frac{m-1}{m} \frac{\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha}{6} \right] \tag{13}$$

Dacă prin injecție se obține un debit transportat Q_2 superior celui de referință Q_2^0 (creștere a capacității de transport), atunci debitul raportat q_2 are valori supraunitare. Este cazul care prezintă interes din punct de vedere practic, și pentru a pune în evidență condițiile în care apare este necesar calculul debitului Q_2 sau a debitului raportat q_2 la diferite valori ale parametrului de stratificare. Pentru a realiza acest lucru trebuie determinată funcția corecție a vitezei V_2 și conjugata ei armonică V_2^* pe linia de separare, sub o formă care să permită efectuarea integralelor din (6) și (7). Totodată, cunoașterea funcției V_2 pe linia de separare revine, în baza formulei (1), la cunoașterea distribuției de viteze pe C_0.

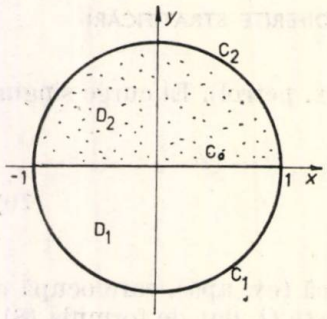


Fig. 2

Rezolvarea problemei pentru diferite stratificări este foarte dificilă.

Aici vom prezenta un caz mai ușor abordabil, cel al separării diametrale (fig. 2) caracterizat prin valoarea parametrului $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\delta = 1$).

III. REPARTIȚIA DE VITEZE ȘI FUNCȚIA CORECȚIE V_2 PE DIAMETRUL DE SEPARARE

În lucrarea [3] s-a demonstrat că pentru o conductă de secțiune arbitrară, care prezintă simetrie față de linia de separare a celor două lichide, distribuția de viteze pe interfață este tocmai distribuția din mișcarea Poiseuille cînd în întreaga conductă curge sub același gradient de presiune un singur fluid a cărui viscozitate este media viscozităților lichidelor stratificate.

Aplicarea acestui rezultat la conducta circulară cu separare diametrală ne permite să scriem distribuția de viteze pe C_0 sub forma

$$v(x, 0) = -\frac{P}{\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}} \frac{1}{4}(1 - x^2) \tag{14}$$

sau, făcînd să apară constanta K_2 și parametrul m definite la (2) și (5),

$$v(x, 0) = K_2 \frac{2m}{m+1} \frac{1}{4}(1 - x^2). \tag{15}$$

Formulele de debit au fost stabilite pornind de la forma (1) a vitezei. Pentru $j = 2$ și $y = 0$ (diametrul C_0) formula (1) se scrie

$$v_2(x, 0) = K_2 \left\{ V_2(x, 0) + \frac{1}{4}(1 - x^2) \right\}. \tag{16}$$

Din compararea formulelor (15) și (16) se deduce expresia funcției corecție pe linia de separare

$$V_2(x) = \frac{1}{4} \frac{m-1}{m+1}(1 - x^2). \tag{17}$$

Să notăm V_2^0 valoarea maximă a lui $V_2(x)$, care se obține în centrul conductei

$$V_2^0 = \frac{1}{4} \frac{m-1}{m+1}. \tag{18}$$

Atunci formula (17) se scrie

$$V_2(x) = V_2^0(1 - x^2). \tag{19}$$

Se remarcă imediat că este o repartiție parabolică în care parametrul m intervine numai prin mărimea V_2^0.

IV. CONJUGATA ARMONICĂ V_2^* A FUNCȚIEI CORECȚIE

Funcția corecție $V_2(x, y)$ în domeniul D_2 este soluția problemei la limită

$$\begin{aligned} &\Delta V_2(x, y) = 0 && \text{în } D_2, \\ &V_2(x, y) = 0 && \text{pe } C_2, \\ &V_2(x, y) = V_2^0(1 - x^2) && \text{pe } C_0, \end{aligned} \tag{20}$$

adică a unei probleme de tip Dirichlet pentru semicerc. Considerăm și conjugata ei armonică $V_2^*(x, y)$. Funcția de variabila complexă $\zeta = x + iy$,

$$F_2(\zeta) = V_2(x, y) + i\, V_2^*(x, y), \tag{21}$$

olomorfă în semicerc, cu partea reală nulă pe semicircumferință și egală cu $V_2^0(1 - x^2)$ pe diametru se scrie ([4] p. 59).

$$F_2(\zeta) = \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1} V_2^0(1 - \xi^2)\left[\frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{\zeta}{\zeta\xi - 1}\right] d\xi + i\,k. \tag{22}$$

Efectuarea integralei conduce la expresia

$$F_2(\zeta) = V_2^0 \frac{i}{\pi}\left\{2\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \frac{(1 - \zeta^2)^2}{\zeta^2}\ln\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} - i\,\pi(1 - \zeta^2)\right\} + i\,k. \tag{23}$$

Pe diametrul $C_0(y = 0)$, unde $\zeta = x$, partea reală și imaginară funcției $F_2(\zeta)$ se separă imediat și avem

$$V_2(x) = V_2^0(1 - x^2), \tag{24}$$

$$V_2^*(x) = V_2^0 \frac{1}{\pi}\left[2\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{(1 - x^2)^2}{x^2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right] + k. \tag{25}$$

Am determinat astfel cele două funcții cu care se pot calcula integralele (6), (7) și deci debitele (8) și (9).

V. DEBITELE ÎN CURGEREA STRATIFICATĂ CU SEPARARE DIAMETRALĂ

Să revenim la formulele de debit (8) și (9), cu valoarea parametrului de stratificare corespunzătoare separării diametrale $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Pentru Q_2 termenul care conține paranteza dreaptă se reduce la $\frac{K_2}{8}\ \frac{\pi}{2}$. Dacă ținem seama de (10), el reprezintă $\frac{1}{2} Q_2^0$, adică jumătate din debitul de referință. Al doilea termen, cel cu acoladă, reprezintă corecția adusă debitului din jumătatea superioară a secțiunii ca urmare a prezenței celui de-al doilea fluid. La separarea diametrală el se reduce la $K_2 J^*\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$. Așadar debitul transportat este

$$Q_2 = \frac{1}{2} Q_2^0 + K_2 J^*\left(\frac{\pi}{2},\ m\right). \tag{26}$$

În mod analog, debitul injectat este

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q_1^0 - K_1 J^*\left(\frac{\pi}{2},\ m\right). \tag{27}$$

Rămîne să evaluăm integrala (7), în care $V^*(x)$ are expresia (25). Contribuția constantei k este nulă, prin urmare

$$J^*\left(\frac{\pi}{2},\ m\right) = V_2^0 \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} x \left[2\,\frac{x^2+1}{x} - \frac{(1-x^2)^2}{x^2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right] \mathrm{d}x. \tag{28}$$

Deoarece integrandul este funcție pară, putem reduce intervalul de integrare

$$J^*\left(\frac{\pi}{2},\ m\right) = V_2^0 \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \left[2(x^2+1) - \frac{(1-x^2)^2}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}\right] \mathrm{d}x. \tag{29}$$

După calculul integralei rezultă

$$J^*\left(\frac{\pi}{2},\ m\right) = V_2^0 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{30}$$

Cu (30) în (26) și (27), obținem

$$Q_2 = \frac{1}{2} Q_2^0 + K_2 V_2^0 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) = Q_2^0 \left[\frac{1}{2} + V_2^0 \frac{8}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{31}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q_1^0 - K_1 V_2^0 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) = Q_1^0 \left[\frac{1}{2} - V_2^0 \frac{8}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{32}$$

Dacă ţinem seama şi de (18), atunci

$$Q_2 = Q_2^0\left[\frac{1}{2} + \frac{m-1}{m+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{33}$$

$$Q_1 = Q_1^0\left[\frac{1}{2} - \frac{m-1}{m+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{34}$$

Debitele raportate definite la (11) se scriu

$$q_2 = \frac{1}{2} + \frac{m-1}{m+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{35}$$

$$q_1 = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{m+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{36}$$

VI. APLICAŢII NUMERICE. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Am arătat la punctul II că din punct de vedere practic prezintă interes injecţia cu $m > 1$. De aceea s-a calculat debitul transportat q_2 pentru cîteva valori supraunitare ale parametrului m din formula

$$q_2 = 0{,}5 + 0{,}310569\,\frac{m-1}{m+1}.$$

Al doilea termen, care depinde de m, reprezintă contribuţia adusă de injecţie la creşterea debitului de referinţă în jumătatea secţiunii şi se notează q_2''.

Aşa cum se constată din tabela 1, q_2'' care este egal cu zero pentru m = 1, creşte repede odată cu m pînă la $m = 20$ şi apoi mult mai încet, tinzînd către o valoare asimptotică. Injecţia cu un fluid de 20 de ori mai puţin vîscos aduce un aport de debit q'' apropiat de cel maxim posibil şi folosirea altui lichid de viscozitate mai mică nu este justificată.

Tabela 1

m	q_2''	q_2
1	0,	0,5000
2	0,103523	0,6035
20	0,280991	0,7810
50	0,298389	0,7984
100	0,304419	0,8044
$\to\infty$	0,310569	0,8106

Să considerăm aceeaşi valoare $m = 20$. Deşi fluidul transportat în prezenţa injecţiei curge prin jumătate secţiune, debitul Q_2 este cu numai 22 % mai mic decît cel de referinţă, adică decît debitul Q_2^0 cu care ar curge singur în întreaga secţiune.

Primită la redacţie la 7 aprilie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Corneliu Crăciun şi Dorel Homentcovschi, *Formule de debit pentru curgerea stratificată a lichidelor viscoase în conducta circulară*, St. cerc. mat., **28**, *4* (1976).
2. Corneliu Crăciun, Dorel Homentcovschi, Vasile Masgras, *Studiu comparativ al vitezelor şi debitelor din conducta pătrată şi circulară pentru mişcarea stratificată*, St. cerc. mec. apl., **XXXV**, *2* (1976).
3. Corneliu Crăciun, *Contribuţii la studiul mişcării fluidelor viscoase. Mişcări fluide stratificate şi cu suprafaţă liberă*, Teză de doctorat, (1970), Institutul politehnic Bucureşti.
4. Caius Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest—Paris, 1959.

METODĂ DE CALCUL A CARACTERISTICILOR DE CURGERE ALE FLUIDELOR BIFAZATE LICHID-SOLID PRIN CONDUCTE ȘI CANALE. I

MIHAIL ROCO
Institutul politehnic București
GEORGETA FRĂSINEANU
ICEMENERG

Lucrarea se referă la o metodă de stabilire a caracteristicilor de curgere ale fluidelor bifazate prin conducte și canale, pe baza structurii de curgere specifice mediilor bifazate. Se utilizează principiile calculului variațional (respectiv principiul lui Hamilton și metoda elementului finit) și unele corelații experimentale asupra mărimilor hidrodinamice locale. Rezolvarea se efectuează pe calculatoare numerice. Metoda are un grad ridicat de generalitate față de metodele semiempirice cunoscute și se verifică bine cu rezultatele experimentale.

1. GENERALITĂȚI

Transportul hidraulic al materialelor solide sub formă de hidroamestec prin conducte și canale este un procedeu tehnic modern, cu multiple aplicații eficiente în economie. Studiul teoretic și experimental al fluidelor bifazate lichid — particule solide prezintă probleme specifice față de cazul fluidelor omogene, avînd un interes științific ridicat.

Pentru stabilirea caracteristicilor de curgere ale fluidelor bifazate prin conducte și canale se cunosc două direcții principale: una bazată pe corelații experimentale directe asupra mărimilor de determinat și alta bazată pe studiul analitic al structurii de curgere. Prima direcție, deși are în prezent cea mai largă răspîndire, necesită eforturi de cercetare importante, iar precizia și posibilitățile de generalizare a rezultatelor sînt limitate. În cazul celei de-a doua direcții de studiu se adoptă modele fizice simplificatoare ale fenomenului. Aplicînd conceptele mecanicii fluidelor în ipoteza „fluidului echivalent" sau în ipoteza „bicomponenței" ecuațiile diferențiale care descriu fenomenul sînt nedeterminate din punct de vedere matematic, iar aproximațiile adoptate au condus decît la rezultate parțiale pentru condiții simple de curgere [1], [2].

Pînă în prezent nu se cunoaște o metodă completă de calcul a caracteristicilor mișcării bifazate unidirecționale, cu o sferă mare de aplicabilitate.

La transportul hidraulic al materialelor solide apar modificări de rugozitate și încrustări diferențiate pe conturul secțiunii de curgere, schimbări ale mărimii și formei secțiunii de curgere datorită depunerilor de material solid ș. a. Aceste fenomene nu au fost luate în considerație la metodele de calcul analitice cunoscute.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 311–324

Scopul acestei lucrări îl constituie stabilirea unei metode de calcul a mărimilor globale ale curgerii bifazate unidirecționale (debitele de hidroamestec și de solid transportat, concentrațiile medii în secțiunea de curgere și coeficienții pierderilor de sarcină lineare) pe baza stabilirii inițiale a repartițiilor concentrațiilor și vitezelor în secțiunea de curgere. Se urmărește ca metoda să fie aplicabilă pentru curgerile sub presiune sau cu nivel liber prin secțiuni de o formă oarecare și cu o repartiție oarecare a rugozității pe perimetrul udat, pentru domenii largi de variație a concentrației și ai caracteristicilor particulelor solide transportate.

Pentru determinarea repartiției vitezelor se utilizează principiul variațional a lui Hamilton aplicat mișcării turbulente bifazate, a cărui domeniu de valabilitate se demonstrează, și metoda numerică a elementului finit. Rezolvarea sistemului de ecuații obținut se efectuează pe calculator după un program corespunzător. Relațiile de calcul privind repartiția concentrației în secțiunea de curgere și valorile eforturilor tangențiale se obțin folosind unele corelații experimentale asupra mărimilor hidrodinamice locale. Se prezintă exemplificări de aplicare a metodei de calcul propuse.

2. REPARTIȚIA VITEZELOR ÎN SECȚIUNEA DE CURGERE

La stabilirea vitezelor mediului bifazat în secțiunea de curgere se consideră cunoscute pierderile de sarcină liniare și concentrația în partea inferioară a secțiunii, a cărei valoare este limitată din condiția de nesedimentare.

2.1 APLICAREA PRINCIPIULUI LUI HAMILTON LA MIȘCAREA TURBULENTĂ A FLUIDELOR BIFAZATE

Principiile variaționale au mai fost utilizate în domeniul transportului hidraulic al materialelor solide de Wilson [3] pentru stabilirea vitezei critice de începere a depunerii. Alte aplicații privind calculul variațional precum și metoda elementului finit nu se cunosc în acest domeniu.

Principiul lui Hamilton pentru curgerea unui fluid se poate exprima sub forma

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T + \delta U) \cdot \mathrm{d}t = 0, \tag{1}$$

unde t reprezintă timpul;

δT — variația energiei cinetice virtuale la o deplasare virtuală;

δU — lucrul mecanic virtual.

Helmholtz ,[4] a stabilit valabilitatea principiului lui Hamilton pentru cazul curgerii staționare în regim laminar a unui fluid vîscos incompresibil și omogen.

În continuare, se demonstrează posibilitatea aplicării principiului lui Hamiton în cazul curgerii turbulente a fluidelor bifazate și se stabilesc ipotezele de aplicare. Condiția necesară este ca la o mișcare suplimentară dată fluidului să crească disiparea energiei cinetice.

Pentru a putea considera fluidul bifazat drept un mediu continuu se adoptă ipoteza de calcul a unui „fluid echivalent" omogen avînd proprietățile hidrodinamice (densitatea, vîscozitatea, coeficientul de difuzie

turbulentă etc.) egale cu ale fluidului bifazat. Această ipoteză este acceptabilă cînd dimensiunile particulelor solide sînt reduse, mai mici decît lungimea de amestec.

Se consideră mișcarea fluidului echivalent în interiorul unei suprafețe închise Σ, pe care componentele vitezelor sînt date. În volumul V din interiorul suprafeței se iau două distribuții ale vitezelor fluidului echivalent : u, v, w, și $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$.

Variația energiei cinetice pe unitatea de timp pentru mișcarea inițială (caracterizată prin u, v, w) este

$$\delta T_1 = \frac{1}{2} \iiint_V \Phi_1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \tag{2}$$

unde $dx \cdot dy \cdot dz$ reprezintă volumul elementar ;

Φ_1 — variația energiei cinetice pe unitatea de volum și de timp pentru mișcarea caracterzată prin u, v și w.

Funcția Φ_1 (x, y, z) are expresia :

$$\Phi_1 = \tau_{xx} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} +$$

$$+ \tau_{yz} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right). \tag{3}$$

În ipoteza unui fluid bifazat incompresibil (fluid echivalent incompresibil) expresiile eforturilor tangențiale sînt :

$$\tau_{xx} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\mu_a \cdot \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial x}(1 - c) + 2f_s \cdot \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} \cdot c - \rho_a \cdot (1 - c) \cdot \overline{u_a^t u_a^t} -$$

$$- \rho_s \cdot c \cdot \overline{u_s^t u_s^t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2(\mu_{ap} + \rho \cdot \varepsilon) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \tag{4}$$

unde

$$\mu_{ap} = \frac{\mu_a \dfrac{\partial \bar{u}_a}{\partial x} \cdot (1 - c) + f_s \cdot \dfrac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} \cdot c}{\partial \bar{u} / \partial x}, \tag{5}$$

$$\rho \cdot \varepsilon = -\frac{\rho_a (1 - c) \cdot \overline{u_a^t u_a^t} + \rho_s \cdot c \cdot \overline{u_s^t u_s^t}}{\partial \bar{u} / \partial x}, \tag{6}$$

μ_{ap}, μ_a reprezintă vîscozitatea aparentă a fluidului bifazat, respectiv a apei ;

f_s — coeficientul de frecare între particulele solide ;

ε — coeficientul de difuzie turbulentă a fluidului echivalent.

$$\tau_{yz} = \mu_a \left(\frac{\partial \bar{w}_a}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial z} \right)(1 - c) + f_s \left(\frac{\partial \bar{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial z} \right) \cdot c - \rho_a (1 - c) \cdot \overline{v_a^t w_a^t} -$$

$$- \rho_s \cdot c \cdot \overline{v_s^t w_s^t} = \mu_{ap} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \rho \cdot \overline{v^t w^t}. \tag{7}$$

Expresii similare (4) și (7) se obțin și pentru τ_{yy}, τ_{zz}, τ_{zx} și τ_{xy}. Pentru mișcarea cu distribuția vitezelor $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, variația energiei cinetice pe unitatea de volum și de timp are expresia :

$$\Phi_2 = (\tau_{xx} + \tau'_{xx})\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x}\right) + (\tau_{yy} + \tau'_{yy})\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y}\right) +$$

$$+ (\tau_{zz} + \tau'_{zz})\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z}\right) + 2(\tau_{yz} + \tau'_{yz})\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial z}\right)\right] \qquad (8)$$

$$+ 2(\ldots.)[\ldots.] + 2(\ldots.)[\ldots.].$$

În cazul fluidelor incompresibile rezultă

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi'_1 + 2E, \qquad (9)$$

unde

$$E = \tau_{xx}\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} + \tau_{yz}\left(\frac{\partial \bar{w}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial z}\right) +$$

$$+ \tau_{zx}\left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial x}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y}\right) \qquad (10)$$

și Φ'_1 are o expresie analoagă expresiei Φ_1 din relația (3).

Variația energiei cinetice pe întreg volumul V în unitatea de timp devine

$$\delta T_2 = \frac{1}{2}\iiint_V \Phi_1 \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \frac{1}{2}\iiint_V \Phi'_1 \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \iiint_V E \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z. \qquad (11)$$

Ultima integrală din relația (11) se integrează prin părți. Întrucît u', v' și w' sînt nule pe suprafața Σ, rezultă următoarea expersie a integralei :

$$\iiint_V E \cdot \mathrm{d}x \cdot dy \cdot \mathrm{d}z =$$

$$= -\iiint_V \left[\bar{u}'\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + \bar{v}'(\ldots) + \bar{w}'(\ldots.)\right] \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z. \qquad (12)$$

Folosind ecuațiile de mișcare ale fluidului echivalent sub forma

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho\left(f_x - \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}\right), \qquad (13)$$

şi înlocuind în relaţia (12), se obţine

$$\iiint_V E\,dx\cdot dy\cdot dz = -\iiint_V \left[\bar{u}'\cdot\rho\cdot\left(f_x-\frac{d\bar{u}}{dt}\right)+\bar{v}'\cdot\rho\cdot\left(f_y-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)+\right.$$

$$\left.+\,\bar{w}'\cdot\rho\left(f_z-\frac{d\bar{w}}{dt}\right)\right]\cdot dx\cdot dx\cdot dz. \tag{14}$$

Integrala (14) devine nulă în următoarele ipoteze :

— termenii inerţiali sînt neglijabili :

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\bar{w}}{dt}=0, \tag{15}$$

— fluidul este incompresibil, ceea ce conduce la următoarea ecuaţie de continuitate :

$$\frac{\partial\bar{u}'}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}'}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}'}{\partial z}=0, \tag{16}$$

— forţele masice exterioare derivă dintr-un potenţial :

$$f_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad f_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad f_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{17}$$

Cu aceste ipoteze relaţia (11) devine :

$$\delta T_2=\delta T_1+\delta T_1', \tag{18}$$

în care

$$\delta T_1'=\frac{1}{2}\iiint_V \Phi_1'\cdot dx\cdot dy\cdot dz>0. \tag{19}$$

Rezultă că în cazul unei mişcări suplimentare, caracterizată prin distribuţia vitezelor u', v' şi w', respectînd ipotezele date, disiparea energiei creşte şi deci se poate aplica principiul lui Hamilton.

Deci se poate formula următoarea *teoremă* : *În mişcarea turbulentă staţionară a unui fluid bifazat, dacă acesta poate fi înlocuit cu un fluid incompresibil echivalent, dacă se neglijează termenii inerţiali şi se consideră că forţele exterioare derivă dintr-un potenţial, disiparea de energie în orice volum este mai mică decît în orice altă mişcare cu caracter turbulent care are aceeaşi distribuţie a vitezelor pe frontiera volumului considerat.*

Pe baza acestei teoreme vom aplica relaţia (1) pentru mişcarea turbulentă unidirecţională şi staţionară a unui fluid bifazat lichid-particule solide.

Se consideră un volum de fluid aflat în interiorul tubului de curent pe o lungime egală cu unitatea ($\Delta z = 1$). Disiparea energiei pe unitatea de timp are expresia ($u = v = 0$; $w \neq 0$) :

$$\delta T=\frac{1}{2}\iint(\rho\cdot\varepsilon+\mu_{ap})\left[\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)^2\right]\cdot dx\cdot dy. \tag{20}$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare pentru deplasarea fluidului este

$$\delta U = \iint_{\Omega} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cdot \bar{w} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y, \tag{21}$$

în care $\partial \bar{p}/\partial z$ se admite constant în secţiunea tubului de curent. În cazul unor valori ridicate a mărimilor hidraulice a particulelor solide sau a unor curenţi secundari intenşi, cînd $\partial p/\partial z$ nu se mai poate admite constant, se vor efectua iteraţii în cadrul metodei elementului finit obţinîndu-se astfel aproximaţii superioare ale soluţiilor (metoda Galerkin).

Conform teoremei enunţate, distribuţia vitezelor $\bar{w}(x, y)$ trebuie să minimalizeze funcţionala

$$\delta T + \delta U = \chi = \iint_{\Omega} \left\{ (\rho \varepsilon + \mu_{ap}) \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cdot \bar{w} \right\} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y. \tag{22}$$

2.2 METODA NUMERICĂ A ELEMENTULUI FINIT PENTRU CURGEREA ÎN CONDUCTE

Pentru stabilirea numerică a distribuţiei vitezelor, care satisface condiţia de minimalizare a funcţionalei χ, se utilizează metoda elementului finit. Această metodă a cunoscut o dezvoltare rapidă în tehnică [5], în special în ultimii zece ani.

La aplicarea metodei numerice a elementului finit se împarte volumul de fluid considerat în elemente de volum cilindrice, care sînt delimitate în secţiunea transversală a tubului de curent (respectiv a conductei) de o reţea adecvat construită (fig. 1). Reţeaua este formată din triunghiuri

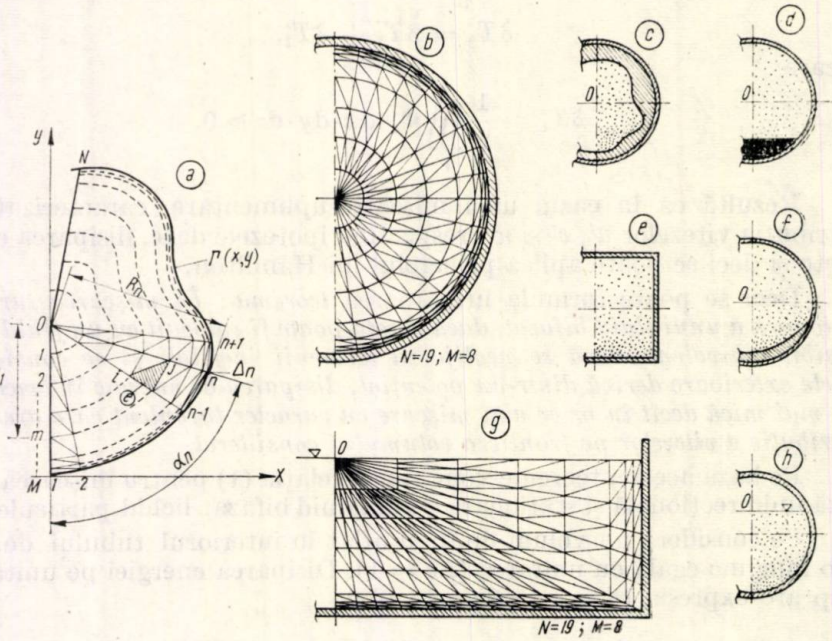


Fig. 1. — Împărţirea secţiunii de curgere în elemente de calcul *a* — cazul general; *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* — exemplificări.

elementare definite de punctele aflate la intersecţia între N raze polare şi M linii frînte construite prin omotetie cu conturul secţiunii de curgere în raport cu polul O ales. Fiecare rază polară este definită prin valoarea absolută R_n a razei şi înclinarea acesteia α_n în coordonatele polare alese, iar fiecare contur omotetic este definit printr-un coeficient α_m. Reţeaua este astfel concepută încît să fie aplicabilă pentru o secţiune de curgere oarecare. În algoritmul de calcul prezentat în continuare s-a considerat secţiunea simetrică, care asigură un grad suficient de generalitate pentru aplicaţii. Polul O se află pe axa de simetrie, iar dacă curgerea este cu nivel liber, la intersecţia suprafeţei nivelului liber cu aceasta.

Corespunzător fiecărui triunghi elementar e ($i - j - k$ din fig. 1) se formulează expresiile funcţionalei χ^e în funcţie de vitezele fluidului în nodurile reţelei.

În interiorul unui triunghi elementar ($i - j - k$) valoarea vitezei este definită de o funcţie liniară în raport cu x şi y :

$$w^e = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\omega^e} \cdot w_i + \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\omega^e} w_j + \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\omega^e} w_k, \tag{23}$$

unde

$$\begin{cases} a_i = x_k \cdot y_j - x_j \cdot y_k, \\ b_i = y_k - y_j, \\ c_i = x_j - x_k, \end{cases} \tag{24}$$

$$w^e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}. \tag{25}$$

În lungul liniilor care unesc două noduri, viteza are o variaţie liniară, indiferent faţă de care din elementele vecine este calculată. In acest mod se asigură continuitatea funcţiei w necesară procedurii variaţionale adoptate.

Se adoptă, de asemenea, ipoteza că în interiorul fiecărui triunghi elementar concentraţia fazei solide, densitatea şi viscozitatea aparentă au o variaţie liniară.

Efectuînd derivata unei funcţionale χ^e definite pe un triunghi elementar e în funcţie de viteza într-unul din vîrfurile triunghiului w_i se obţine relaţia

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \chi^e}{\partial w_i} = \frac{\rho^e \varepsilon^e + \mu^e_{ap}}{4w^e} [(b_i b_i + c_i c_i) \cdot w_i + (b_j b_i + c_j c_i) \cdot w_j + (b_k b_i + c_k c_i) w_k] - \frac{\omega^e}{3}\frac{\partial p^e}{\partial z}. \tag{26}$$

Introducem notaţia

$$s^e_{i,j} = \frac{\rho^e \varepsilon^e + \mu^e_{ap}}{4\omega^e} (b_j b_i + c_j c_i). \tag{27}$$

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848 BUDAPEST

Ecuațiile de minimalizare a funcționalei χ se obțin punînd condițiile

$$\frac{\partial \chi}{\partial w_i} = 0. \tag{28}$$

La derivata funcționalei χ în raport cu w_i se iau contribuțiile tuturor elementelor, respectiv ale elementelor care au vîrful în punctul i :

$$\sum_{t=1}^{I} w_t \sum_{e=1}^{E} s^e_{i,t} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial p^e}{\partial z} \cdot \frac{w^e}{3} \; ; \qquad i = 1, 2 \ldots I. \tag{29}$$

Prima sumă este luată după toate punctele triunghiurilor elementare adiacente punctului i, iar următoarele două după toate triunghiurile adiacente punctului i. Într-un punct oarecare din interiorul domeniului de calcul, ecuația (29) este

$$w_i \sum_{e=1}^{6} s^e_{i,j} + w_{i-1} \sum_{e=1}^{2} s^e_{i,i-1} + w_{i-N-1} \sum_{e=1}^{2} s^e_{i,i-N-1} +$$

$$+ w_{i-N} \sum_{e=1}^{2} s^e_{i,i-N} + w_{i+1} \sum_{e=1}^{2} s^e_{i,i+1} + w_{i+N+1} \sum_{e=1}^{2} s^e_{i,i+N+1} +$$

$$+ w_{i+N} \sum_{e=1}^{2} s^e_{i,i+N} = \frac{1}{3} \sum_{e=1}^{6} \frac{\partial p^e}{\partial z} w^e \; ; \qquad i = 1,2, \ldots I, \tag{30}$$

în care indicele e se referă la triunghiurile elementare ce conțin punctele cu numerotarea de la indicele funcției s. Se obțin astfel I ecuații liniare cu tot atîtea necunoscute w_i rezolvabile pe calculatoarele numerice.

2.3 CONDIȚIILE DE LIMITĂ

Condițiile de limită ale domeniului de calcul pot fi date prin valorile vitezelor sau ale gradienților vitezelor în nodurile rețelei. Valorile vitezelor se înlocuiesc direct în ecuațiile (30) ale punctelor învecinate. Cînd sînt dați gradienții vitezelor, vitezele din nodurile marginale ale rețelei se exprimă în funcție de vitezele din punctele învecinate.

Condițiile de limită pot fi de trei feluri :

— la contactul peretelui conductei :

$$w = 0, \tag{31}$$

— pe o axă de simetrie sau la suprafața nivelului liber neglijînd frecarea între fluid și aer :

$$\mathrm{d}w/\mathrm{d}n = 0, \tag{32}$$

— după o curbă oarecare în interiorul domeniului de curgere sau la contactul cu alt fluid în mișcare :

$$\mathrm{d}w/\mathrm{d}n = f(L). \tag{33}$$

Lîngă peretele conductei gradienții vitezei sînt mult mai mari decît în restul domeniului de curgere și utilizarea condiției la limită (31) ar necesita îndesirea substanțială a rețelei de calcul și deci complicarea sistemului de ecuații. Pentru a evita acest impediment se vor calcula vitezele în nodurile situate la marginea domeniului, utilizînd valorile efortului tangențial la perete. Valoarea efortului tangențial se stabilește în funcție de gradientul de presiune din conductă. Din acest efort tangențial total τ_0 se scade componenta necesară pentru învingerea frecărilor particulelor solide de peretele conductei τ_f :

$$\tau_0' = \tau_0 - \tau_f, \tag{34}$$

unde

$$\tau_0 = R_h \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{35}$$

$$\tau_f = f \cdot (\gamma_s - \gamma_a) \cdot d \cdot c, \tag{36}$$

în care f reprezintă coeficientul de frecare între particulele solide și peretele conductei ; R_h — raza hidraulică ; iar d — dimensiunea particulelor solide.

În urma prelucrării unor rezultate experimentale cunoscute [6], [7] și considerînd pe distanța de variație rapidă a vitezei lîngă perete concentrația constantă, se adoptă pentru distribuția vitezei lîngă peretele conductei expresia

$$w_G = \sqrt{\frac{\tau_0'}{\rho}} \left[5{,}75 \lg \frac{y}{\Delta} - 5{,}75 \lg \left(1 + \frac{3{,}3\, \mu_{ap}}{\Delta \sqrt{\tau_0' \cdot \rho}} \right) + B_t \right], \tag{37}$$

în care B_t este recomandat în literatură între valorile 8,3 și 8,5. Valoarea care conduce la o concordanță mai bună cu datele experimentale o vom stabili pentru cazul apei prin testare și comparație cu diagrama lui Moody [7].

În cazul curgerii fluidelor omogene prin conducte circulare efortul tangențial este uniform repartizat pe circumferința secțiunii de curgere. Pentru a analiza influența mișcării bifazate se vor calcula variațiile eforturilor tangențiale față de valoarea medie pe perimetrul secțiunii conductei, variațiile fiind datorate structurii de curgere. Inițial, se aproximează valoarea efortului tangențial într-un punct egală cu valoarea medie în secțiune. Apoi se calculează efortul tangențial prin aproximații succesive cu relația

$$\tau_0^{(k)} = \tau_0^{(k-1)} + \Delta \tau_0^{(k-1)} - \delta \tau_0^{(k-1)}, \tag{38}$$

unde k reprezintă numărul aproximației ;

$$\Delta \tau_0^{(k-1)} = \frac{w^{(k-1)} - w_G^{(k-1)}}{(\mathrm{d}w_G/\mathrm{d}\tau_0)^{(k-1)}}, \tag{39}$$

$$\delta \tau_0^{(k-1)} = \sum_{m-1}^{M} \Delta \tau_0^{(k-1)} / M, \tag{40}$$

w, w_G — fiind calculate cu sistemul (30) și, respectiv cu relația (37).

3. DISTRIBUȚIA CONCENTRAȚIEI ÎN SECȚIUNEA DE CURGERE

În continuare se stabilește o relație analitică pentru calculul distribuției concentrației, aplicabilă și pentru concentrații sporite, în funcție de concentrația fazei solide pe partea inferioară a secțiunii de curgere.

Pe baza datelor experimentale obținute de diferiți autori [8], valoarea concentrației particulelor solide nu variază pe aceeași orizontală a secțiunii de curgere, în cazul absenței curenților transversali. Ecuația diferențială cunoscută a repartiției concentrației după verticală în regim staționar este

$$-v_{sed,c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_{s,c}\frac{\partial c}{\partial y}\right)=0, \tag{41}$$

unde $v_{sed,c}$ reprezintă mărimea hidraulică a particulelor solide aflate într-un hidroamestec cu concentrația c;

$\varepsilon_{s,c}$ — coeficientul de difuzie turbulentă a particulelor solide aflate în concentrația c.

Influența concentrației asupra mărimilor $v_{sed,c}$ și $\varepsilon_{s,c}$ o vom estima utilizînd următoarele corelații experimentale [6]:

$$v_{sed,c}=a\cdot v_{sed,0}\cdot\left(1-\frac{c}{c_M}\right)^2;\qquad a\lesssim 1, \tag{42}$$

$$\varepsilon_{s,c}=\varepsilon_{a,c}\cdot\left(1-\frac{c}{c_M}\right), \tag{43}$$

unde a reprezintă un coeficient experimental, iar c_M — concentrația volumică maximă a fazei solide.

Întrucît la concentrații foarte mici distribuția concentrației este exponențială [8], se admite coeficientul de difuzie $\varepsilon_{s,0}$ constant pe verticala secțiunii de curgere,

$$\varepsilon_{s,0}=v_{*0}\cdot A/15{,}4, \tag{44}$$

unde A este raza cercului înscris circumferinței secțiunii de curgere.

Se înlocuiesc (42) și (43) în ecuația (41), se separă variabilele și se integrează:

$$-\frac{v_{sed,0}}{\varepsilon_{s,0}}\int_0^y \mathrm{d}y=\frac{c_M}{a}\int_{c_0}^{c}\frac{\mathrm{d}c}{c\cdot c_M-c^2}, \tag{45}$$

unde c_0 reprezintă concentrația în partea inferioară a conductei. Efectuînd integrarea (45) și ținînd seama de (44) rezultă

$$c(y)=\frac{c_0}{\dfrac{c_0}{c_M}+\left(1-\dfrac{c_0}{c_M}\right)\cdot \mathrm{e}^{15{,}4\cdot v_{sed,0}\cdot y/A\cdot v_{*0}}}. \tag{46}$$

Această relație de calcul se încadrează bine în rezultatele experimentale cunoscute [1], [8], la concentrații mici coincizînd cu relația exponențială clasică. Repartiția concentrațiilor calculată cu relația (46) s-a verificat în laborator prin măsurători efectuate cu o sondă izocinetică în conducte circulare și pătrate (ex. fig. 2).

4. COEFICIENTUL DINAMIC DE TRANSFER LA CURGEREA BIFAZATĂ

Coeficientul dinamic de transfer are o componentă datorită difuziei turbulente bifazate și o componentă datorită vîscozității aparente a hidroamestecului. Expresia de calcul adoptată pentru conducte pe baza datelor experimentale [9] — [12] și a testărilor de calcul efectuate este

$$K = \rho \cdot k_1 \cdot v_{*0} \cdot l \cdot \left(2 - \frac{l}{A}\right)\left[\left(\frac{l}{A} - 1\right)^2 + \frac{k_2}{k_1}\right] \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 + \mu_a \frac{e^{2{,}5c - nc/c_M}}{(1 - c/c_M)^n}, \quad (47)$$

în care l reprezintă cea mai mică distanță de la un punct considerat pînă la peretele conductei;

A — raza cercului înscris secțiunii de curgere;

$k_1 = 0{,}146$; $k_2 = 0{,}7$ — coeficienți semiempirici;

$\beta_1 = 1 - e^{-\frac{v_{*0} \cdot d \cdot \rho}{3 \mu_{ap}}}$ — coeficient de atenuare lîngă perete;

$\beta_2 = 1 - \frac{c}{c_M}$ — influența particulelor solide;

n — coeficient experimental în funcție de materialul granular; pentru nisipul testat $n = 2$.

5. TESTĂRI ASUPRA PROGRAMULUI DE CALCUL. EXEMPLE DE UTILIZARE

Programul de calcul elaborat în limbajul Fortran IV are drept obiectiv determinarea concentrațiilor, a vitezelor și a celorlalte caracteristici hidrodinamice în punctele rețelei de calcul dintr-o secțiune de curgere dată și de a stabili caracteristicile globale ale curgerii în întreaga secțiune. Relațiile de calcul a caracteristicilor globale principale sînt:

— debitul de hidroamestec:

$$Q_h = \sum_{e=1}^{E} \omega^e \cdot w^e; \qquad w^e = \frac{w_i + w_j + w_k}{3}, \quad (48)$$

unde w_i, w_j și w_k reprezintă valorile vitezelor în vîrfurile unui triunghi elementar,

— debitul de material solid:

$$Q_s = \sum_{e=1}^{E} \omega^e \cdot w^e \cdot c^e; \qquad c^e = \frac{c_i + c_j + c_k}{3}, \quad (49)$$

— coeficientul piederilor de sarcină liniare la hidrotransport:

$$\lambda = 8(v_{*0}/w_{med})^2, \tag{50}$$

— concentrația spațială medie în conductă:

$$c^s_{med} = \sum_{e=1}^{E} \omega^e \cdot c^e \Big/ \sum_{e=1}^{E} \omega^e, \tag{51}$$

— concentrația de debit medie:

$$c^q_{med} = \sum_{e=1}^{E} \omega^e \cdot c^e \cdot w^e \Big/ \sum_{e=1}^{E} \omega^e \cdot w^e. \tag{52}$$

S-au efectuat testări asupra programului în vederea stabilirii caracteristicilor rețelei de calcul, a expresiei coeficientului de difuzie turbulentă și a valorii coeficientului B_t din relația (37).

La testările efectuate pentru diferite regimuri de curgere prin conducte, punînd condiția ca precizia de calcul a debitului să fie sub 0,15 %, au rezultat pentru o secțiune simetrică (fig. 1 *b*) următoarele caracteristici ale rețelei:

— rețeaua este definită de 19 raze polare și de 7 linii frînte construite prin omotetie cu conturul secțiunii de curgere;

— razele polare formează între ele unghiuri variind între 8° și 12° astfel că extremitățile lor să descrie cît mai fidel conturul secțiunii de curgere. La unghiuri variind între 1° și 15° precizia de calcul se păstrează sub 1,5 %;

— liniile frînte se află în următoarele raporturi omotetice față de conturul secțiunii de curgere:

Linia	1	2	3	4	5	6	7	Conturul secțiunii
Raportul de omotetie	0,18	0,36	0,54	0,72	0,90	0,93	0,96	1

În urma testărilor au rezultat indicate pentru coeficienții k_1 și k_2 din relația (47) valorile date în paragraful 4, iar pentru coeficientul B_t din relația (37) valoarea $B_t = 8{,}3$.

In figura 2 sînt trasate distribuțiile calculate cu metoda propusă ale vitezelor și concentrațiilor din secțiunea de curgere, în comparație cu rezultatele experimentale obținute pe un stand de laborator la hidrotransportul unui sort de nisip ($d_m = 0{,}36$ mm; $\gamma_s = 2{,}65$ gr/cm ^{3}) prin conducte D 100 mm. Măsurătorile s-au efectuat cu o sondă izocinetică (fig. 3). Rezultatele obținute prin calcul și experimental se aproximează bine.

Distribuția vitezelor, calculate cu noua metodă, în cazul curgerii turbulente a apei printr-o conducă D_n 100 mm avînd rugozitatea (Δ) variabilă pe contur este reprezentată în figura 4. Variația rugozității pe conturul secțiunii de curgere este provocată la conductele de hidrotransport

în special de efectul diferenţiat pe contur al hidroabraziunii, al formării crustelor sau depunerilor. Se observă asimetria repartiţiei vitezelor în secţiunea de curgere (fig. 4).

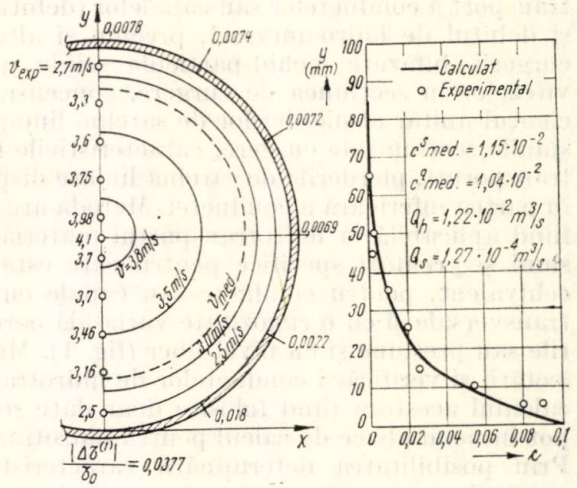


Fig. 2. — Distribuţiile vitezei şi concentraţiei într-o conductă circulară la hidrotransportul unui sort de nisip

Se remarcă, că în cele două exemple prezentate (fig. 2 — curgerea turbulentă a unui fluid bifazat printr-o conductă circulară; fig. 4 — curgerea turbulentă a unui fluid omogen printr-o circulară avînd rugozi-

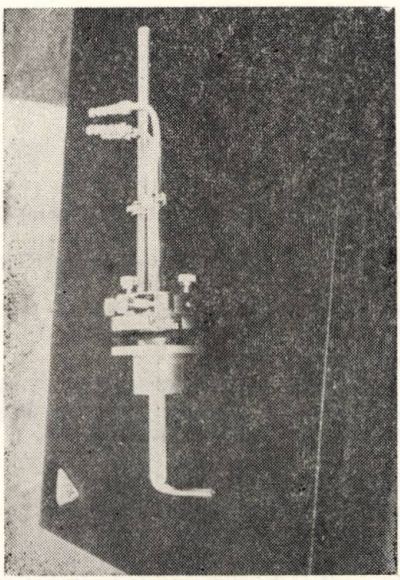


Fig. 3 — Sonda izocinetică.

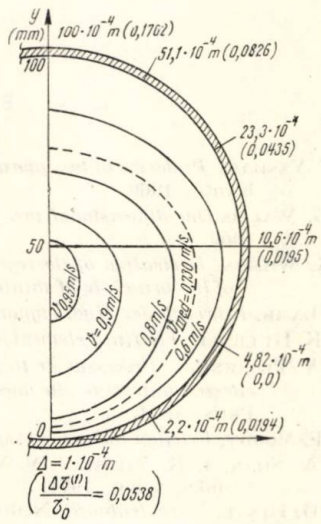


Fig. 4. — Distribuţia vitezei într-o conductă cu rugozitate variabilă pe contur.

tatea variabilă pe contur), s-a pus în evidenţă prin calcul necesitatea apariţiei unor curenţi secundari transversali determinaţi de tendinţa de distribuire neuniformă a eforturilor tangenţiale pe contur ($\Delta\tau_0^{(1)}/\tau_0 \neq 0$).

6. DOMENIUL DE APLICARE

Metoda de calcul prezentată permite stabilirea capacității de hidrotransport a conductelor sau canalelor (debitul de material solid transportat și debitul de hidroamestec), precum și altor caracteristici principale ale curgerii bifazate lichid-particule solide (repartiția concentrațiilor și a vitezelor în secțiunea de curgere, concentrațiile medii în secțiune, coeficientul unitar al pierderilor de sarcină liniare). Datele inițiale sînt dimensiunile secțiunii de curgere, caracteristicile fizice ale materialului solid de transportat, pierderile de sarcină liniare disponibile și concentrația admisă în partea inferioară a conductei. Metoda are un grad ridicat de generalitate fiind aplicabilă la hidrotransportul materialelor solide cu diferite dimensiuni și greutăți specifice pentru care este acceptabilă ipoteza fluidului echivalent, pentru conducte sau canale cu o formă oarecare a secțiunii transversale și cu o rugozitate variabilă oarecare pe contur, pentru curgerile sau presiune și cu nivel liber (fig. 1). Metoda este utilă în special proiectării și verificării conductelor de hidrotransport, pînă în prezent pentru calculul acestora fiind folosite doar date semiempirice. În acest cadru se pot întocmi abace de calcul pentru hidrotransportul unor materiale solide. Prin posibilitatea determinării caracteristicilor de curgere în condiții particulare, așa cum sînt, spre exemplu, conductele cu încrustări neuniforme pe contur sau cu protecții antiabrazive în partea inferioară a secțiunii de curgere, metoda propusă permite aprecierea prin calcul a unor situații apărute în exploatare și a unor soluții tehnice noi.

Primită la redacție la 11 decembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. O. F. Vasiliev *Problems of two-phase flow theory*, 30th Congress A. I. R. H., General Lecture, Kyoto, 1969.
2. B. G. Wallis *One-dimensional two-phase flow*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
3. C. K. Wilson, *Derivation of the regime equations from relationship for pressurized flow by use of the principle of minimum energy-degradation rate*, Kingston, 1965 (Dizertație).
4. H. Lamb, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, Leipzig, 1907.
5. H. K. Huebner, *The finite element method for engineers*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
6. M. V. Peckenkin, *Processus de transfert dans un écoulement turbulent biphasique et profil de vitesses universal du mélange solide — liquide*, Proc. 12th Congres A. I. R. H., Paris, 1971.
7. L. F. Moody, *Friction factors*, Trans. A. S. M. E., nr. 11, (1944).
8. N. A. Silin, I. K. Vitoșkin, V. M. Karasik, V. F. Ocerenko, *Ghidrotransport*, Naukova Dumka, Kiev, 1971.
9. H. O. Hințe, *Turbulentnosti*, Nedra, Moscova, 1963.
10. M. V. Peckenkin, *Experimental studies of flows with high solid particle concentration*, Proc. 13th Congress A. I. R. H., Tokio 1972.
11. J. Nikuradze, *Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, Forschungsheft, *356*, (1932).
12. J. J. Vocadlo, M. E. Charles, *Prediction of pressure gradient for the horizontal turbulent flow of slurries*, Proc. Hydrotransport 2 Conference, Paper, C 1, B.H.R.A., Cranfield, 1972.

ASUPRA NOȚIUNII DE PERMEABILITATE A UNEI FISURI DESCHISE ÎNTR-UN ZĂCĂMÎNT PETROLIFER

de ALEXANDRU D. STAN

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare sînt analizați factorii care pot modifica permeabilitatea unei fisuri dintr-un zăcămînt petrolifer, față de valoarea ce rezultă din formula utilizată în prezent. Factorii care conduc la micșorarea permeabilității depind de caracterul permanent sau nepermanent al mișcării, de rugozitatea pereților fisurii, de raportul dintre dimensiunile transversale ale acesteia, de gradul de umplere a fisurii cu material de susținere precum și de posibilitatea ca fluidul ce curge prin fisură să nu fie newtonian. Toate aceste situații posibile sînt examinate în lucrare din punct de vedere cantitativ, în cadrul regimului laminar, stabilindu-se pentru fiecare în parte micșorarea corespunzătoare a permeabilității față de valoarea ce rezultă din formula cunoscută din literatura de specialitate.

1. INTRODUCERE

Noțiunea de permeabilitate a unei fisuri a fost introdusă de M. Muskat [3], formula propusă pentru calculul acesteia fiind

$$k = \frac{h^2}{12}, \tag{1}$$

în care h reprezintă deschiderea fisurii.

Această expresie a fost obținută din bine cunoscuta soluție a ecuațiilor Navier-Stokes pentru mișcarea laminară și permanentă a unui fluid incompresibil între două plane paralele, fixe și de lățime infinită. Reamintim că în această mișcare, căderea de presiune are expresia

$$p_1 - p_2 = \frac{12\mu V_m l}{h^2}, \tag{2}$$

h fiind distanța între plane, l distanța dintre secțiunile între care se măsoară căderea de presiune, V_m viteza medie și μ viscozitatea fluidului. Compararea cu legea lui Darcy, conduce la expresia (1) pentru permeabilitatea unei fisuri în care mișcarea este asimilată cu aceea pentru care se obține formula (2) a căderii de presiune.

Valoarea permeabilității obținută din (1) poate fi considerată corectă dacă mișcarea fluidului, presupus newtonian, se produce conform ipotezelor admise. De cele mai multe ori însă, fisurile reale nu au pereții netezi, lățimea

lor nu poate fi considerată infinită, iar în interiorul lor există un agent de susținere. De asemenea, mișcarea poate avea un caracter nepermanent, iar fluidul care curge prin fisură nu este în mod necesar newtonian. Datorită tuturor acestor circumstanțe, permeabilitatea efectivă a unei fisuri diferă de aceea calculată cu ajutorul formulei (1).

În cele ce urmează, vom arăta cum se modifică permeabilitatea unei fisuri, în fiecare în parte dintre situațiile pe care le-am menționat, presupunînd că mișcarea fluidului se efectuează în regim laminar.

2. MODIFICAREA PERMEABILITĂȚII UNEI FISURI

Pentru a ușura tratarea problemei, vom utiliza pentru căderea de presiune expresia cunoscută :

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_m^2}{2} \frac{l}{2R_h} \lambda, \tag{3}$$

în care ρ este masa specifică a fluidului, λ coeficientul de rezistență, iar raza hidraulică R_h are definiția

$$R_h = \frac{2 \times \text{aria secțiunii curentului}}{\text{perimetrul muiat}}, \tag{4}$$

Am adoptat pentru raza hidraulică această definiție puțin diferită de cea uzuală, pentru ca în cazul secțiunii circulare această rază să coincidă cu aceea a cercului, iar în cazul unei fisuri cu lățimea infinită să fie chiar deschiderea acestuia.

De asemenea, numărul lui Reynolds al mișcării este definit prin relația

$$\mathcal{R}e = \frac{2R_h V_m}{\nu}, \tag{5}$$

ν fiind viscozitatea cinematică a fluidului.

Dacă se compară formulele (2) și (3) și se ține seama de definiția precedentă a numărului lui Reynolds precum și de expresia permeabilității fisurii (1), rezultă o nouă expresie pentru aceasta din urmă și anume

$$k = \frac{8R_h^2}{\lambda \mathcal{R}e}$$

Evident, expresiile (1) și (6) sînt echivalente, dar ultima dintre ele prezintă avantajul de a conține mărimi care depind de tipul de fisură de caracterul fluidului. De asemenea, formula (6) este utilizabilă și pentru o eventuală extindere a acestor considerații la cazul regimului turbulent de mișcare. Prin urmare, formula (6) poate fi generalizată în sensul urmărit în prezenta lucrare, fapt care nu este posibil dacă se ia ca punct de plecare formula (1).

Pentru fiecare tip de fisură, respectiv fluid și de mișcare a acestuia, raportul dintre permeabilitatea dată de (6) și aceea a fisurii definite de M. Muskat și dată de (1) va fi un coeficient adimensional. Valoarea acestuia indică raportul dintre debitul de fluid ce curge prin fisura reală și acela corespunzător fisurii definite de M. Muskat.

De exemplu, dacă se presupune că regimurile de curgere sînt identice într-o fisură netedă și într-una rugoasă, pierderile de presiune în acestea vor fi diferite, cea mai mică producîndu-se în fisura cu pereți netezi. La același gradient de presiune, debitele celor două fisuri vor fi diferite, cel mai mare corespunzînd fisurii cu pereți netezi, deoarece fisura cu pereți rugoși are o permeabilitate mai mică decît aceea cu pereți netezi, calculată din relația (1).

În același mod, pot fi introduse și alte abateri ale geometriei fisurii sau ale caracteristicilor fluidului, respectiv ale mișcării, față de fisura definită de M. Muskat în care curge în fluid newtonian, iar mișcarea este permanentă.

Se ajunge astfel la definirea unei permeabilități efective k_e a fisurii, care se poate exprima în funcție de permeabilitatea k dată de formula (1) prin relația

$$k_e = C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 k, \tag{7}$$

unde coeficienții introduși au următoarele semnificații :

C_1 — gradul de abatere al mișcării față de mișcarea permanentă ;
C_2 — efectul rugozității pereților fisurii, raportat la cazul fisurii cu pereți netezi ;
C_3 — efectul secțiunii transversale finite a fisurii, raportat la cazul fisurii cu lățime infinită ;
C_4 — efectul gradului de umplere a fisurii, față de fisura fără agent de susținere ;
C_5 — gradul de abatere a fluidului ce curge prin fisură, față de un fluid newtonian.

Acești coeficienți pot apare toți în același timp în formula (7), în cazul în care sînt prezente toate efectele pe care le reprezintă. Pot exista însă și situații în care numai unele dintre aceste efecte trebuie luate în considerație, coeficienții corespunzători celor care nu intervin fiind egali cu unitatea.

În cele ce urmează, vom căuta să găsim expresiile tuturor acestor coeficienți, pentru a putea determina astfel permeabilitatea efectivă în condițiile pe care le-am precizat.

Calculul coeficientului C_1 se poate efectua ușor dacă ținem seama de expresia căderii de presiune pentru mișcarea nepermanentă (anexa 1), care este

$$p_1 - p_2 = \frac{12 \mu V_m l}{h^2 E}, \tag{8}$$

unde

$$E = \frac{2}{3} - \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 \cdot \frac{\Theta}{\mathcal{R}\ell}} \tag{9}$$

cu

$$\Theta = \frac{2V_m t}{h}, \tag{10}$$

t fiind timpul, iar celelalte notații, cele introduse mai înainte.

Se observă că atunci cînd timpul tinde către infinit, E tinde către $\frac{2}{3}$; deoarece la limită valoarea permeabilității trebuie să coincidă cu aceea corespunzătoare mișcării permanente, rezultă

$$C_1 = \frac{3}{2} E. \tag{11}$$

Dacă ținem seama de formula cunoscută,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \tag{12}$$

constatăm imediat că atunci cînd timpul devine foarte mic, E tinde către zero.

În tabela 1 sînt trecute cîteva valori ale lui C_1, calculate în funcție de Θ și $\mathcal{R}e$, obținute cu ajutorul unui calculator electronic FELIX C-256. Programul a fost astfel întocmit încît suma din expresia (9) a lui E să fie calculată incluzînd toți termenii pînă la aceia care au valoarea egală cu 10^{-16} sau mai mică decît aceasta.

Calculul coeficientului C_2 se efectuează ținîndu-se seama de modul în care coeficientul de rezistență λ depinde de rugozitatea relativă k_s/h a fisurii. Această dependență a fost studiată în literatura de specialitate [2] și apare și în regim laminar (fig. 1) deoarece

Tabela 1

Θ \ $\mathcal{R}e$	250	1250	2250	3250
10^{-4}	$9{,}62 \times 10^{-6}$	$1{,}34 \times 10^{-6}$	$0{,}126 \times 10^{-6}$	$0{,}125 \times 10^{-6}$
10^{-1}	$2{,}4 \times 10^{-3}$	$0{,}484 \times 10^{-3}$	$0{,}276 \times 10^{-3}$	$0{,}193 \times 10^{-3}$
10^{5}	0,999	0,963	0,946	0,922

rugozitățile considerate sînt de fapt macrorugozități care modifică sensibil geometria fisurii.

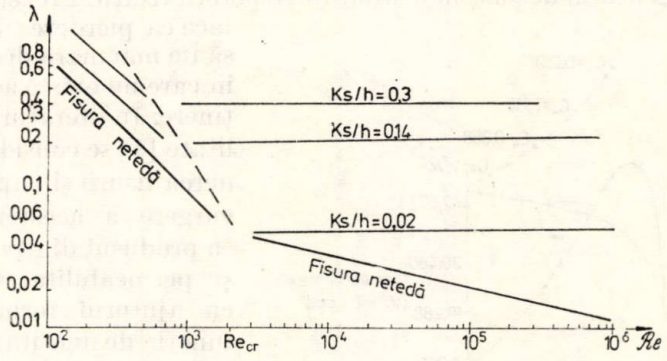


Fig. 1

Pe baza rezultatelor prezentate în figura 1, au fost calculate valorile coeficientului C_2, în funcție de k_s/h, cuprinse în tabela 2.

Coeficientul C_3 exprimă efectul secțiunii transversale finite a fisurii și poate fi calculat dacă se admite că fisura are ca secțiune transversală un dreptunghi cu laturile a și b. După ce se efectuează integrarea ecuațiilor Navier-Stokes pentru acest caz (Anexa 2), se găsește

Tabela 2

$\frac{k_s}{h}$	0	0,14	0,3
C_2	1,000	0,685	0,410

$$C_3 = 1 - 192 \frac{a}{b} S, \tag{13}$$

unde

$$S = \frac{1}{\pi^5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2m+1)\pi b}{2a}. \tag{14}$$

Pentru diferite valori ale raportului $\frac{a}{b}$, suma S a fost determinată cu ajutorul calculatorului FELIX C-256, punîndu-se condiția ca eroarea să nu fie mai mare decît 10^{-12}.

Valorile coeficientului C_3 în funcție de raportul $\frac{a}{b}$ sînt trecute în tabela 3. Se observă că acest coeficient este aproximativ egal cu unitatea atunci cînd lățimea b a fisurii este foarte mare în raport cu deschiderea a.

Tabela 3

a/b	1	0,1	0,01	0,001	0,000001
C_3	0,421729	0,936975	0,993698	0,999370	0,999999

Coeficientul C_4 se calculează conform indicațiilor din literatura de specialitate. După cum am precizat, prin acest coeficient se exprimă efectul existenței agentului de susținere aflat între pereții fisurii. Prezența acestuia face ca pierderea de presiune să fie mai mare decît în cazul în care nu există agent de susținere. În literatura de specialitate [1] se consideră deschiderea fisurii și capacitatea de curgere a acesteia, definită ca produsul dintre deschidere și permeabilitatea calculată cu ajutorul formulei (1) în funcție de densitatea agentului de susținere a fețelor fisurii. Prelucrarea datelor a condus la determinarea coeficientului C_4, a cărui variație este reprezentată în figura 2.

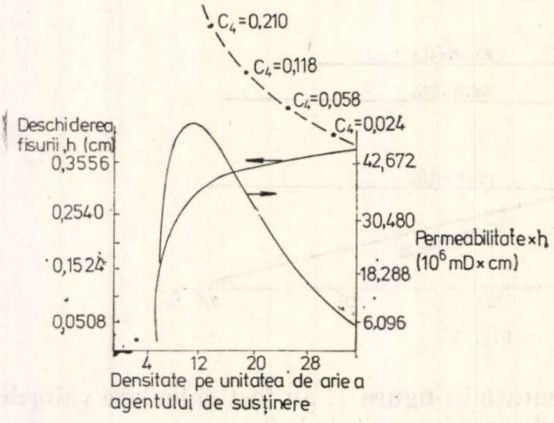


Fig. 2

Coeficientul C_5 se calculează ținîndu-se seama de formula căderii de presiune pentru un fluid nenewtonian. Astfel, dacă se consideră mișcarea între două plane paralele a unui fluid de tip Bingham, căderea de presiune între două secțiuni este [4]

$$p_1 - p_2 = \frac{12 V_m \mu_p l}{h^2 E(\tau)}; \tag{15}$$

unde μ_p este viscozitatea plastică a fluidului, iar

$$E(\tau) = 1 - \frac{3}{2}\tau_D + \frac{1}{2}\tau_D^3, \tag{16}$$

cu

$$\tau_D = \frac{\tau_0}{\tau_W}; \tag{17}$$

τ_0 fiind efortul tangențial inițial, iar τ_W efortul tangențial la peretele fisurii.

Prin comparație cu (2) rezultă că permeabilitatea fisurii prin care curge un fluid de tip Bingham este

$$k = \frac{h^2 E(\tau)}{12} \tag{18}$$

și prin urmare C_5 are expresia

$$C_5 = E(\tau). \tag{19}$$

Cîteva valori ale acestui coeficient în funcție de τ_D sînt trecute în tabela 4.

Tabela 4

τ_D	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
C_5	1	0,7040	0,4320	0,2080	0,0560	0

Se constată că și acest coeficient, pentru un fluid de tip Bingham în mișcare laminară, este subunitar.

3. CONCLUZII

Rezultatele calculelor precedente, referitoare la determinarea coeficienților care afectează valoarea permeabilității unei fisuri, în situațiile precizate, arată că, în toate cazurile, efectul este de același sens. Prin urmare, deoarece în cazurile reale apar cel puțin cîteva din situațiile analizate, permeabilitatea reală a unei fisuri va fi totodeauna mai mică decît aceea calculată cu ajutorul formulei (1).

ANEXA 1

În cazul mișcării laminare nepermanente a unui fluid newtonian între două plane paralele (fig. A 1), repartiția vitezei se găsește prin integrarea ecuației

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{A.1}$$

cu condițiile

$$t = 0, \quad V_x = 0 \quad (z > 0)\text{-} \tag{A.2}$$

respectiv

$$z = \pm w. \quad V_x = 0 \ (t > 0), \tag{A.3}$$

w fiind semi-distanța dintre plane.

Dacă $\overline{V}_x$ este transformata Laplace a lui V_x,

$$\overline{V}_x = \int_0^\infty V_x e^{-st} dt, \tag{A.4}$$

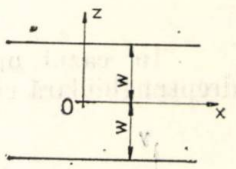


Fig. A.1.

ecuația (A.1) devine

$$\frac{d^2 \overline{V}_x}{dz^2} - \frac{s}{\nu} \overline{V}_x = \frac{1}{\mu s} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{A.5}$$

iar condițiile (A.3) iau forma

$$z = \pm w, \quad \bar{V}_x = 0. \tag{A.6}$$

Se găsește astfel soluția

$$\bar{V}_x(z, s) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\nu}}w - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\nu}}z}{s^2 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\nu}}w}, \tag{A.7}$$

iar originalul are forma

$$V_x(z, t) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}w^2\left[1 - \frac{z^2}{w^2} - 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{z}{w}}{(2n-1)^3\pi^3} e^{-\frac{(2n-1)\pi}{4w^2}\nu t}\right] \tag{A.8}$$

Viteza medie poate fi calculată cu ajutorul formulei

$$V_m = \frac{1}{w}\int_0^w V_x(z, t)\,dz, \tag{A.9}$$

care ne dă

$$V_m = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}w^2\left[\frac{2}{3} - \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} e^{-(2n-1)^2\pi^2\frac{\Theta}{\mathcal{R}e}}\right], \tag{A.10}$$

timpul adimensional Θ fiind definit prin (10), iar numărul lui Reynolds $\mathcal{R}e$, prin (5).

ANEXA 2

În cazul mișcării laminare permanente într-un tub de secțiune dreptunghiulară cu laturile a și b (fig. B.1), ecuația care dă repartiția vitezei este

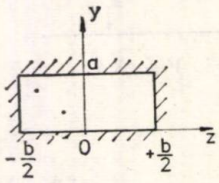


Fig. B.1

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l}, \tag{B.1}$$

iar soluția satisface condițiile

$$y = 0, \quad V_x = 0; \quad y = a, \quad V_x = 0, \tag{B.2}$$

respectiv

$$x = -\frac{b}{2},\ V_x = 0;\quad x = +\frac{b}{2},\ V_x = 0. \tag{B.3}$$

După cum se știe [5], această soluție se poate căuta sub forma

$$V_2(y, z) = V_{x1}(y, z) + V_{x2}(y, z), \tag{B.4}$$

V_{x1} fiind o soluție a ecuației (B.1), iar V_{x2} o funcție armonică.

Pentru satisfacerea condițiilor la limita (B. 2) și (B. 3) trebuie să avem

$$y = 0,\ V_{x1} = V_{x2} = 0;\ y = a,\ V_{x1} = V_{x2} = 0 \tag{B.5}$$

și

$$z = -\frac{b}{2},\ V_{x1} = -V_{x2};\ z = +\frac{b}{2},\ V_{x1} = -V_{x2} \tag{B.6}$$

Pentru V_{x1} se consideră expresia

$$V_{x1} = Ay^2 + By + C, \tag{B.7}$$

iar după determinarea constantelor, rezultă

$$V_{x1} = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} y(y - a). \tag{B.8}$$

În ceea ce privește pe V_{x2}, această funcție are forma

$$V_{x2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{a} y \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a} z} + B_n e^{\frac{n\pi}{a} z} \right) \tag{B.9}$$

sau, după ce se determină constantele,

$$V_{x2} = -\frac{4(p_1-p_2)a^2}{\pi^3 \mu l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \sin\frac{(2m+1)\pi}{a} \operatorname{ch}\frac{(2m+1)\pi}{a} z. \tag{B.10}$$

Pentru a calcula viteza medie, utilizăm formula

$$V_m = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} V_x(y,\ z) dy dz, \tag{B.11}$$

care ne dă

$$V_m = \frac{p_1 - p_2}{12\mu l} a^2 \left(1 - 192 \frac{a}{b} S\right); \tag{B.12}$$

rezultat în care am notat cu S suma

$$S = \frac{1}{\pi^5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2m+1)\pi b}{2a}. \tag{B.13}$$

Primită la redacție la 8 decembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. D. S. Darin, J. D. Huitt, *Effect of a partial monolayer of propping agent on facture flow capacity*, Transactions AIME, **219**, (1960).
2. Cl. Louis, *Etude des écoulements d'eau dans les roches fissurées et de leurs influences sur la stabilité des massifs rocheux*, E. D. F. Buletin de la direction des édudes et recherch es, Série A, Nucléaire, hydraulique, thermique *3*, (1968).
3. M. Muskat, *Physical principles of oil production*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1949, p. 246–247.
4. A. H. P. Skelland, *Non newtonian flow*, John Wiley and Sons, London, Sydney, 1967, p. 80–82.
5. R. Trandafir, *Matematici pentru ingineri, Culegere de probleme*, Edit. tehnică, București, 1969, p. 366–368.

CONCEPTE ALE „TEORIEI SISTEMELOR" ÎN STUDIUL SISTEMELOR MECANICE LINIARE

de SERGIU T. CHIRIACESCU

Universitatea din Brașov

CONSTANTIN HUIU, DUMITRU MANGERON

nstitutul politehnic din Iași

Lucrarea analizează, din punctul de vedere al teoriei sistemelor, clasa sistemelor materiale liniare libere. Este evidențiat locul diverselor forme ale ecuațiilor de stare în ansamblul reprezentărilor folosite la descrierea unor asemenea sisteme, sînt prezentate formele particulare ale unor criterii de controlabilitate și observabilitate și se indică o cale de determinare a modurilor principale de mișcare.

1. INTRODUCERE

Pînă nu de mult, dinamica tehnică se ocupa mai ales cu diverse probleme specifice (particulare), rezultatele obținute în urma unor asemenea studii avînd un cîmp relativ mic de aplicabilitate. Odată cu creșterea complexității sistemelor mecanice, a modelelor corespunzătoare mecanismelor, mașinilor, proceselor etc., nu numai dinamica tehnică, ci și cea analitică, au căpătat noi valențe. Are loc un proces continuu de generalizare, de introducere de noi concepte, de schimbare a tehnicilor de calcul etc.

În acest context, cel puțin două direcții de dezvoltare a dinamicii merită toată atenția : 1) — abordarea unitară a celor mai diverse probleme cu ajutorul unor noi ecuații de mare generalitate, 2) — încadrarea sistemelor mecanice în noțiunea generală de „sistem" ([1], [2] etc.).

Numeroase lucrări de mecanică analitică mai vechi, sau cu totul recente ([1], [2], [5], [11] etc.), scot în evidență importanța unor valoroase contribuții românești. De exemplu, profesorul V. V. Dobronravov, în a sa mecanică neolonomă [2], plecînd de la principiul general d'Alambert — Lagrange

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\vec{r}}_i + \vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \vec{\delta r}_i = 0, \tag{1}$$

unde N este numărul punctelor materiale ale sistemului, m_i masa punctului i, $\vec{r}_i$ raza vectoare a punctului i, $\vec{\delta r}_i$ variația vectorului $\vec{r}_i$, iar $\vec{F}_i$ și $\vec{R}_i$ sînt

* Lucrare prezentată la cea de a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 335—350

forțele active (date) și, respectiv, cele de legătură (reacțiunile), în cazul unor legături ideale $\left(\text{pentru care } \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \vec{\delta r}_i = 0\right)$ obține ecuațiile Mangeron-Deleanu ([2], [5], [11] etc.)

$$\frac{1}{j}\left[\frac{\partial T^{(j)}}{\partial q_i^{(j)}} - (j+1)\frac{\partial T}{\partial q_i}\right] = Q_i \ (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \qquad (2)$$

(în care T este energia cinetică a sistemului cu n grade de libertate, iar Q_i sînt forțele generalizate) valabile pentru orice sistem mecanic cu $(3N - n)$ legături olonome și / sau neolonome.

Presupunînd că sistemului format din N puncte materiale nu i s-au impus legături suplimentare (olonome și / sau neolonome), în conformitate cu principiul (1) sau cu orice ecuație derivată din (1), poate fi întocmită schema bloc din figura 1*a*, în care $q_1, q_2, \ldots q_{3N}$ reprezintă coordonatele generalizate ale sistemului. Schema bloc pune în evidență dependențele dintre mărimile-cauză F_i (intrările) și R_i (perturbațiile) pe de o parte, și mărimile-efect q_i (ieșirile), pe de altă parte.

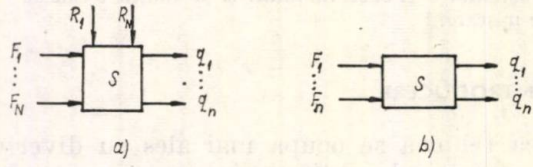


Fig. 1

Dacă sistemului mecanic îi sînt proprii ecuațiile (2), atunci schema bloc a acestuia are aspectul din figura 1*b*. Și de această dată, ca și pentru sistemul liber (nesupus unor legături olonome și / sau neolonome), dependența mărimi de intrare — mărimi de ieșire este, din punct de vedere fizic, unidirecțională.

Avînd în vedere considerațiile legate de figura 1 și ținînd seama că mărimile F_i și q_i satisfac condiția închiderii prin segmentare [12], rezultă că sistemul material se încadrează în conceptul general de sistem ([10], [12] etc). Ca o consecință firească, apare atunci problema cercetării proprietăților și a comportamentului sistemului material S cu ajutorul metodelor oferite de Teoria sistemelor. Cîteva aspecte ale acestei probleme, abordate în cazul cel mai simplu, dar deosebit de important în dinamica tehnică, acela al sistemelor materiale liniare staționare (sau invariante în timp) libere, sînt prezentate în cele ce urmează.

2. REPREZENTĂRI

Pentru o definire completă a sistemului mecanic S nu este suficient să se indice numai mărimile de intrare (cauzele) și cele de ieșire (efectele). Este necesar să se dispună de informații suficiente asupra modului în care acesta „prelucrează" mărimile de intrare astfel încît să se obțină mărimile de ieșire, adică sînt necesare date care să indice realizarea cauzalității însăși.

Pentru sistemele materiale aceste informații sînt conținute în legea generală a mișcării și în condițiile inițiale ale lui S.

Folosind ecuațiile dinamicii newtoniene, lagrangiene, sau ecuații mai generale de tipul (2), pentru un sistem mecanic liniar staționar liber cu n grade de libertate se ajunge la o ecuație de forma

$$M \cdot \ddot{Q} + C \cdot \dot{Q} + K \cdot Q = F(t), \tag{3}$$

unde t este timpul, $Q \equiv [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$, $F \equiv [F_1, F_2, \ldots, F_n]^T$, iar M, C și K sînt matrice simetrice pozitiv definite peste corpul numerelor reale.

Notînd $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ ecuația (3) poate fi scrisă:

$$L(p) \cdot Q = F, \tag{4}$$

unde

$$L(p) = Mp^2 + Cp + K. \tag{5}$$

Ecuația (4) constituie *reprezentarea prin operatori diferențiali* a sistemului material S.

În dinamica tehnică apar numeroase situații în care ecuația (3) nu poate fi precizată. Este cazul, de exemplu, înlocuirii structurilor mecanice prin modele dinamice echivalente cu un anumit număr de grade de libertate. În asemenea situații, întrucît nu se cunoaște decît comportarea externă a sistemului (conceput, în baza figurii 1, ca un „black — box"), se caută a se obține, prin măsurări, o colecție de dependente directe între intrări și ieșiri. Ansamblul acestor funcții aranjate într-un tablou $Z(p)$ astfel încît

$$Q(p) = Z(p) \cdot F(p) \tag{6}$$

poartă numele de funcție de transfer, iar ecuația (6) constituie *reprezentarea sistemului prin matricea de transfer.*

Atît reprezentarea (4), cît și reprezentarea (6), pun în evidență modul în care ieșirile sistemului depind de intrări. Aceste reprezentări intrare — ieșire, care stau la baza a numeroase probleme de analiză sau de sinteză a sistemelor mecanice liniare, nu spun, însă, nimic despre mecanismul intim prin care mărimile de intrare sînt prelucrate de sistem pentru a se obține ieșirile. Întrucît sistemul material liniar constituie un sistem în accepțiunea Teoriei sistemelor, acest inconvenient dispare dacă se recurge la *reprezentarea intrare — stare — ieșire* (sau reprezentarea în spațiul stărilor).

Ținînd seama de rezultatele generale obținute în Teoria sistemelor ([4], [10], [12] etc), pentru sistemul descris de ecuația (3) reprezentarea canonică intrare—stare—ieșire are forma [7], [8]:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A \cdot X(t) + B \cdot F(t), \\ Q(t) &= D \cdot X(t), \end{aligned} \tag{7}$$

unde $X = [x_1, x_2, \ldots, x_{2n}]^T$ este vectorul de stare, aparținînd spațiului finit dimensional al stărilor și verificînd condițiile de coerență [4], [12],

iar A, B, D sînt matrice reale de dimensiuni $2n \times 2n$, $2n \times n$, $n \times 2n$ numite matrice de evoluție, de comandă și, respectiv, de observație.

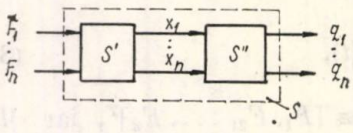


Fig. 2

Starea la timpul t_0 reprezintă informația minimă necesară astfel încît evoluția sistemului la timpul $t > t_0$ să poată fi determinată fără a cunoaște intrarea sistemului la $t < t_0$. Se mai spune că starea realizează o tăietură între trecut și viitor, ceea ce permite a reprezenta sistemul material liniar ca în figura 2.

Înainte de a prezenta unele din avantajele imediate ale reprezentării (7) este necesar să se precizeze starea sistemului material liniar descris printr-o ecuație de forma (4) sau de forma (6).

3. REPREZENTĂRI ÎN SPAȚIUL STĂRILOR

Teoria sistemelor oferă cîteva metode de trecere de la reprezentarea prin operatori diferențiali la ecuațiile de stare ([4], [12] etc.), pentru sistemele mecanice liniare prezentînd importanță deosebită cea bazată pe triangularizarea matricei $L(p)$. Aplicînd această metodă sistemului descris de ecuația (4) se obține [8]:

$$\dot{X}_1 = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & I \\ -M^{-1}K & O \end{bmatrix} \cdot X_1 + \begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix} \cdot F, \tag{8}$$

$$Q = [I \quad O] \cdot X_1$$

unde prin I s-a notat matricea unitate n-dimensională, iar prin O matricea zero n-dimensională.

La integrarea ecuațiilor (8) sînt necesare valorile inițiale ale componentelor vectorului de stare $X_1 = [x_1, x_2, \ldots, x_{2n}]^T$. Pe de altă parte, pentru sistemul material descris de ecuația (4), de regulă, sînt precizate valorile coordonatelor și vitezelor generalizate la momentul inițial $t = t_0$. Drept urmare, apare ca firească întrebarea: poate fi considerat vectorul

$$X_2 = [q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n]^T = [Q\dot{Q}]^T \tag{9}$$

ca stare a sistemului material?

Pentru început să presupunem că răspunsul la întrebarea pusă este afirmativ. În acest caz, ținînd seama că $Q = \mathrm{d}/\mathrm{dt}(Q)$ și scriind ecuația (3) în forma

$$\ddot{Q} = -M^{-1} \cdot C \cdot \dot{Q} - M^{-1} \cdot K \cdot Q + M^{-1} \cdot F, \tag{10}$$

se găsește reprezentarea

$$\begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \ddot{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \mathrm{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ \dot{Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix} F; \tag{11}$$

$$Q = [I \; O] \cdot \begin{bmatrix} Q \\ \dot{Q} \end{bmatrix}.$$

Pentru orice sistem liniar există o infinitate de reprezentări în spațiul stărilor, o reprezentare deducîndu-se din alta printr-o transformare liniară nesingulară T_1. Drept urmare, pentru a dovedi că ecuațiile (11) constituie, într-adevăr, o reprezentare de stare a sistemului material va fi suficient să se determine matricea T_1 nesingulară care să indice echivalența ecuațiilor (11) și (8) (în sensul aceloraşi mărimi de ieşire la aceleaşi intrări).

Ținînd seama de condițiile generale de echivalență [12], matricea T_1 trebuie să satisfacă relațiile :

$$\begin{bmatrix} O & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} = T_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -M^{-1}C & I \\ -M^{-1}K & O \end{bmatrix} \cdot T_1,$$

$$\begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix} = T_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$[I \; O] = [I \; O] \cdot T_1.$$

Ușor se găsește că

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & O \\ M^{-1}C & I \end{bmatrix} \tag{13}$$

și, prin urmare, vectorul (9) este un vector de stare al sistemului liniar.

După cum este cunoscut, în mecanica analitică vectorul

$$X_3 = [q_1, \ldots, q_n, p_1 \ldots, p_n]^T = [Q \; P]^T \tag{14}$$

unde $p_i = \partial \mathscr{L} / \partial \dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, iar $\mathscr{L}$ este potențialul cinetic al sistemului material, aparține unui spațiu $2n$-dimensional numit spațiul fazelor. Pentru a dovedi că și X_3 este un vector de stare, se calculează mai întîi [8]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} (\dot{Q}^T \cdot M \cdot \dot{Q} - Q^T \cdot K \cdot Q), \tag{15}$$

în care caz ecuația (3) se scrie

$$\dot{P} = - C \cdot \dot{Q} - K \cdot Q + F, \tag{16}$$

care, ținînd seama de (14) și (15), conduce la ecuațiile :

$$\dot{X}_3 = \begin{bmatrix} O & M^{-1} \\ -K & -CM^{-1} \end{bmatrix} \cdot X_3 + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} F,$$

$$Q = [I \; O] \cdot X_3. \tag{17}$$

Se verifică uşor îndeplinirea condiţiilor de echivalenţă dintre reprezentările (8) şi (17)

$$\begin{bmatrix} O & M^{-1} \\ -K & -CM^{-1} \end{bmatrix} = T_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -M^{-1}C & I \\ -M^{-1}K & O \end{bmatrix} \cdot T_2,$$

$$\begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} = T_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$[I \; O] = [I \; O] \cdot T_2,$$

atunci cînd

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & O \\ M^{-1}C & M^{-1} \end{bmatrix} \tag{19}$$

ceea ce permite a afirma că vectorul de fază X_3 aparţine spaţiul stărilor.

Dată fiind importanţa deosebită a vectorului X_2 pentru integrarea ecuaţiilor de stare, rezultă că unui sistem descris de ecuaţia (4) i se pot asocia oricîte stări X, care să poată fi precizate în funcţie de X_2 la momentul iniţial $t = t_0$, cu singura condiţie ca matricea T din transformarea

$$X = T \cdot X_2 \tag{20}$$

să fie nesingulară.

Reprezentarea sistemului material în spaţiul stărilor determină, pe de o parte, o serie de avantaje în abordarea generală a unor importante probleme de analiză sau de sinteză, iar, pe de altă parte, permite a releva limitele utilizării ecuaţiilor de forma (4) sau de forma (6) şi a introduce în mecanică o serie de concepte noi, cum ar fi acelea de controlabilitate şi observabilitate.

3. CONTROLABILITATEA ŞI OBSERVABILITATEA

Conceperea sistemului material liniar ca un sistem multivariabil şi introducerea noţiunii de stare arată că (vezi fig. 2) prin intrările F_i se acţionează asupra stării X, iar ieşirile q_i reprezintă mărimile prin care starea sistemului este observată.

Marea importanţă a stării în realizarea cauzalităţii intrare—ieşire explică atenţia deosebită care i se acordă în Teoria sistemelor. Două dintre proprietăţile sale sînt legate de conceptele de controlabilitate şi, respectiv, de observabilitate. Controlabilitatea stabileşte condiţiile în care un sistem în starea X_0, la momentul t_0, să poată trece în starea X_1, corespunzătoare timpului $t_1 > t_0$, manipulînd numai intrările, iar observabilitatea precizează condiţiile în care este posibil a determina starea X_0 numai prin observarea ieşirilor într-un interval de timp suficient de lung $[t_0, t_1]$.

Luîndu-se ca punct de plecare o serie de rezultate cunoscute din Teoria sistemelor, în lucrarea [9] sînt prezentate două noi criterii generale (şi cîteva particulare) pentru verificarea controlabilităţii şi observabilităţii în spaţiul stărilor, iar în lucrarea [7] sînt date primele aplicaţii ale acestora la o clasă importantă de sisteme mecanice liniare.

În conformitate cu cele demonstrate în [9], un sistem liniar avînd reprezentarea (7) este complet controlabil dacă

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \psi_{11}(\lambda_1) & \dots & \psi_{2n,1}(\lambda_1) \\ \psi_{11}^{(1)}(\lambda_1) & \dots & \psi_{2n,1}^{(1)}(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{11}^{(m_1-1)}(\lambda_1) & \dots & \psi_{2n,1}^{(m_1-1)}(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{1r}(\lambda_r) & \dots & \psi_{2n,r}(\lambda_r) \\ \psi_{1r}^{(1)}(\lambda_r) & \dots & \psi_{2n,r}^{(1)}(\lambda_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{1r}^{(m_l-1)}(\lambda_r) & \dots & \psi_{2n,r}^{(m_l-1)}(\lambda_r) \end{bmatrix} = 2n \tag{21}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sînt rădăcinile ecuației caracteristice

$$|I\lambda - A| = \prod_{l=1}^{r} (\lambda - \lambda_l)^{m_l} = \Delta(\lambda) = 0\,; \quad \left(\sum_{l=1}^{r} m_l = 2n\right), \tag{22}$$

iar

$$\psi_{il}(\lambda_l) = \left[\frac{(\lambda - \lambda_l)^{m_l} \cdot \varphi_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_l}\,; \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \dots, r \\ i = 1, 2, \dots, 2n \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$\varphi_i(\lambda)$ sînt liniile matricei adj $[I\lambda - A] \cdot B$, $\psi_{il}^{(k)}$ reprezintă valoarea derivatei de ordinul k ($k = 1, 2, \dots, m_r - 1$) în raport cu λ, a lui ψ_{il} pentru $\lambda = \lambda_l$.

Criteriul poate fi aplicat cu ușurință pentru sistemul mecanic liniar. De exemplu, dacă se ia în considerare reprezentarea (11) și se presupune că matricea de evoluție nu are valori proprii nule, atunci are loc

TEOREMA 1. *Sistemul mecanic liniar cu reprezentarea* (11) *și fără valori proprii nule este complet controlabil în spațiul stărilor dacă este îndeplinită condiția* (21), *în care*:

$$\psi_{il}(\lambda_l) = \left[\frac{(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\lambda)} \cdot U_i\right]_{\lambda=\lambda_l}\,; \quad \psi_{n+i,l}(\lambda_l) = \left[\frac{\lambda(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\lambda)} \cdot U_i\right]_{\lambda=\lambda_l}\,;$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ l = 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}, \tag{24}$$

iar U_i *sînt liniile matricei*

$$\operatorname{adj} U = \operatorname{adj}\,[\lambda^2 \cdot I + \lambda \cdot M^{-1} \cdot C + M^{-1} \cdot K]. \tag{25}$$

Demonstrație. Avînd în vedere ecuațiile (11)

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda \cdot I & -I \\ M^{-1} \cdot K & \lambda \cdot I + M^{-1} \cdot C \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta(\lambda) = |\lambda^2 \cdot I + \lambda \cdot M^{-1} \cdot C + M^{-1} \cdot K| = |U|,$$

în care caz, prin folosirea formulei lui Schur [12], se obține

$$[\lambda I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}(I - U^{-1} \cdot M^{-1} \cdot K) & U^{-1} \\ -U^{-1} M^{-1} K & \lambda U^{-1} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Ținînd seama de (26), rezultă

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{2n} \end{bmatrix} = \operatorname{adj}[I\lambda - A] \cdot B = |U| \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}(I - U^{-1} M^{-1} K) & U^{-1} \\ -U^{-1} M^{-1} K & \lambda U^{-1} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} O \\ M^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{adj} U' \\ \lambda \operatorname{adj} U' \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Combinînd relațiile (23) și (27) rezultă formulele (24), ceea ce demonstrează teorema.

În mod analog, dacă sistemului mecanic liniar i se aplică criteriul general de observabilitate stabilit în lucrarea [9], atunci poate fi demonstrată

TEOREMA 2. *Sistemul mecanic liniar cu reprezentarea* (11) *și fără valori proprii nule este complet observabil în spațiul stărilor dacă*

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \overline{\psi}_{11}(\lambda_1) & \dots & \overline{\psi}_{2n,1}(\lambda_1) \\ \overline{\psi}^{(1)}_{11}(\lambda_1) & \dots & \overline{\psi}^{(1)}_{2n,1}(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\psi}^{(m_1-1)}_{11}(\lambda_1) & \dots & \overline{\psi}^{(m_1-1)}_{2n,1}(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\psi}_{1r}(\lambda_r) & \dots & \overline{\psi}_{2n,r}(\lambda_r) \\ \overline{\psi}^{(1)}_{1r}(\lambda_r) & \dots & \overline{\psi}^{(1)}_{2n,r}(\lambda_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\psi}^{(m_r-1)}_{1r}(\lambda_r) & \dots & \overline{\psi}^{(m_r-1)}_{2n,r}(\lambda_r) \end{bmatrix} = 2n, \tag{28}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sînt rădăcinile caracteristice ale ecuației (22),

$$\psi_{il}(\lambda_l) = \left[\frac{(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\lambda)} \cdot W_i\right]_{\lambda=\lambda_l}; \quad \overline{\psi}_{n+i,l}(\lambda_l) = \left[\frac{(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\lambda)} \cdot V_i\right]_{\lambda=\lambda_l};$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, r \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{29}$$

iar V_i și W_i sînt coloanele matricei (25), respectiv ale matricei $(I - U^{-1} \cdot M^{-1} \cdot K)$.

Conceptul de controlabilitate poate fi extins și în spațiul ieșirilor. Într-un asemenea caz, pentru sistemul mecanic liniar se poate pune problema : este posibil a trece succesiv ieșirile q_i printr-o serie de valori date, acționînd numai asupra intrărilor F_i?

Se poate arăta că, în cazul în care sistemul are reprezentarea (11), răspunsul este afirmativ dacă liniile matricei $U^{-1} \cdot M^{-1}$ sînt liniar independente, U fiind matricea definită prin relația (25).

4. PERFORMANȚELE DINAMICE

Pentru analiza performanțelor sistemului mecanic liniar stau la dispoziție o serie de metode în domeniul timpului și o altă serie în domeniul frecvenței. In toate cazurile, însă, sistemul este presupus dinamic stabil (asimptotic).

4.1. STABILITATEA (ASIMPTOTICĂ)

Localizarea rădăcinilor ecuației caracteristice în planul complex constituie baza metodelor de cercetare a stabilității asimptotice. Dacă sistemul material este descris de reprezentarea prin operatori diferențiali (4), atunci polinomul caracteristic are forma

$$\Delta(\lambda) = |L(p)|, \tag{30}$$

iar în cazul cînd este cunoscută reprezentarea de stare (7),

$$\Delta(\lambda) = |I\lambda - A|. \tag{31}$$

Numeroase metode în domeniul frecvenței folosesc, la analiza stabilității asimptotice, reprezentarea prin funcția de transfer. Aplicarea unor asemenea metode trebuie să se facă, însă, cu multă precauție, deoarece în echivalentul minimal redus reprezentat de matricea de transfer $Z(p)$ nu apar modurile de mișcare necontrolabile și neobservabile, putîndu-se întîmpla ca tocmai aceste moduri de mișcare să determine instabilitatea sistemului. De aici rezultă încă un argument în favoarea importanței care trebuie acordată conceptelor de controlabilitate și observabilitate.

4.2. RĂSPUNSUL LA SEMNAL

Dacă sistemul material este descris prin reprezentarea de stare (7), atunci, alegînd timpul inițial $t_0 = 0$, vectorul Q al mărimilor de ieșire poate fi scris în forma ([3], [12] etc.)

$$Q = C \cdot e^{tA} \cdot \left(X_0 + \int_0^t e^{-\tau A} \cdot B \cdot F(\tau)\, d\tau \right), \tag{32}$$

unde X_0 este starea sistemului vibrator la timpul t_0.

Reprezentarea de stare (7) și formula (32) permit a soluționa mult mai elegant și general o problemă de mare importanță în teoria vibrațiilor — determinarea modurilor principale de mișcare. În acest scop, să presupunem, pentru exemplificare, că matricea de evoluție are valori proprii distincte peste corpul numerelor complexe. Se caută ca prin transformarea reală nesingulară,

$$\xi = \rho \cdot Q, \tag{33}$$

fiecare din componentele ξ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) să conțină numai două valori proprii conjugate, λ_{2i-1} și λ_{2i}, ale matricei de evoluție. Coordonatele ξ_i astfel definite vor fi tocmai coordonatele principale ale sistemului liniar cu reprezentarea (7).

Folosind una din metodele puse la dispoziție de Teoria sistemelor ([3], [12] etc.) poate fi determinată o matrice G astfel încît cu transformarea (33) și cu

$$X = GX \tag{34}$$

reprezentarea

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \bar{A} \cdot \bar{X} + \bar{B} \cdot F = G \cdot A \cdot G^{-1} \cdot \bar{X} + G \cdot B \cdot F, \\ \xi &= \bar{C} \cdot \bar{X} = \rho \cdot C \cdot G^{-1} \cdot \bar{X}, \end{aligned} \tag{35}$$

echivalentă cu (7) (în sensul acelorași mărimi de ieșire la aceleași intrări) să aibă matricea de evoluție de forma :

$$\bar{A} = \operatorname{diag}[\bar{A}_i]; \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} \lambda_{2i-1} & 0 \\ 0 & \lambda_{2i} \end{bmatrix}; \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

Scriind matricea G în forma

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \tag{37}$$

și ținînd seama de relațiile (32) — (36) se obține

$$\zeta = \rho \cdot [G_{11}\ G_{12}] \cdot e^{t\bar{A}} \left(\bar{X}_0 + \int_0^t e^{-\tau \bar{A}} \bar{B} F(\tau)\, d\tau \right). \tag{38}$$

Notînd

$$\rho \cdot [G_{11}\ G_{12}] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{bmatrix}, \tag{39}$$

unde μ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt matrice de dimensiuni 1×2 și avînd în vedere că

$$e^{t\bar{A}} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} e^{\lambda t_{2i-1}} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{2i} t} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\,[\alpha_i(t)]$$

soluția (38) capătă forma :

$$\zeta = \begin{bmatrix} \mu_{11}\alpha_1(t) & \ldots & \mu_{1n}\alpha_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n1}\alpha_1(t) & \ldots & \mu_{nn}\alpha_n(t) \end{bmatrix} \left(\bar{X}_0 + \int_0^t \operatorname{diag}[-\alpha_i(\tau)]\, \bar{B} F(\tau)\, d\tau \right). \tag{40}$$

Din (40) rezultă că vectorul ξ va avea drept componente coordonatele principale ale mișcării atunci cînd

$$\mu_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{41}$$

Rezolvarea ecuațiilor (41) permite a determina matricea de transformare ρ.

5. EXEMPLE ILUSTRATIVE

a) Pentru început fie modelul Kelvin cu două grade de libertate, din figura 3, pentru care : $m_1 = m_2 = 1$ Kg, $c_1 = c_3 = 2\text{N}\cdot\text{s/m}$, $c_2 = 1\text{N}\cdot\text{s/m}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1\,\text{N/m}$, $F_1 = F$, $F_2 = 0$.

Aplicînd modelului ecuația lui Lagrange de speța a doua se obține o ecuație de forma (3)

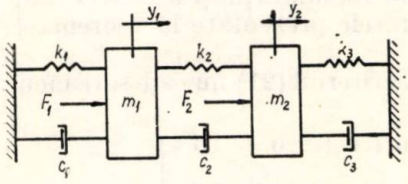


Fig. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F. \tag{42}$$

În acest caz reprezentarea canonică de stare (11) capătă forma particulară :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F,$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

care, cu notația $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, conduce la schema bloc din figura 4.

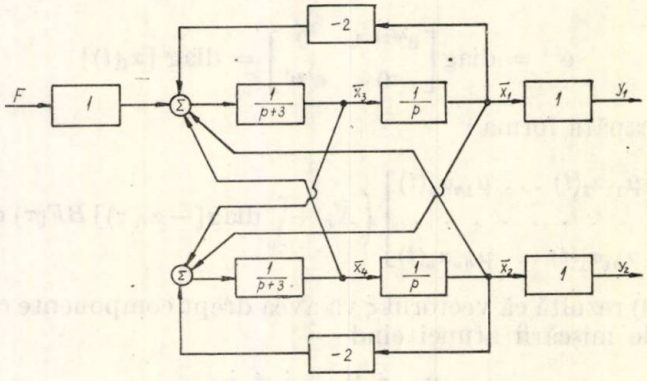


Fig. 4

Polinomul caracteristic al reprezentării (43)

$$\Delta(\lambda) = |I\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3+\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3(\lambda+3) \tag{44}$$

neavînd rădăcini nule, pentru cercetarea controlabilității și a observabilității în spațiul stărilor pot fi folosite rezultatele prezentate la teorema 1, respectiv la teorema 2.

Calculînd mărimile (24) se constată că criteriul (21) nu este satisfăcut deoarece

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} [\,0 & 0\,] & [\,0 & 0\,] & [\,0 & 0\,] & [\,0 & 0\,] \\ \left[\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\right] & \left[-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\right] & \left[-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\right] \\ \left[\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\right] & \left[-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\right] & \left[-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\right] \\ \left[\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\right] & \left[\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\right] & \left[-\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\right] & \left[-\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\right] \end{bmatrix} = 3 < 4 = 2n$$

și, prin urmare, modelul Kelvin din figura 3 nu este controlabil. În schimb, în conformitate cu teorema 2 același sistem este complet observabil.

Pentru a separa din reprezentarea (43) partea controlabilă se efectuează schimbarea de variabilă

$$\bar{X} = TX \tag{45}$$

unde matricea

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a fost determinată prin metodica expusă în lucrarea [12]. Procedînd în acest fel se obține reprezentarea

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot F, \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix},$$

a cărei schemă bloc este dată în figura 5.

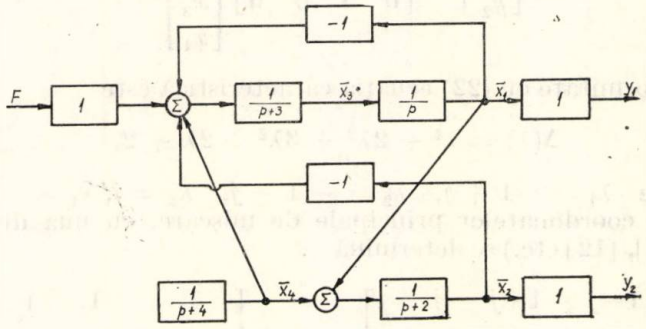


Fig. 5

Ținînd seama de (46), echivalentul minimal al stării (43) este

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F, \tag{47}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}.$$

Dacă se presupune că la $t_0 = 0$ starea sistemului este $X_0 = [1001]^T$, formula (32) aplicată reprèzentării (43) sau reprezentării minimale (47) conduce la aceleași expresii pentru deplasările y_1 și y_2 :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)\,e^{-t} + \frac{1}{4}\int_0^t \{[1+2(t-\tau)]e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}\}\,F(\tau)\,d\tau \\ t\,e^{-t} + \frac{1}{4}\int_0^t \{[-1+2(t-\tau)]\,e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}\}\,F(\tau)\,d\tau \end{bmatrix} \tag{48}$$

b) Fie modelul Kelvin cu două grade de libertate (vezi fig. 3) și $m_1 = m_2 = 1$ Kg, $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 1$ Ns/m, $k_1 = k_3 = 1$ N/m, $k_2 = 1/2$ N/m, $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. În acest caz reprezentarea (11) capătă aspectul :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

În conformitate cu (22) ecuația caracteristică este

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -1 + j$, $\lambda_2 = -1 - j$, $\lambda_3 = j$, $\lambda_4 = -j$. Pentru determinarea coordonatelor principale de mișcare, cu una din metodele cunoscute ([3], [12] etc.) se determină

$$G = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-j & -1+j & -j & j \\ 1+j & -1-j & j & -j \\ 1 & 1 & -j & -j \\ 1 & 1 & j & j \end{bmatrix}; \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1+j & -1-j & j & -j \\ 1-j & 1+j & j & -j \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Ținînd seama de (50) matricea (39) devine

$$\rho \cdot [G_{11}\,G_{12}] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [\rho_{11} - \rho_{12} & \rho_{11} - \rho_{12}] & [\rho_{11} + \rho_{12} & \rho_{11} + \rho_{12}] \\ [\rho_{21} - \rho_{22} & \rho_{21} - \rho_{22}] & [\rho_{21} + \rho_{22} & \rho_{21} + \rho_{22}] \end{bmatrix},$$

ceea ce permite a scrie ecuaţiile (41) în forma

$$\rho_{11} + \rho_{12} = 0,$$
$$\rho_{21} - \rho_{22} = 0,$$

din care rezultă matricea nesingulară

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

În limbajul Teoriei sistemelor, trecerea de la coordonatele generalizate la cele principale echivalează cu o decuplare a ieşirilor.

Pentru exemplul considerat, cunoscînd matricele G şi ρ noua reprezentare de stare, conform relaţiilor (35), are forma

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} -1+j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix} \cdot \bar{X} + \frac{j}{4} \begin{bmatrix} -(F_1-F_2) \\ F_1-F_2 \\ -(F_1+F_2) \\ F_1+F_2 \end{bmatrix},$$
$$\xi = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \bar{X} \tag{52}$$

Reprezentînd ecuaţiile (49) şi (52) prin scheme bloc ca în figura 6*a*, respectiv 6 *b*, se obţine o imagine sugestivă a decuplării mărimilor de ieşire

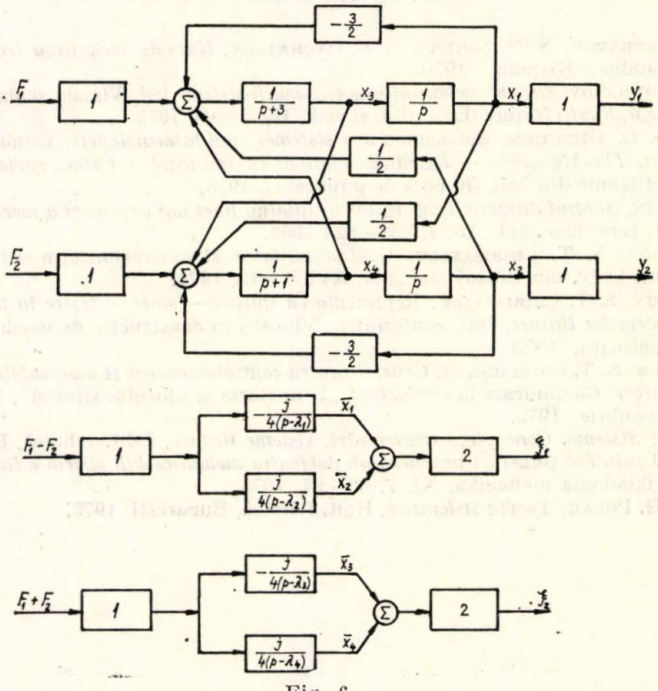


Fig. 6

6. CONCLUZII

a) Așa cum atestă numeroase lucrări recente de mecanică teoretică și aplicată, în ultimul deceniu noțiunile de „dinamică" și de „sistem dinamic" au suferit transformări considerabile, în sensul unor mai mari abstractizări și generalizări. Conceptele de sistem, spațiul stărilor etc. permit a aborda în mod unitar și complex cele mai diverse probleme din dinamica sistemelor de puncte și corpuri materiale. Din acest motiv, pentru diverse clase de sisteme materiale, precizarea stărilor, a ecuațiilor canonice de stare, a proprietăților de bază constituie probleme de un real interes.

b) Dată fiind importanța deosebită pe care o au în dinamica tehnică, în lucrare sistemele materiale liniare libere au fost privite prin prisma conceptului general de „sistem". Este relevată importanța reprezentării în spațiul stărilor, sînt evidențiate cîteva proprietăți ale stării, precum și aplicațiile acestei reprezentări în problema determinării modurilor principale de mișcare.

c) Deși, așa cum rezultă din considerațiile legate de figura 1, s-au avut în vedere numai sisteme materiale liniare care nu sînt supuse unor legături suplimentare olonome și / sau neolonome, avînd în vedere cele expuse în lucrare apare ca necesar și posibil să se extindă studiul și asupra unor clase de sisteme mai complexe. Apoi, referirea și la alte concepte importante din Teoria sistemelor, cum ar fi acela de optimalitate, constituie o altă direcție de investigație demnă de toată atenția.

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Dobronravov, N. N. Nikitin, A. L. Dvornikov, *Kurs de mekanikă teoretică*, Edit. Lumina, Kișinău, 1970.
2. V. V. Dobronravov, *Osnovî mehaniki negolonomnîh sistem*, Izd. Vîsșaia școla, Moskva, 1970.
3. R. Fazlollah, *Spații liniare*, Edit. did. și ped., București, 1973.
4. A. Fossard, C. Gueguen, *Commande des sistèmes multidimensionels*, Dunod, Paris, 1972.
5. Q. K. Ghori, *The Mangeron — Deleanu equations in Poincaré — Cetaev variables*, Bul. Inst. politehnic din Iași, (în curs de publicare), 1975.
6. D. Mangeron, *Studiul dinamicii mașinilor în lumina unei noi expuneri a mecanicii analitice*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4*, 823—828 1964.
7. D. Mangeron, S. T. Chiriacescu, *Controlabilitatea și observabilitatea sistemului Kelvin*, Bul. Univ. din Brașov, Seria A, **XVI**, 1—10, 1974.
8. D. Mangeron, S. T. Chiriacescu, *Reprezentarea intrare — stare — ieșire în teoria vibrațiilor sistemelor liniare*, Bul. conferinței „Vibrații în construcția de mașini", 279 — 286, Timișoara, 1975.
9. D. Mangeron, S. T. Chiriacescu, *Criterii pentru controlabilitatea și observabilitatea sistemelor liniare*, Comunicare la conferința „Din istoria și filozofia științei", Brașov, 14—15 noiembrie, 1975.
10. C. Penescu, *Sisteme. Concepte, caracterizări, sisteme liniare*, Edit. tehnică, București 1975.
11. D. Shani, *O printipe Gaussa i uravneniiah dvijeniia mehaniceskih sistem s liubîmi sviazami*, Prikladnaia mehanika, **XI**, *7*, 89—97, 1975.
12. L. Zadeh, E. Polak, *Teoria sistemelor*, Edit. tehnică, București 1973.

ASUPRA SINTEZEI CINEMATICE A MECANISMELOR SPAȚIALE CU CINCI AXE*)

de PETRU NICOLAE NIȚESCU
nstitutul de cercetări pentru tehnica de calcul, București

NICOLAE I. MANOLESCU
nstitutul politehnic București.

În prezentul studiu se explorează posibilitățile de sinteză cinematică a mecanismelor spațiale pentalatere, urmărindu-se fundamentarea unei metode de proiectare pentru realizarea de poziții și viteze asociate impuse elementelor „input" și „output". Se elaborează scheme structural-constructive originale de mecanisme $3R-2C$, împreună cu instrumentul matematic pentru sinteza acestora. În final, se prezintă o procedură de proiectare cinematică asistată de calculator, direct utilizabilă de către proiectant.

1. INTRODUCERE

Stadiul actual al metodelor de cercetare în analiza și sinteza mecanismelor spațiale a fost expus în detaliu în [1], [5] — [10].

Cercetările bibliografice întreprinse de autori au evidențiat preocupări relativ limitate pentru studiul sintezei mecanismelor spațiale cu un număr de axe mai mare decît patru, realizările actuale fiind restrînse în special la mecanismele cu patru axe și la sinteza pozițională. Într-o măsură mult mai mică este abordată sinteza pozițional-cinematică, iar sinteza dinamică practic nu este încă studiată. Explicația constă în faptul că în cazul mecanismelor cu $n > 4$ axe, ecuațiile de mișcare capătă o complexitate crescîndă, ceea ce determină ca utilizarea lor în problemele de sinteză să devină foarte dificilă sau chiar imposibilă.

Față de stadiul actual al sintezei mecanismelor spațiale, autorii își propun : 1) să extindă în cazul mecanismelor spațiale cu cinci axe, unele metode de sinteză cinematică dezvoltate pentru patrulaterele spațiale ; 2) să creeze noi variante structural-constructive de mecanisme pentalatere spațiale de tipul $3R-2C$ și să elaboreze procedura completă asistată de calculator pentru proiectarea pozițional-cinematică a acestora.

Variantele structural-constructive elaborate și metodele de sinteză corespunzătoare se referă la mecanisme din familiile $f = 0$ și 1, desmodrome ($M_f = 1$) [3].

Prin „mecanism" se va înțelege un „mecanism motor spațial articulat" (Mmsa) în sensul definiției din [4]. Simbolurile și terminologia constantelor și variabilelor utilizate corespund reprezentării Hartenberg-Denavit a mecanismelor spațiale, ilustrată în figura 1 pentru un mecanism spațial cu $n = 5$ axe, de tipul $3R - 2C$, cu „input" rotațional.

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

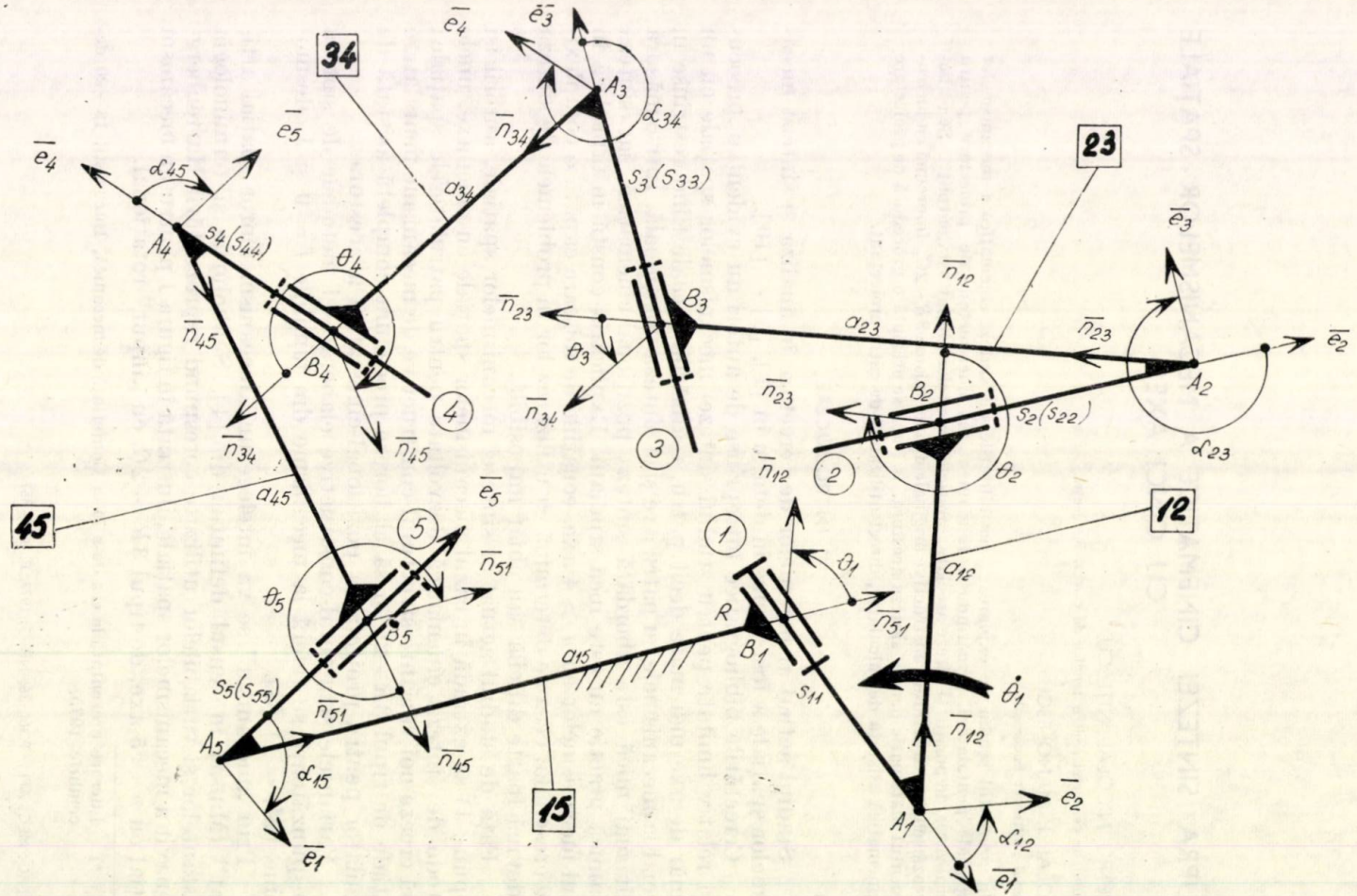


Fig. 1. — Schema structurală a mecanismelor spațiale cu cinci axe de tipul $3R-2C$ (Observație: În funcție de tipul mecanismului $3R-2C$, cuplele B_2, B_3, B_4, B_5 pot fi de tipul C sau R).

Tipul de sinteză studiat este sinteza pentru realizarea de poziții și viteze asociate impuse elementelor condus și conducător, care permite proiectarea de mecanisme spațiale pe baza unor condiții cinematice dintre cele mai variate, iar metoda de sinteză este cea analitică, metodele grafice fiind practic inoperante în cazul mecanismelor tridimensionale cu mai mult de patru axe.

2. PROCEDURA DE ANALIZĂ CINEMATICĂ A MECANISMELOR CU CINCI AXE

Ca etapă obligatorie premergătoare sintezei, a fost elaborată în prealabil o procedură completă de analiză cinematică a mecanismelor cu cinci axe, care constă — pe de-o parte, în generalizarea pentru deducerea funcțiilor de poziții ale mecanismelor spațiale monoconture cu $n = 3 \ldots 7$ axe a metodei operatorilor cuaternioni duali dezvoltată de Yang și Freudenstein [16] și particularizarea sistemelor de deplasare astfel obținute pentru pentalaterele spațiale [7], [8], [11], — iar pe de altă parte, în prelucrarea în formă adecvată pentru analiza și sinteza cinematică [13], [14], a expresiilor deplasărilor relative deduse de Duffy și Habib-Olahi cu ajutorul trigonometriei spațiale [2].

În formă programabilă pe calculator și direct utilizabilă, procedura menționată este prezentată în [14].

3. SINTEZA POZIȚIONALĂ A MECANISMELOR SPAȚIALE CU CINCI AXE, PENTRU REALIZAREA DE POZIȚII ASOCIATE

3.1. CONSIDERAȚII PRIVIND SINTEZA POZIȚIONALĂ

3.1.1. *Generalități.* Considerații detaliate privind principiile și posibilitățile de sinteză cinematică a mecanismelor spațiale pentalatere au fost expuse în [12], [14].

Generalizîndu-se procedeul de sinteză pentru trei poziții asociate, utilizat de Soni și Huang [15] pentru patrulaterul spațial R-$3C$, autorii își propun să extindă și să aplice această metodă la mecanismele pentalatere spațiale $3R-2C$ care realizează poziții asociate impuse elementelor conducător și condus.

3.1.2. *Clasificări structurale ale mecanismelor spațiale cu cinci axe.* Din punct de vedere al sintezei poziționale-cinematice, se consideră că mecanismele spațiale cu cuple inferioare, $n = 5$ axe, $f = 0$ și $M_0 = 1$ trebuie să fie clasificate și reținute pentru problemele de sinteză, astfel :

1) *după clasa cuplelor* : — cu cuple R, P, C, S ; — cu cuple R, P, C. Distincția referitoare la mecanismele cu cuple S este absolut necesară, întrucît ele sînt de fapt mecanisme cu șapte axe, cu ecuații de mișcare mult mai complexe. De asemenea, pînă în prezent nu s-au dedus ecuațiile de mișcare pentru mecanismele spațiale pentalatere cu cuple P. Din aceste motive, sinteza va avea ca obiect numai mecanismele spațiale $3R-2C$, pentru care sînt deduse ecuațiile de mișcare [2], [13], [14].

2) *după felul axelor „input" și „output"* : — cu „input" pe o axă de rotație ; — cu „input" pe o axă de rototranslație. Vor fi reținute pentru

sinteză numai cazurile practice cu „input" rotațional ($\dot{\theta}_1$ = const.) și „output" fie rotațional ($\dot{\theta}_5$ = variabil), fie de rototranslație ($\dot{\theta}_5$, $\dot{s}_5$ = = variabile).

3) *după succesiunea cuplelor* : — cu cuple C succesive : $RCCRR$, $RRCCR$, $RRRCC$; — cu cuplele C separate prin cuple R : $RCRCR$, $RCRRC$, $RRCRC$. Se reține pentru sinteză numai schemele cinematice cu bipletă CRC, pentru care există ecuații de mișcare deduse și prelucrate adecvat [13], [14]. Pentru schemele cu bipletă CCR, sinteza poate fi abordată analog, cu condiția prelucrării prealabile a funcțiilor de poziție corespunzătoare [9].

Restrîngerile impuse limitează studiul sintezei poziționale la mecanismele spațiale $3R-2C$, cu bipletă CRC și „input" rotațional.

3.1.3. *Clasificarea condițiilor constructive și poziționale impuse la proiectarea mecanismelor* $3R-2C$. Numărul pozițiilor asociate care pot fi impuse în problemele de sinteză este determinat de bilanțul constantelor dimensionale ale mecanismului, date și necunoscute. Mecanismele $3R-2C$ (fig. 1) sînt caracterizate dimensional prin 13 constante : 1) lungimea duală a elementelor : baza 15 (α_{15}, a_{15}), elementul conducător 12 (α_{12}, a_{12}), biela 23 (α_{23}, a_{23}), biela 34 (α_{34}, a_{34}), elementul condus 45 (α_{45}, a_{45}); 2) „offset"-urile fixe pe axele cuplelor R, care în cazul $RCRCR$ sînt : s_{11}, s_{33}, s_{55}. Întrucît sinteza se realizează pe baza ecuației „input-output" care conține cele 13 constante, alături de variabilele mecanismului (unghiurile „input" θ_1 și „output" θ_5), rezultă că numărul dimensiunilor care pot fi determinate prin sinteză este egal cu numărul pozițiilor asociate (θ_1, θ_5) impuse, celelalte constante ale mecanismului fiind date. Teoretic, pentru definirea dimensională a întregului mecanism, ar fi necesar să se impună 13 poziții asociate. Practic însă, rezolvarea și însăși deducerea sistemului de 13 ecuații cu 13 necunoscute necesar sintezei ar fi imposibilă, datorită gradului ridicat al ecuațiilor (30 la $RCRCR$, 62 la $RCRRC$, 100 la $RRCRC$) și numărului mare de termeni (10^2 ... 10^4).

Încercările efectuate de autori au arătat că bilanțul optim practic în cazul $3R-2C$, este acela cu *cinci constante dimensionale necunoscute*, din care două unghiulare (α_{ij}, α_{pq}) și trei liniare (a_{ij}, a_{pq}, s_{kk}), ceea ce corespunde determinării lungimilor duale a două elemente ij și pq și a unui „offset" fix s_{kk}. Elementele necunoscute (fig. 2) pot fi adiacente (bipletă) sau neadiacente, după cum $\bar{j} \equiv \bar{p}$ sau $\bar{j} \neq \bar{p}$, iar s_{kk} poate fi într-una din următoarele trei situații : a) $s_{kk} = s_{jj} = s_{pp}$, cînd $\bar{j} \equiv \bar{p}$; b) $s_{kk} = s_{ii}$ sau $s_{kk} = s_{qq}$, cînd $\bar{j} \neq \bar{p}$.

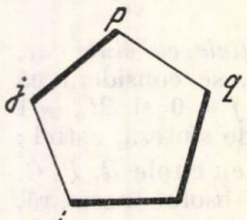


Fig. 2. — Poziția în conturul mecanismului pentalater spațial $3R-2C$ a elementelor necunoscute ij și pq.

Prezența a două necunoscute unghiulare conduce totuși la un grad relativ ridicat al ecuațiilor (10...18 la $RCRCR$, 26 la $RCRRC$, 36...52 la $RRCRC$) și un număr de termeni destul de mare. Pentru simplificare, se propune în continuare să se rețină o singură mărime unghiulară necunoscută (α_{ij} sau α_{pq}), celelalte impunîndu-i-se fie o valoare dată, fie valorile particulare*) 90°/270° (axe perpendiculare) sau 180°/360° (axe paralele). În acest mod se păstrează multiple posi-

*) Bara "/" are semnificația "sau"

bilități de alegere a valorii unei dimensiuni unghiulare în funcție de diversitatea problemelor de proiectare, facilitîndu-se în același timp deducerea și rezolvarea ecuațiilor de sinteză (gradul sistemului se reduce la max. 10 la *RCRCR*, max. 14 la *RCRRC*, max. 28 la *RRCRC*, indiferent de numărul necunoscutelor liniare).

Noile variante structural-constructive $3R-2C$, corespunzînd unor particularizări întîlnite în cazurile aplicative de proiectare, se obțin impunînd restricții pentru : $p = 1 \ldots 4$ dimensiuni din cele cinci care definesc elementele ij și pq, cu condiția stabilită, ca necunoscutele rămase că conțină cel mult o dimensiune unghiulară. Cazul general corespunzător fiecărei combinații este acela în care parametrii impuși au valori oarecare. Se exclude de la început din studiu sinteza unipozițională, care nu prezintă interes practic.

Din combinațiile posibile de $p = 1 \ldots 4$ parametri impuși avînd valori particulare conform tabelului 1 (cazurile „fundamentale"), a rezultat un număr de 60 cazuri și subcazuri de sinteză teoretic distincte, cu particularitățile constructive prezentate în [14].

Tabelul 1

Valorile parametrilor dimensionali impuși, în cazurile "fundamentale" de sinteză cinematică a a mecanismelor $3R-2C$

Parametrul impus	α_{ij}			α_{pq}			a_{ij}	a_{pq}	s_{kk}
Valoarea	dat	90°/270°	180°/360°	dat	90°/270°	180°/360°	0	0	0
Simbolizarea cazului	1.0	1.1	1.2	2.0	2.1	2.2	3.1	4.1	5.1

În cazul practic limită, necunoscutele sînt cele opt dimensiuni liniare (cinci lungimi de elemente și trei „offset"-uri fixe) și o dimensiune unghiulară ($i_{\max} = 9$).

3.1.4. *Clasificarea categoriilor de probleme de sinteză în proiectarea mecanismelor* $3R-2C$. În funcție de poziția în mecanism a elementelor date și necunoscute, la mecanismele $3R-2C$ se definesc 10 categorii de probleme de sinteză : $A, \ldots, J$, în care elementele cu poziții asociate impuse sînt întotdeauna cele adiacente bazei („input" și „output"). Se reține pentru sinteză numai categoriile practice $A, \ldots, F$, în care baza este cunoscută.

În cazul *RCRCR*, datorită simetriei mecanismului și a ecuației de închidere, categoriile C, D, E nu sînt distincte (C se deduce din B, D din B și E din C prin schimbări de indici), astfel încît rămîn a fi studiate numai categoriile *RCRCR*/A, B, F, cu variantele Bv și Fv în funcție de poziția în mecanism a „offset"-ului necunoscut s_{kk}.

3.1.5. *Metodica de deducere a ecuațiilor pentru sinteza pozițională a mecanismelor* $3R-2C$. Considerînd, de exemplu, pentru *RCRCR*, cazurile de sinteză 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 (tab. 1), care permit sinteza patrupozițională, se aduce ecuația „input-output" la forma ecuației de sinteză (3.5), cele patru necunoscute fiind : mărimea unghiulară $x = \operatorname{tg}(\alpha_{ij}/2)$ (cazurile 1.1 și 1.2), sau $x = \operatorname{tg}(\alpha_{pq}/2)$ (cazurile 2.1 și 2.2) și mărimile liniare $y = a_{ij}$, $z = a_{pq}$, $u = s_{kk}$.

Coeficienții H_j^i conțin: a) nouă constante dimensionale date; b) perechea de variabile asociate θ_1^i, θ_5^i, cu valori în funcție de configurația mecanismului $i = 1, \ldots, 4$. În acest mod, fiecare configurație impusă i determină un set de coeficienți $H_j^i = H_j^i(q_{\text{in}}^i, q_{\text{out}}^i)$, iar setul celor patru ecuații de aceeași formă (3.5) dar cu coeficienți diferiți, formează un sistem ale cărui soluții x, y, z, u definesc complet mecanismele care realizează cele patru poziții asociate impuse. Dacă se impun valori pentru un număr mai mare de dimensiuni, ecuațiile de sinteză se obțin prin particularizarea lui (3.5), iar numărul pozițiilor asociate care pot fi cerute mecanismului se reduce corespunzător.

Numărul maxim al soluțiilor matematice ale sistemului de sinteză (3.5) este $N = x^m y^n z^p u^q$, unde m, n, p, q = puterile maxime la care intervin necunoscutele respective. Din acestea se elimină soluțiile complexe și multiple, reținîndu-se numai soluțiile pozitive pentru lungimile elementelor și soluțiile pozitive și negative pentru „offset"-urile fixe și pentru $x = \text{tg}(\alpha/2)$.

3.2. SINTEZA MECANISMULUI RCRCR (fig. 1)

3.2.1. *CATEGORIA DE PROBLEME RCRCR/A.* Se dau perechile de unghiuri θ_1^i și θ_5^i (sau $x_5^i = \text{tg}(\theta_5^i/2)$) pentru pozițiile asociate $i = 1, 2, 3, 4$ ale manivelei 12 și balansierului 45 și bilanțul dimensiunilor cunoscute (tripleta 2154) și necunoscute (bipleta 234): a_{15}, α_{15}, s_{11}, a_{12}, α_{12}, a_{45}, α_{45}, s_{55} = date; a_{23}, α_{23}, s_{33}, a_{34}, α_{34} = de determinat prin sinteză.

Cazul A. 1.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$); $x = \text{tg}(\alpha_{34}/2)$, $y = a_{23}$, $z = a_{34}$, $u = s_{33}$ (3.1–3.4) din sistemul:

$$H_1^i x^8 z^2 + H_2^i x^7 yz + H_3^i x^7 zu + H_4^i x^7 z + H_5^i x^6 y^2 + H_6^i x^6 z^2 + H_7^i x^6 u^2 +$$

$$+ H_8^i x^6 yu + H_9^i x^6 y + H_{10}^i x^6 u + H_{11}^i x^5 yz + H_{12}^i x^5 zu + H_{13}^i x^6 +$$

$$+ H_{14}^i x^5 z + H_{15}^i x^4 y^2 + H_{16}^i x^4 z^2 + H_{17}^i x^4 u^2 + H_{18}^i x^4 yz + H_{19}^i x^4 yu +$$

$$+ H_{20}^i x^4 zu + H_{21}^i x^4 y + H_{22}^i x^4 z + H_{23}^i x^4 u + H_{24}^i x^3 y^2 + H_{25}^i x^3 z^2 +$$

$$+ H_{26}^i x^3 u^2 + H_{27}^i x^3 yz + H_{28}^i x^3 yu + H_{29}^i x^3 zu + H_{30}^i x^4 + H_{31}^i x^3 y +$$

$$+ H_{32}^i x^3 z + H_{33}^i x^3 u + H_{34}^i x^2 y^2 + H_{35}^i x^2 z^2 + H_{36}^i x^2 u^2 + H_{37}^i x^2 yz +$$

$$+ H_{38}^i x^2 yu + H_{39}^i x^2 zu + H_{40}^i x^3 + H_{41}^i x^2 y + H_{42}^i x^2 z + H_{43}^i x^2 u + H_{44}^i xy^2 +$$

$$+ H_{45}^i xz^2 + H_{46}^i xu^2 + H_{47}^i xyz + H_{48}^i xyu + H_{49}^i xzu + H_{50}^i x^2 +$$

$$+ H_{51}^i y^2 + H_{52}^i z^2 + H_{53}^i u^2 + H_{54}^i xy + H_{55}^i xz + H_{56}^i xu + H_{57}^i yz +$$

$$+ H_{58}^i yu + H_{59}^i zu + H_{60}^i x + H_{61}^i y + H_{62}^i z + H_{63}^i u + H_{64}^i = 0;$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \qquad (3.5)$$

$$H_3 = H_6 = H_8 = H_{10} = H_{12} = H_{18} = \ldots = H_{26} = H_{28} = H_{29} = H_{31} =$$
$$= H_{33} = H_{35} = H_{37} = \ldots = H_{40} = H_{42} = \ldots = H_{46} = H_{48} = H_{49} =$$
$$= H_{51} = H_{53} = H_{54} = H_{56} = \ldots = H_{64} = 0, \qquad (3.6)$$

$$H_1 = H_{52} = C_2^2 x_5^4 - 4c_2 C_2 x_5^3 + 2C_6 x_5^2 + 4c_2 C_4 x_5 + C_4^2,$$

$$H_2 = H_{47} = \pm 4(C_2 x_5^4 - 2c_2 x_5^3 + 2c_6 x_5^2 - 2c_2 x_5 - C_4),$$

$$H_4 = H_{14} = 4[C_1 C_2 x_5^4 - 2(c_1 C_2 + c_2 C_1) x_5^3 + 2C_7 x_5^2 + 2(c_1 C_4 + c_2 C_3) x_5 + C_3 C_4],$$

$$H_5 = H_{34} = 4(x_5^2 + 1)^2; H_7 = H_{36} = 4H_1; H_9 = \pm 8(C_1 x_5^4 - 2c_1 x_5^3 +$$
$$+ 2c_5 x_5^2 - 2c_1 x_5 - C_3),$$

$$H_{11} = H_{27} = -H_2; H_{13} = H_{50} = 4(C_1^2 x_5^4 - 4c_1 C_1 x_5^3 + 2C_5 x_5^2 +$$
$$+ 4c_1 C_3 x_5 + C_3^2); H_{15} = -2H_5,$$

$$H_{16} = -2H_1; H_{17} = -4H_5 + 8H_1; H_{30} = 2H_{13}; H_{32} = H_{55} = -H_4,$$
$$H_{41} = -H_9 \qquad (3.7-3.20)$$

Semnele sup./inf. corespund respectiv lui $\alpha_{23} = 90°/270°$.

$$c_1 = A_1'' - s_{55} B_1'; c_2 = A_1'; c_3 = B_1'' + s_{55} A_1'; c_4 = B_1'; c_5 = C_1'',$$
$$c_6 = C_1' \qquad (3.21-3.26)$$

$A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1''$ definite la analiza *RCRCR* [10], [13].

$$C_1 = c_3 + c_5; C_2 = c_4 + c_6; C_3 = c_3 - c_5; C_4 = c_4 - c_6; C_5 = 2c_1^2 - c_3^2 + c_5^2,$$

$$C_6 = 2c_2^2 - c_4^2 + c_6^2; C_7 = 2c_1 c_2 - c_3 c_4 + c_5 c_6 \qquad (3.27-3.33)$$

Cazul A.2.1 ($\alpha_{34} = 90°/270°$); $x = \operatorname{tg}(\alpha_{23}/2)$, $y = a_{34}$, $z = a_{23}$, $u = s_{33}$(3.34 – 3.37) din (3.5), H_j, c_p, C_q(3.6–3.33).

Cazul A. 1.1.2.0 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; α_{34} dat); (3.2–3.4) din sistemul:

$$S_1^i y^2 + S_2^i z^2 + S_3^i u^2 + S_4^i yz + S_5^i yu + S_6^i zu + S_7^i y + S_8^i z + S_9^i u + S_{10}^i = 0;$$
$$i = 1, 2, 3 \qquad (3.38)$$

$$S_1 = H_5 x^2 (x^2 - 1)^2; S_2 = H_1 (x^4 - 1)^2; S_3 = 4H_1 x^2 (x^2 + 1)^2 - 4H_5 x^4,$$

$$S_4 = H_2 x (x^2 - 1)(x^4 - 1); S_5 = S_6 = S_9 = 0; S_7 = H_9 x^2 (x^4 - 1),$$

$$S_8 = H_4 x (x^2 + 1)(x^4 - 1); S_{10} = H_{13} x^2 (x^2 + 1)^2 \qquad (3.39-3.46)$$

Cazul A. 1.1.3.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $a_{23} = 0$) (fig. 3); (3.1, 3.3, 3.4) din sistemul (3.5) cu $y = 0$:

$$H_1^i x^8 z^2 + H_3^i x^7 zu + \ldots + H_{60}^i x + H_{62}^i z + H_{63}^i u + H_{64}^i = 0;$$

$$i = 1, 2, 3 \qquad (3.47)$$

$$H_j(3.6 - 3.20),\ c_p,\ C_q(3.21 - 3.33).$$

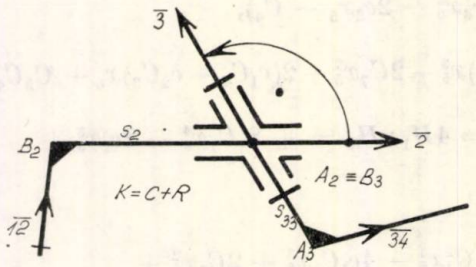


Fig. 3. — Poziția relativă a axelor $\bar{2}$ și $\bar{3}$ în cazul de sinteză pozițională *RCRCR/A.1.1.3.1.*

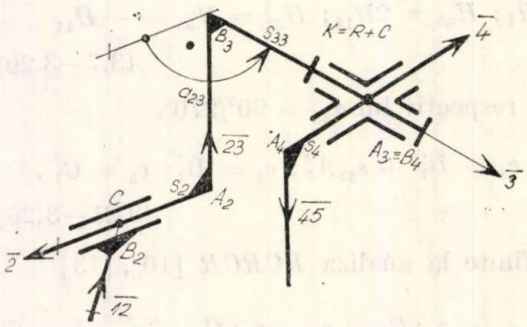


Fig. 4. — Poziția relativă a axelor $\bar{2}$, $\bar{3}$ și $\bar{4}$ în cazul de sinteză pozițională *RCRCR/A.1.1.4.1.*

Cazul A.1.1.4.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $a_{34} = 0$)(fig. 4); (3.1, 3.2, 3.4) din sistemul (3.5) cu $z = 0$:

$$H_5^i x^6 y^2 + \ldots + H_{61}^i y + H_{63}^i u + H_{64}^i = 0;\ i = 1, 2, 3 \qquad (3.48)$$

$$H_j(3.6 - 3.20), c_p, C_q(3.21 - 3.33).$$

Cazul A.1.1.5.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $s_{33} = 0$); (3.1 — 3.3) din sistemul (3.5) cu $u = 0$:

$$H_1^i x^8 z^2 + H_2^i x^7 yz + H_4^i x^7 z + \ldots$$

$$\ldots + H_{62}^i z + H_{64}^i = 0;$$

$$i = 1, 2, 3 \qquad (3.49)$$

$$H_j(3.6 - 3.20), c_p, C_q(3.21 - 3.33).$$

Cazul A.1.1.2.0.3.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; α_{34} dat; $a_{23} = 0$); (3.3, 3.4) din sistemul:

$$S_2^i z^2 + S_3^i u^2 + S_6^i zu + S_8^i z + S_9^i u + S_{10}^i = 0;\ i = 1, 2 \qquad (3.50)$$

$$S_k(3.40 - 3.46).$$

Cazul A.1.1.2.0.4.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; α_{34} dat; $a_{34} = 0$); (3.2, 3.4) din sistemul;

$$S_1^i y^2 + S_3^i u^2 + S_5^i yu + S_7^i y + S_9^i u + S_{10}^i = 0;\ i = 1, 2 \qquad (3.51)$$

$$S_k(3.39 - 3.46).$$

Cazul A.1.1.2.2.4.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $\alpha_{34} = 180°/360°$; $a_{34} = 0$); (3.2, 3.4) din sistemul:

$$H_5^i y^2 + 4H_1^i u^2 - H_9^i y + H_{13}^i = 0;\ i = 1, 2 \qquad (3.52)$$

$$H_j(3.7 - 3.14),\ c_p(3.21 - 3.25),\ C_q(3.27 - 3.32).$$

Cazul A.1.1.2.0.5.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; α_{34} dat; $s_{33} = 0$); (3.2, 3.3) din sistemul:

$$S_1^i y^2 + S_2^i z^2 + S_4^i yz + S_7^i y + S_8^i z + S_{10}^i = 0;\ i = 1, 2 \qquad (3.53)$$

$S_k(3.39 - 3.46)$.

Cazul A.1.1.3.1.4.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $a_{23} = a_{34} = 0$) (fig. 5*a*, *b*); (3.1, 3.4) din sistemul (3.5) cu $y = z = 0$:

$$H_7^i x^6 u^2 + \ldots + H_{60}^i x + H_{63}^i u + H_{64}^i = 0;\ i = 1, 2 \qquad (3.54)$$

$H_j(3.6 - 3.20)$, c_p, $C_q(3.21 - 3.33)$.

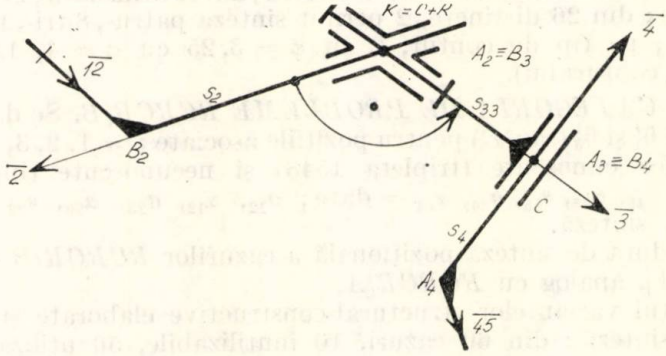


Fig. 5a.

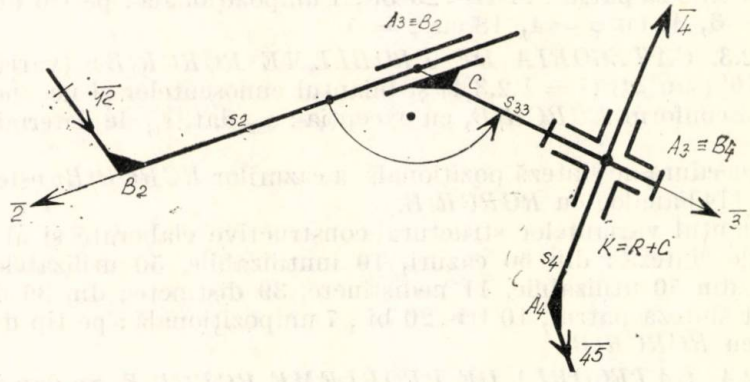


Fig. 5b.

Fig. 5*a* — Poziția relativă a axelor $\bar{2}$, $\bar{3}$ și $\bar{4}$ în cazul de sinteză pozițională *RCRCR/A.1.1.3.1.4.1* (cu multicupla $K = C + R$ pe axele $\bar{2}$ și $\bar{3}$).
Fig. 5*b* — Poziția relativă a axelor $\bar{2}$, $\bar{3}$ și $\bar{4}$ în cazul de sinteză pozițională *RCRCR/A.1.1.3.1.4.1* (cu multicupla $K = R + C$ pe axele $\bar{3}$ și $\bar{4}$).

Cazul A.1.1.3.1.5.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $a_{23} = s_{33} = 0$); (3.1, 3.3) din sistemul (3.5) cu $y = u = 0$:

$$H_1^i x^8 z^2 + H_4^i x^7 z + \ldots + H_{60}^i x + H_{62}^i z + H_{64}^i = 0;\ i = 1, 2 \qquad (3.55)$$

$H_j(3.6 - 3.20)$, c_p, $C_q(3.21 - 3.33)$.

Cazul A.1.1.4.1.5.1 ($\alpha_{23} = 90°/270°$; $a_{34} = s_{33} = 0$); (3.1, 3.2) din sistemul (3.5) cu $z = u = 0$:

$$H_5^i x^6 y^2 + \ldots + H_{61}^i y + H_{64}^i = 0;\ i = 1, 2 \tag{3.56}$$

$$H_j(3.6 - 3.20),\ c_p,\ C_q(3.21 - 3.33).$$

Restul cazurilor *RCRCR/A* sînt tratate în [12], [14]. Bilanțul variantelor structural-constructive elaborate și al posibilităților de realizare a sintezei pentru poziții asociate în problemele *RCRCR/A* : din 60 cazuri, 20 inutilizabile, 40 utilizabile pentru sinteză; din 40 utilizabile, 14 nedistincte, 26 distincte; din 26 distincte, 2 permit sinteza patru-, 8 tri-, 13 bi-, 3 unipoziționlă; pe tip de contur, 2 cu $\varphi = 3,25$ cu $\varphi = 4$, 13 cu $\varphi = 5$ (φ = clasa conturului).

3.2.2. *CATEGORIA DE PROBLEME RCRCR/B.* Se dau perechile de unghiuri θ_1^i și θ_5^i (sau x_5^i) pentru pozițiile asociate $i = 1, 2, 3, 4$ și bilanțul dimensiunilor cunoscute (tripleta 1543) și necunoscute (bipleta 123): a_{15}, α_{15}, s_{11}, a_{45}, α_{45}, s_{55}, a_{34}, α_{34} = date; a_{12}, α_{12}, a_{23}, α_{23}, s_{33} = de determinat prin sinteză.

Procedura de sinteză poziționlă a cazurilor *RCRCR/B* este tratată în [12], [14], analog cu *RCRCR/A*.

Bilanțul variantelor structural-constructive elaborate și al posibilităților de sinteză : din 60 cazuri, 10 inutilizabile, 50 utilizabile pentru sinteză; din 50 utilizabile, 6 nedistincte, 44 distincte; din 44 distincte, 3 permit sinteza patru-, 14 tri-, 26 bi-, 1 unipoziționlă; pe tip de contur, 2 cu $\varphi = 3$, 30 cu $\varphi = 4$, 18 cu $\varphi = 5$.

3.2.3. *CATEGORIA DE PROBLEME RCRCR/Bv* (variantă). Se dau θ_1^i, θ_5^i (sau x_5^i) ($i = 1,2,3,4$) și bilanțul cunoscutelor și necunoscutelor care este conform *RCRCR/B*, cu excepția : s_{33} dat, s_{11} de determinat prin sinteză.

Procedura de sinteză poziționlă a cazurilor *RCRCR/Bv* este tratată în [12], [14] analog cu *RCRCR/B*.

Bilanțul variantelor structural-constructive elaborate și al posibilităților de sinteză : din 60 cazuri, 10 inutilizabile, 50 utilizabile pentru sinteză; din 50 utilizabile, 11 nedistincte, 39 distincte; din 39 distincte, 2 permit sinteza patru-, 10 tri-, 20 bi-, 7 unipoziționlă; pe tip de contur, identic cu *RCRCR/B*.

3.2.4. *CATEGORIA DE PROBLEME RCRCR/F.* Se dau perechile de unghiuri θ_1^i și θ_5^i (sau x_5^i) pentru pozițiile asociate $i = 1,2,3,4$ și bilanțul dimensiunilor cunoscute (baza 15 și bipleta 234) și necunoscute (manivela 12 și balansierul 45) : a_{15}, α_{15}, s_{11}, a_{23}, α_{23}, s_{33}, a_{34}, α_{34} = date, a_{12}, α_{12}, a_{45}, α_{45}, s_{55} = de determinat prin sinteză.

Procedura de sinteză poziționlă a cazurilor *RCRCR/F* este tratată în [12], [14], analog cu *RCRCR/A*.

Bilanțul variantelor structural-constructive elaborate și al posibilităților de sinteză : din 60 cazuri, toate utilizabile pentru sinteză, 6 nedistincte, 54 distincte; din 54 distincte, 3 permit sinteza patru-, 15 tri-, 29 bi-, 7 unipoziționlă; pe tip de contur, 4 cu $\varphi = 3$, 32 cu $\varphi = 4$, 24 cu cu $\varphi = 5$.

3.2.5. *CATEGORIA DE PROBLEME RCRCR/Fv* (variantă). Se dau θ_1^i, θ_5^i (sau x_5^i) ($i = 1,2,3,4$) și bilanțul cunoscutelor și necunoscutelor care este conform *RCRCR/F*, cu excepția : s_{55} dat, s_{11} de determinat prin sinteză.

Procedura de sinteză pozițională a cazurilor *RCRCR/Fv* este tratată în [12], [14], analog cu *RCRCR/F*.

Bilanțul variantelor structural-constructive elaborate și al posibilităților de sinteză : identic cu *RCRCR/F*.

3.2.6. *GENERALIZAREA CAZURILOR „FUNDAMENTALE" RCRCR*

Cazul A.1.1.2.0 (4L) (extinderea cazului *A.1.1.2.0* pentru patru necunoscute liniare) ; (3.2 — 3.4), $v = a_{45}$ (3.57) din sistemul :
$S_1^i y^2 + S_2^i z^2 + S_3^i u^2 + S_{11}^i v^2 + S_4^i yz + S_5^i yu + S_{12}^i yv + S_6^i zu + S_{13}^i zv + S_{14}^i uv + S_{15}^i y + S_{16}^i z + S_{17}^i u + S_{18}^i v + S_{19}^i = 0$; $i = 1, 2, 3, 4$ (3.58), cu coeficienții definiți în [14].

Extinderea (*4L*) a cazurilor derivate din *A.1.1.2.0*, prin particularizările lui (3.58).

Cazul RCRCR (8L) (extinderea sintezei *RCRCR* pentru opt necunoscute liniare) ; $s = a_{12}$, $t = a_{23}$, $u = a_{34}$, $v = a_{45}$, $w = a_{15}$, $x = s_{11}$, $y = s_{33}$, $z = s_{55}$ (3.59 — 3.66) din sistemul :
$H_1^i s^2 + H_2^i t^2 + H_3^i u^2 + H_4^i v^2 + H_5^i w^2 + H_6^i x^2 + H_7^i y^2 + H_8^i z^2 + H_9^i st +$
$+ H_{10}^i su + H_{11}^i sv + H_{12}^i sw + H_{13}^i sx + H_{14}^i sz + H_{15}^i tu + H_{16}^i tv + H_{17}^i tw +$
$+ H_{18}^i tx + H_{19}^i tz + H_{20}^i uv + H_{21}^i uw + H_{22}^i ux + H_{23}^i uz + H_{24}^i vw + H_{25}^i vx +$
$H_{26}^i vz + H_{27}^i wx + H_{28}^i wz + H_{29}^i xz = 0$; $i = 1, \ldots, 8$ (3.67), cu coeficienții definiți în [14].

Extinderea (*8L*) a cazurilor *RCRCR* derivate, prin particularizările lui (3.67).

Cazul A.1.1 (8L, 1U) (extinderea cazului *A.1.1* pentru opt necunoscute liniare și una unghiulară) ; (3.59 — 3.66), $X = \operatorname{tg}(\alpha_{34}/2)$ (3.68) din sistemul :
$P_1^i X^8 u^2 + P_2^i X^7 su + \ldots + P_7^i X^7 uz + P_8^i X^6 s^2 + \ldots + P_{29}^i X^6 xz +$
$+ P_{30}^i X^5 su + \ldots + P_{35}^i X^5 uz + P_{36}^i X^4 s^2 + \ldots + P_{53}^i X^4 xz + P_{54}^i X^3 su + \ldots$
$\ldots + P_{59}^i X^3 uz + P_{60}^i X^2 s^2 + \ldots + P_{81}^i X^2 xz + P_{82}^i X su + \ldots + P_{87}^i X uz +$
$+ P_{88}^i u^2 = 0$; $i = 1, \ldots, 9$ (3.69), cu coeficienții definiți în [14].

Extinderea (*8L, 1U*) a cazurilor derivate din *A.1.1*, prin particularizările lui (3.69).

3.3. SINTEZA MECANISMULUI RCRRC

3.3.1. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ASOCIATE UNGHI-UNGHI.* Se dau perechile de unghiuri θ_3^i, θ_2^i (sau x_2^i) pentru pozițiile asociate $i = 1, \ldots, p$ ale manivelei 34 și balansierului culisant 12, p = numărul dimensiunilor de determinat prin sinteză. Cazurile de sinteză *RCRRC/A, ..., F* se tratează conform procedurii stabilite la § 3.1, 3.2.

Cazul RCRRC/u (8L, 1U) (opt necunoscute liniare și una unghiulară) ; $X = \cos \alpha_{45}$, $Y = \sin \alpha_{45}$, $s = a_{34}$, $t = a_{45}$, $u = a_{15}$, $v = a_{12}$, $w = a_{23}$, $x = s_{33}$, $y = s_{55}$, $z = s_{11}$ (3.70—3.79) din sistemul :
$J_1^i t^2 X^6 + V_2^i tX^5 Y + J_3^i t^2 X^2 Y^4 + (J_4^i t^2 + c_{29}^2 V_4^i) X^4 Y^2 + V_5^i tX^3 Y^3 + \ldots$
$\ldots + V_{20}^i Y^2 + J_{21}^i t^2 X^2 + V_{22}^i tXY = 0$; $i = 1, \ldots, 9$ (3.80), cu necu-

noscutele liniare incluse în J, V. Sistemul prezintă dificultăți de deducere și rezolvare din cauza gradului ridicat (14) și al numărului mare de termeni ($10^2 \ldots 10^3$), problema simplificîndu-se prin particularizările care urmează.

Cazul RCRRC/u (7L, 1U) (șapte necunoscute liniare și una unghiulară) ($a_{45} = 0$; $\alpha_{45} \neq 0°/180°$) ; (3.70, 3.72, 3.74 — 3.79) din sistemul : $c_{29}^2 V_4^i X^4 + 2c_{29} V_{10}^i X^3 + V_{15}^i X^2 + 2V_{18}^i X + V_{20}^i = 0$; $i = 1, \ldots, 8$ (3.81), cu $c_{29}, V_4, \ldots, V_{20}$ definite în [14].

Cazul RCRRC/u(7L) (șapte necunoscute liniare) ($a_{45} = 0$; $\alpha_{45} = 90°/270°$) ; (3.72, 3.74 — 3.79) din sistemul : $V_{20}^i = 0$; $i = 1, \ldots, 7$ (3.82), V_{20} definit la *RCRRC (7L, 1U)*.

3.3.2. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ASOCIATE UNGHI-DEPLASARE AXIALĂ* (generator de șuruburi cu pas variabil) (fig. 1). Se dau perechile de valori θ_1^i, s_5^i pentru pozițiile asociate $i = 1, \ldots, p$ ale manivelei 12 și balansierului culisant 45, p = numărul dimensiunilor de determinat prin sinteză.

Cazul RCRRC/d (4L)/1 (patru necunoscute liniare) ($\alpha_{23} = 0°$; $\alpha_{45} = 90°$) ; $x = s_{33}$, $y = a_{34}$, $z = s_{44}$, $u = a_{45}$ (3.83 — 3.86) din sistemul : $H_1^i x^2 + H_2^i y^2 + H_3^i z^2 + H_4^i u^2 + H_5^i xy + H_6^i xz + H_7^i xu + H_8^i yz + H_9^i yu + H_{10}^i zu + H_{11}^i x + H_{12}^i y + H_{13}^i z + H_{14}^i u + H_{15}^i = 0$; $i = 1, 2, 3, 4$ (3.87), cu coeficienții definiți în [14].

Cazul RCRRC/d(4L)/2(patru necunoscute liniare) ($\alpha_{34} = 0°$; $\alpha_{45} = 90°$) ; $x = s_{11}$, $y = a_{12}$ (3.88—3.89), (3.85—3.86) din (3.87), însă cu coeficienți diferiți [14].

Combinarea cazurilor *RCRRC/A,..., F*, *RCRRC/d(4L)/1,2* cu *RCRRC/u (7L)*, permite sinteza de generatoare *RCRRC* de șuruburi cu pas variabil, care realizează simultan poziții unghiulare și deplasări axiale „output", asociate cu pozițiile unghiulare „input".

3.4. SINTEZA MECANISMULUI RRCRC

3.4.1. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ASOCIATE UNGHI-UNGHI*. Se dau perechile de unghiuri θ_1^i, θ_2^i(sau x_2^i) pentru pozițiile asociate $i = 1, \ldots, p$ ale manivelei 15 și balansierului culisant 32, p = numărul dimensiunilor de determinat prin sinteză. Cazurile de sinteză *RRCRC/A,... ..., F* se tratează conform § 3.1, 3.2.

3.4.2. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ASOCIATE - UNGHI DEPLASARE AXIALĂ* (generator de șuruburi cu pas variabil) (fig. 1).

Cazul RRCRC/d(4L)/1 (patru necunoscute liniare) ($\alpha_{23} = 0°$; $\alpha_{45} = 90°$) ; $x = s_{22}$ (3.88), (3.84—3.86) din (3.87), cu coeficienții definiți în [14].

Cazul RRCRC/d (4L)/2 (patru necunoscute liniare) ($\alpha_{34} = 0°$; $\alpha_{45} = 90°$) ; (3.88, 3.89, 3.85, 3.86) din (3.87), însă cu coeficienți diferiți [14].

Generatoare *RRCRC* de șuruburi cu pas variabil se pot proiecta prin combinații ale cazurilor de la § 3.4.1 și 3.4.2.

4. SINTEZA POZIȚIONAL-CINEMATICĂ A MECANISMELOR SPAȚIALE CU CINCI AXE, PENTRU REALIZAREA DE POZIȚII ȘI VITEZE ASOCIATE

4.1. CONSIDERAȚII PRIVIND SINTEZA POZIȚIONAL-CINEMATICĂ

4.1.1. *Generalități.* Fiind date ip poziții asociate, dacă în iv din acestea se impun și condiții de viteze $\dot{q}_{out}$, viteza $\dot{q}_{inp}$ fiind dată și în general constantă, atunci ip ecuații „input-output" scrise pentru deplasări și iv ecuații scrise pentru deplasări și vitezele asociate respective, formează un sistem de ecuații de sinteză ale cărui soluții reprezintă $i = ip + iv$ (04.1) parametri dimensionali ai mecanismului. Pozițiile asociate corespunzătoare celor iv condiții de viteze trebuie să fie cuprinse în cele ip condiții de poziții, adică să fie deja validate ca soluții ale ecuațiilor de sinteză pozițională, deci sinteza poziționat-cinematică este realizabilă cu condiția : $iv \leqslant ip$ (04.2). Conform § 3.1.3, numărul maxim de necunoscute este și aici $i_{max} = 9$, din care cel mult o dimensiune unghiulară. Rezultă că i dimensiuni ale mecanismului se pot determina dintr-un sistem compus din $ip = 1, \ldots, m$ ecuații de poziții și $iv = 0, \ldots, n$ ecuații de viteze, ip, iv îndeplinind condițiile (04.1—04.2). Cazurile de sinteză cinematică se simbolizează cu V și ($ip + iv$), iar necunoscutele rămîn cele definite la sinteza pozițională.

4.1.2. *Metodica de deducere a ecuațiilor pentru sinteza poziționat-cinematică a mecanismelor 3R—2C.* Ecuațiile de poziții au forma stabilită la § 3.2 — 3.4. Ecuațiile de viteze se deduc prin derivarea acestora, ceea ce revine de fapt la derivarea totală în raport cu timpul a coeficienților H_j^i :

$$\dot{H}_j^{iv} = H_{j,inp}^{iv} + H_{j,out}^{iv}\,;\; H_{j,inp}^{iv} = \frac{\partial H_j^{iv}}{\partial q_{inp}}\,\dot{q}_{inp}\,;\; H_{j,out}^{iv} = \frac{\partial H_j^{iv}}{\partial q_{out}}\,\dot{q}_{out} \quad (4.6—4.8)$$

Gradul sistemului se conservă, iar numărul de soluții și selecția lor se stabilesc conform § 3.1.5.

4.1.3. *Cîteva tipuri de probleme de sinteză poziționat-cinematică.* Sistemul general de sinteză cinematică stabilit conform § 4.1.2 permite, prin particularizare, tratarea unor cazuri de proiectare uzuale, ca : sinteza pentru m poziții și n viteze asociate (cazul general), sinteza pentru poziții extreme, sinteza pentru realizarea unui coeficient de productivitate impus, clasificarea după unghiul de rotație al elementelor conducător și condus, etc. [14].

4.2. SINTEZA MECANISMULUI RCRCR

$$x_5^{iv} = \operatorname{tg}(\theta_5^{iv}/2),\; \dot{x}_5^{iv} = \dot{\theta}_5^{iv}/[2\cos^2(\theta_5^{iv}/2)] \quad (4.1)$$

Cazul A.V.1.1. Ecuațiile de poziții-viteze din (3.5) prin substituțiile :

$$H_j^i \to \dot{H}_j^{iv}(4.2)\,;\; \dot{H}_j^{iv} = H_{j,1}^{iv} + H_{j,5}^{iv} \quad (4.3)$$

$$H_{1,1} = H_{52,1} = 2[C_2C_9x_5^4 - 2(c_2C_9 + c_8C_2)x_5^3 + C_{13}x_5^2 + 2(c_2C_{11} + c_8C_4)x_5 + C_4C_{11}],$$

$$H_{2,1} = H_{47,1} = \pm 4(C_9x_5^4 - 2c_8x_5^3 + 2c_{12}x_5^2 - 2c_8x_5 - C_{11}),$$

$$H_{4,1} = H_{14,1} = 4[(C_1C_9 + C_2C_8)x_5^4 - 2(c_1C_9 + c_2C_8 + c_7C_2 + c_8C_1)x_5^3 +$$

$$+ 2C_{14}x_5^2 + 2(c_1C_{11} + c_2C_{10} + c_7C_4 + c_8C_3)x_5 + C_3C_{11} + C_4C_{10}],$$

$$H_{5,1} = H_{34,1} = 0\,;\ H_{7,1} = H_{36,1} = 4H_{1,1},$$

$$H_{9,1} = \pm 8(C_8x_5^4 - 2c_7x_5^3 + 2c_{11}x_5^2 - 2c_7x_5 - C_{10})\,;\ H_{11,1} = H_{27,1} = -H_{2,1},$$

$$H_{13,1} = H_{50,1} = 8[C_1C_8x_5^4 - 6(c_1C_8 + c_7C_1)x_5^3 + 2C_{12}x_5^2 + 2(c_1C_{10} + c_7C_3)x_5 +$$

$$+ C_3C_{10}],$$

$$H_{15,1} = -2H_{5,1}\,;\ H_{16,1} = -2H_{1,1}\,;\ H_{17,1} = 8H_{1,1}\,;\ H_{30,1} = 2H_{13,1},$$

$$H_{32,1} = H_{55,1} = -H_{4,1}\,;\ H_{41,1} = -H_{9,1} \qquad (4.4-4.17)$$

$$H_{1,5} = H_{52,5} = 4(C_2^2x_5^3 - 3c_2C_2x_5^2 + C_6x_5 + c_2C_4)\dot{x}_5,$$

$$H_{2,5} = H_{47,5} = \pm 8(2C_2x_5^3 - 3c_2x_5^2 + 2c_6x_5 - c_2)\dot{x}_5,$$

$$H_{4,5} = H_{14,5} = 8[2C_1C_2x_5^3 - 3(c_1C_2 + c_2C_1)x_5^2 + 2C_7x_5 + c_1C_4 + c_2C_3]\dot{x}_5,$$

$$H_{5,5} = H_{34,5} = 16(x_5^2 + 1)x_5\dot{x}_5\,;\ H_{7,5} = H_{36,5} = 4H_{1,5},$$

$$H_{9,5} = \pm 16(2C_1x_5^3 - 3c_1x_5^2 + 2c_5x_5 - c_1)\dot{x}_5\,;\ H_{11,5} = H_{27,5} = -H_{2,5},$$

$$H_{13,5} = H_{50,5} = 16(C_1^2x_5^3 - 3c_1C_1x_5^2 + C_5x_5 + c_1C_3)\dot{x}_5,$$

$$H_{15,5} = -2H_{5,5}\,;\ H_{16,5} = -2H_{1,5}\,;\ H_{17,5} = -4H_{5,5} + 8H_{1,5}\,;\ H_{30,5} = 2H_{13,5},$$

$$H_{32,5} = H_{55,5} = -H_{4,5}\,;\ H_{41,5} = -H_{9,5} \qquad (4.18-4.31)$$

Semnele sup./inf. corespund respectiv lui $\alpha_{23} = 90°/270°$.
c_p, C_q definite în [14].

Posibilitățile de sinteză cinematică : a) $i = 4$: ip, $iv = 4{,}0$ (A.1.1) ; 3,1 (A. V. 1.1 (3 + 1)) ; 2,2(A. V. 1. 1 (2 + 2)) ; b) $i = 3$: ip, $iv = 3{,}0$ (A.1.1.3.1, A.1.1.4.1, A.1.1.5.1) ; 2,1 (A.V .... (2 + 1)) ; c) $i = 2$: ip, $iv = 2{,}0$ (A.1.1.3.1.4.1, A.1.1.3.1.5.1, A.1.1.4.1.5.1) ; 1,1(A.V.... (1+1)).

Cazul A.V.1.1.2.0. Ecuațiile de poziții-viteze din (3.38) prin substituțiile : $S_k^i \to \dot{S}_k^{iv}$(4.32) ; $\dot{S}_k^{iv} = S_{k,1}^{iv} + S_{k,5}^{iv}$(4.33), cu $S_{k,1}$, $S_{k,5}$ definite în [14]

Posibilitățile de sinteză cinematică : a) $i=3$: ip, $iv = 3{,}0$ (A.1.1.2.0) ; 2,1(A.V.1.1.2.0(2+1)) ; b) $i = 2$: ip, $iv = 2{,}0$ (A.1.1.2.0.3.1, A.1.1.2.0.4.1, A.1.1.2.0.5.1) ; 1,1(A.V....(1+1)).

Cazul A.V.1.1.2.0 (4L). Ecuațiile de poziții-viteze din (3.58) prin (4.32—4.33), cu $S_{k,1}$, $S_{k,5}$ definite în [14].

Posibilitățile de sinteză cinematică sînt date de soluțiile întregi pozitive ale sistemului (04.1—04.2) pentru $i = 4$.

Cazul RCRCR.V.(*8L*). Ecuațiile de poziții-viteze din (3.67) prin (4.2—4.3), cu $H_{j,1}$, $H_{j,5}$ definite în [14].

Posibilitățile de sinteză cinematică sînt date de soluțiile întregi pozitive ale sistemului (04.1—04.2) pentru $i = 8$.

Cazul RCRCR.V.(*8L, 1U*). Ecuațiile de poziții-viteze din (3.69) prin substituțiile : $P_p^i \to \dot{P}_p^{iv}$(4.34), cu $\dot{P}_p^{iv}$ definite în [14].

Posibilitățile de sinteză cinematică sînt date de soluțiile întregi pozitive ale sistemului (04.1—04.2) pentru $i = 9$.

4.3. SINTEZA MECANISMULUI RCRRC

4.3.1. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ȘI VITEZE ASOCIATE UNGHI-UNGHI.* $x_2^{iv} = \operatorname{tg}(\theta_2^{iv}/2)$, $\dot{x}_2^{iv} = \dot{\theta}_2^{iv}/[2\cos^2(\theta_2^{iv}/2)]$ (4.35 — 4.36). Cazurile *RCRRC/A.V.*,..., *F.V.* se obțin prin extinderea pentru condiții de viteze a cazurilor *RCRRC/A*,...,*V*, conform procedurii stabilite la § 4.2.

Cazul RCRRC/u.V.(*7L*). Ecuațiile de poziții-viteze din (3.82) prin substituțiile : $E_r^i \to \dot{E}_r^{iv}$ (4.37).

$\dot{E}_r^{iv} = E_{r,3}^{iv} + E_{r,2}^{iv}$(4.38), cu $E_{r,3}^{iv}$, $E_{r,2}^{iv}$ definite în [14].

Posibilitățile de sinteză cinematică sînt date de soluțiile întregi pozitive ale sistemului (04.1—04.2) pentru $i = 7$.

4.3.2. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ȘI VITEZE ASOCIATE UNGHI-DEPLASARE AXIALĂ* (generator de șuruburi cu pas și viteză axială variabile) (fig. 1). Ecuațiile de poziții-viteze în *cazurile RCRRC/d.V.*(*4L*)/*1,2* din (3.87) prin (4.2—4.3), cu coeficienții definiți în [14].

4.4. SINTEZA MECANISMULUI RRCRC

4.4.1. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ȘI VITEZE ASOCIATE UNGHI-UNGHI.* Cazurile *RRCRC/A.V.*,...,*F.V.* se obțin prin extinderea pentru condiții de viteze a cazurilor *RRCRC/A*,...,*V*, conform §. 4.2.

4.4.2. *SINTEZA PENTRU POZIȚII ȘI VITEZE ASOCIATE UNGHI-DEPLASARE AXIALĂ* (generator de șuruburi cu pas și viteză axială variabile) (fig. 1). *Cazurile RRCRC/d.V.*(*4L*)/*1,2.* Ecuațiile de poziții-viteze și componentele lor sînt identice cu *RCRRC/d.V.*(*4L*)/*1,2*, cu modificările precizate în [14].

Posibilitățile de sinteză cinematică sînt date de soluțiile întregi pozitive ale sistemului (04.1—04.2) pentru $i = 4$.

Generatoare *RCRRC* și *RRCRC* de șuruburi, care realizează simultan deplasări și viteze unghiulare și axiale, se pot proiecta prin combinații ale cazurilor de la § 4.3.1, 4.3.2, respectiv 4.4.1, 4.4.2.

5. PARTE EXPERIMENTAL-APLICATIVĂ: PROIECTAREA CINEMATICĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR A MECANISMELOR SPAȚIALE CU CINCI ELEMENTE

În scopul realizării sintezei cinematice pentru poziții și viteze asociate, asistată de calculatorul FELIX C-256, a mecanismelor $3R-2C$, autorii au elaborat colecția de „software" SYPAMES5, în cadrul căreia au fost dezvoltate, în limbajul FØRTRAN *IV*, programe de rezolvare numerică a celor 14 cazuri $RCRCR/A$ ($\alpha_{23} = 90°$), constituite din combinații ale subrutinelor CØEFA11, SEARCHA11, REFSØLA11, SØLVA1120, VERIFA11.

Cu ajutorul calculatorului, prin metoda de sinteză cinematică propusă de autori, au fost proiectate 42 de mecanisme spațiale cu $n = 5$ și $\varphi = 3; 4; 5$, cu cuple mono- și multiaxe, cu și fără constrîngeri ($f = 1; 0$), desmodrome ($M_f = 1$), din diverse domenii aplicative [14].

6. CONCLUZII

Ca o concluzie generală, se apreciază că etapele elaborate în cadrul prezentului studiu (metoda, variantele structural-constructive originale, instrumentul matematic și procedura de proiectare pe calculator) demonstrează pe deplin posibilitatea sintezei cinematice a mecanismelor spațiale cu $n = 5$ axe, chemate să satisfacă o gamă largă de cerințe funcționale determinate de utilizarea lor în diferite tehnici și în special în cele de avangardă, cum sînt tehnica manipulatorilor și tehnica aerospațială.

Procedura elaborată pentru proiectarea asistată de calculator permite sinteza cinematică operativă a unei palete largi de scheme structural-constructive, cu condiții impuse dintre cele mai variate, fiind nemijlocit utilizabilă de către proiectanții de astfel de sisteme.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Antonescu, P. Nițescu, N. I. Manolescu, *Kinematic aspects of some spatial mechanisms used for moto-mowers cutting device driving*, Communic. of 3rd World Congr. for TMM, Kupari, Sept. 1971, **H**, Paper H—1.
2. J. Duffy, H. Y. Habib-Olahi, *Displacement analysis of spatial five-link* $3R-2C$ *mechanisms. Part* 1: *On the closures of the RCRCR mechanism*, J. Mech., **6**, *3* (1971); *Part* 2: *Analysis of the RRCRC mechanism*, J. Mech., **6**, *4*(1971); *Part* 3: *Analysis of the RCRRC mechanism*, J. Mech., **7**, *1* (1972).
3. N. I. Manolescu, *For a united point of view in the study of the structural analysis of kinematic chains and mechanisms*, J. Mech., **3**, *3* (1968).
4. N. I. Manolescu, *Contribuții la sinteza numerică, structurală și cinematică a grupelor Assur, a lanțurilor cinematice, a mecanismelor și mecanismelor motor plane articulate*, Teză, I. P. București, august, 1969.
5. P. Nițescu, P. Antonescu, N. I. Manolescu, *Analiza structurală și cinematică a mecanismelor spațiale utilizate pentru antrenarea cuțitului la motocositorile pentru pante*, Ses. șt. XIII I. P. București, mai, 1970.
6. P. Nițescu, P. Antonescu, N. I. Manolescu, *Structural aspects of some spatial mechanisms used for moto-mowers cutting device driving*, Communications of 3rd World Congress for TMM, Kupari, Sept., 1971, **G**, Paper G—11.
7. P. Nițescu, N. I. Manolescu, *Analiza pozițională și cinematică a unui mecanism spațial cu cinci elemente de tipul RSRRR*, Ses. șt. XIV I. P. București, dec., 1972.
8. P. Nițescu, N. I. Manolescu, *Positional and kinematic analysis of a five-link RSRRR spatial driving mechanism*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **18**, *1* (1973).

9. P. NIȚESCU, *Stadiul actual al metodelor de cercetare a aspectelor structurale, cinematice și dinamice ale mecanismelor spațiale*, Ref. doct. Nr. 1, I. P. București, martie, 1973.
10. P. NIȚESCU, *Analiza structurală, cinematică și dinamică a mecanismelor spațiale cu cinci elemente*, Ref. doct. Nr. 2, I. P. București, aprilie, 1973.
11. P. NIȚESCU, N. I. MANOLESCU, *Derivation of displacement equations for five-link spatial mechanisms through dual quaternion method*, Proceedings of 1st International Symposium on Linkages, C, Paper C-34, Bucarest, June, 1973.
12. P. NIȚESCU, *Sinteza mecanismelor spațiale cu cinci elemente pe baza condiiilor geometrice, cinematice și dinamice impuse la proiectare*, Ref. doct. Nr. 3, I. P. București, febr., 1974.
13. P. NIȚESCU, *Manualul Ing. Mecanic Vol. III (capitolul „Analiza mecanismelor spațiale cu patru și cinci elemente")*, Edit. Tehn., București, 1976.
14. P. NIȚESCU, *Contribuții la sinteza mecanismelor spațiale cu cinci elemente*, Teză, I. P. București, iunie, 1975.
15. A. H. SONI, M. HUANG, *Synthesis of four-link space mechanisms via extension of point-position-reduction technique*, ASME Paper 70-Mech-17, 11th ASME Mechanisms Conference, Columbus, Ohio, Nov., 1970.
16. A. T. YANG, *Application of quaternion algebra and dual numbers to the analysis of spatial mechanisms*, Doctoral Dissertation, Columbia University, New York, 1963.

STUDIUL RĂSPUNSULUI DINAMIC AL PRINCIPALELOR TIPURI DE MAŞINI VIBRATOARE ACŢIONATE MECANIC

de GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, I. CONSTANTINESCU

Institutul politehnic Bucureşti

Se face o analiză comparativă a răspunsului în frecvenţă al principalelor tipuri de maşini vibratoare acţionate mecanic şi se formulează concluzii privind stabilirea performanţelor, posibilităţilor tehnice de realizare şi a tipului adecvat pentru anumite date ale problemei.

Încercările la vibraţii ale diferitelor aparate şi subansamble pot avea drept scop :

— determinarea răspunsului acestora la anumite excitaţii care pot apare în timpul funcţionării ;

— examinarea comportării lor la vibraţii de anumite mărimi şi frecvenţe, modelînd în acest fel situaţiile întîlnite în funcţionare (încercări de oboseală, fiabilitate etc.).

Pentru ambele scopuri se utilizează generatoare de vibraţii, care poartă diferite denumiri (vibratoare, mese vibratoare, maşini vibratoare, standuri sau instalaţii complexe pentru produs şi măsurat vibraţii).

Regimurile de vibraţii la care se fac încercări caută să reproducă pe cele întîlnite în timpul funcţionării. În acest sens, regimurile de vibraţii pot xă varieze de la cele mai simple — semnale armonice sau periodice de anumite forme — pînă la vibraţii aleatoare.

Pentru studiile de oboseală şi fiabilitate făcute pe maşini vibratoare există diferite norme, referitoare la forma semnalului, mărimea vibraţiilor şi frecvenţa lor. Întrucît cele mai multe studii de comportare a utilajelor la vibraţii au fost făcute pentru excitaţii armonice, în literatură se găsesc în special date referitoare la amplitudini limită admisibile. Pentru frecvenţe joase se ia drept criteriu amplitudinea deplasărilor, pentru frecvenţe ridicate — cea a acceleraţiilor ; astăzi se tinde tot mai mult ca să se ia drept criteriu mărimea vitezei eficace. Pentru echipamentele electrice din dotarea materialului rulant de cale ferată, încercările la vibraţii sînt prescrise în normele UIC [1]. La încercările de fiabilitate, în afara celor doi parametri caracteristici ai vibraţiilor armonice, amplitudinea şi frecvenţa, interesează şi durata menţinerii obiectului la regimul stabilit.

Normele UIC prescriu valori limită ale deplasărilor în funcţie de frecvenţă, în gama 1—10 Hz, respectiv în funcţie de pătratul frecvenţei, în gama 10—50 Hz, ceea ce corespunde de fapt unor limite pentru viteze în primul caz şi pentru acceleraţii în al doilea caz.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 369—379

Maşinile vibratoare destinate acestor încercări trebuie să producă vibraţii cu parametri stabiliţi, menţinîndu-le constante pe duratele impuse. Pentru a satisface aceste variate deziderate, maşina trebuie să aibă o serie de elemente reglabile, care se stabilesc pe baza cunoaşterii răspunsului în frecvenţă al ansamblului maşină-obiect la diferite excitaţii.

În lucrarea de faţă se studiază comparativ diferite maşini vibratoare cu acţionare mecanică, concluziile servind la stabilirea performanţelor şi a tipului cel mai potrivit pentru anumite date ale problemei. În cazul particular ce va fi studiat, interesează îndeosebi încercarea unor obiecte cu masa de circa 100 kg, în gama de frecvenţe 1—100 Hz.

2. MODELUL GENERAL DE CALCUL AL VIBRAŢIILOR OBŢINUTE LA MAŞINA VIBRATOARE MECANICĂ

2.1. SCHEMA CINEMATICĂ ŞI MODELUL DINAMIC

În figura 1 este prezentată schema cinematică generală a unei maşini vibratoare cu acţionare mecanică. Ea a fost astfel concepută, încît, prin particularizare, să rezulte diferite tipuri de maşini vibratoare de acest fel. Maşina are următoarele părţi componente :

a). *Masa maşinii*, pe care se fixează obiectul supus încercării.

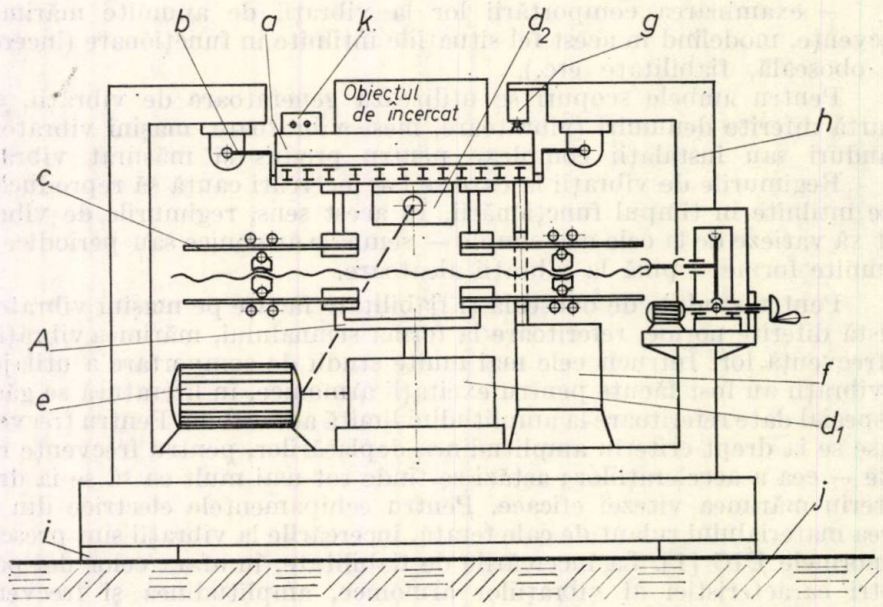


Fig. 1

b). *Suspensia statică*, destinată preluării greutăţii mesei maşinii şi a obiectului. Ea are şi rolul de a limita deplasările laterale şi cele de balans ale mesei.

c). *Suspensia dinamică*. Este elementul elastic prin care la anumite tipuri de maşini se transmite semnalul generat de sursa de vibraţii a maşinii.

Prin modificarea rigidității lui, se obține schimbarea frecvenței proprii a sistemului oscilant la mașinii.

d). *Excitatorul (generatorul de vibrații)*. Este un ansamblu interschimbabil, care introduce în sistemul oscilant un semnal periodic (forță sau deplasare) întreținînd vibrațiile mesei mașinii. Construcția excitatorului și amplasarea lui în ansamblul mașinii vibratoare depind de tipul semnalului (forță sau deplasare) pe care îl produce. Se iau în considerare două feluri de excitatoare :

d_1 — excitator cu antrenare directă, de tip mecanism bielă-manivelă (fig. 2*a*), mecanism sinus (fig. 2*b*) etc., care produce o deplasare variabilă a elementului de prindere *A* (fig. 1) al suspensiei dinamice. Excitatorul de acest tip se amplasează între suspensia dinamică și fundația mașinii.

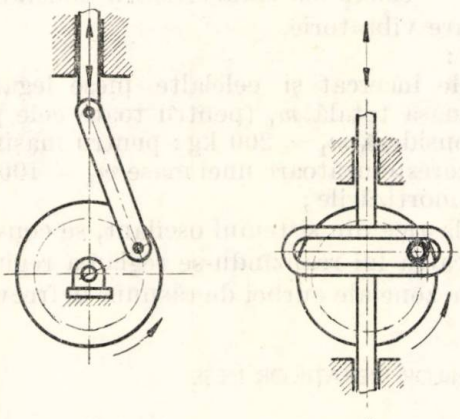
d_2 — excitator cu mase excentrice care se rotesc în sensuri opuse (fig. 3), producînd o forță rezultantă sinusoidală de direcție constantă. Acest excitator se fixează de masa mașinii vibratoare, elementul de prindere *A* al suspensiei dinamice legîndu-se direct de batiul mașinii.

e). *Sistemul de antrenare al excitatorului*. Este format din motorul electric, variator și aparatura electrică de comandă.

f). *Sistemul de reglare a amortizărilor*. Este un disipator de energie, destinat, unui reglaj fin al vibrațiilor.

g). *Sistemul de protecție* împotriva suprasolicitărilor elementelor mașinii. Este un întrerupător-limitator.

h). *Șasiul* mașinii.



a b

Fig. 2

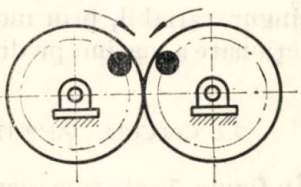


Fig. 3

i). *Suspensia elastică între șasiu și fundație.*

j). *Fundația.*

k). *Aparatura pentru măsurarea vibrațiilor mesei.*

La o frecvență dată, răspunsul sistemului oscilant al mașinii vibratoare excitată armonic poate fi exprimat prin mărimea amplitudinii deplasării, a vitezei sau a accelerației mesei *a*. Pentru determinarea acestui răspuns în funcție de frecvență se folosește modelul dinamic al sistemului oscilant [2].

Modelul dinamic din figura 4 reprezintă într-o formă generală, diferite tipuri de maşini vibratoare mecanice. Prin particularizare se obţine modelul dinamic al maşinii vibratoare din figura 1, precum şi alte modele ce vor fi prezentate în tabelul 1.

Parametrii vibraţiilor mesei maşinii m_1 din figura 4 depind în principal de următorii factori :

— mărimea maselor în mişcare ;

— caracteristicile suspensiilor acestor mase şi ale elementelor elastice de legătură dintre diferitele componente ale maşinii ;

— tipul excitatorului şi caracteristicile lui ;

— mărimea amortizărilor ;

— frecvenţa.

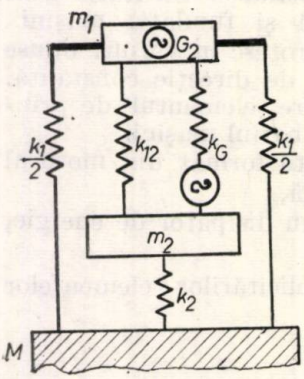


Fig. 4

Influenţa acestora asupra răspunsului dinamic al maşinilor vibratoare este deosebit de complexă. În lucrarea de faţă se face un studiu comparativ al următoarelor tipuri de maşini vibratoare ;

A — cu excitator avînd mase excentrice în rotaţie ;

B — cu acţionare directă printr-un element elastic cu caracteristică variabilă ;

C — cu acţionare directă printr-un element elastic cu caracteristică constantă ;

D — cu două mase în mişcare vibratorie.

Se fac următoarele ipoteze :

— masa maşinii, obiectul de încercat şi celelalte piese legate de masă alcătuiesc un rigid avînd masa totală m_1 (pentru toate cele patru tipuri de maşini menţionate se consideră $m_1 = 200$ kg ; pentru maşina de tip B se studiază şi varianta B*, corespunzătoare unei mase $m_1 = 400$ kg) ;

— nu se iau în considerare amortizările ;

— dintre toate elementele elastice din sistemul oscilant, se consideră unul singur variabil, prin modificarea lui realizîndu-se reglarea regimului de funcţionare a maşinii pe diferite zone ale curbei de răspuns în frecvenţă.

2.2. CALCULUL AMPLITUDINILOR VIBRAŢIILOR MESEI

În figura 5 este reprezentată schema de calcul a modelului din figura 4, în care masele m_1 şi m_2 au fost înlocuite prin constantele elastice aparente ($-m_1\omega^2$ şi $-m_2\omega^2$), conform definiţiei din lucrarea [3]. În acest fel, în ecuaţiile de mişcare vor interveni numai mărimi reale. Fundaţia M este considerată imobilă şi, ca urmare, nu intervine în ecuaţiile de mişcare.

La construcţiile obişnuite există unul dintre excitatorii G_1, G_2. Pentru generalitate, se va considera acţiunea simultană a ambilor excitatori, cu aceeaşi pulsaţie ω, urmînd ca pentru construcţii practice, prin particularizare să se obţină relaţii valabile atunci cînd funcţionează numai cîte unul dintre ei.

Excitatorul G_1 produce pe latura $1-b$ a schemei din figura 5 o forţă

$$F_{G_1} = r_0 m_0 \omega^2 \sin \omega t, \tag{1}$$

unde $r_0 m_0$ este dezechilibrul dinamic al maselor excentrice. Excitatorul G_2 introduce un semnal sub formă de deplasare,

$$X_{G_2} = R_0 \sin \omega t, \tag{2}$$

unde R_0 este o constantă (de exemplu raza excentricului).

Deplasările armonice ale maselor m_1 şi m_2 sînt :

$$x_1 = a_1 \sin \omega t, \qquad x_2 = a_2 \sin \omega t. \tag{3}$$

Nodurile 1 şi 2 ale schemei din figura 5 au deplasări egale cu cele ale maselor m_1, respectiv m_2. Se scrie echilibrul forţelor din figura 5 *b* :

$$F_{1-a} + F_{1-b} = F_{1-2} = F_{2-c} + F_{2-d}, \tag{4}$$

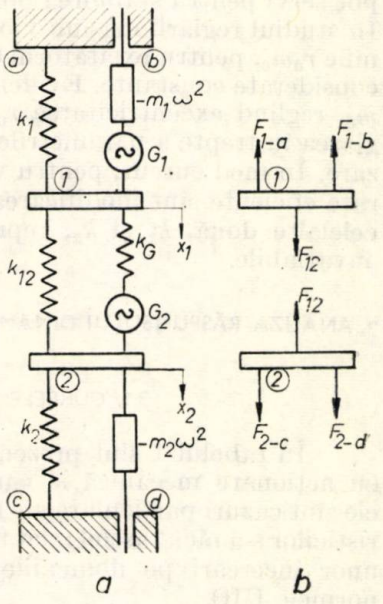


Fig. 5

în care

$$F_{1-a} + F_{1-b} = (k_1 - m_1 \omega^2)\, x_1 + F_{G_1},$$

$$F_{1-2} = k_{12}(x_2 - x_1) + k_G(x_2 - x_1 + x_{G_2}), \tag{5}$$

$$F_{2-c} + F_{2-d} = -(k_2 - m_2\omega^2)x_2.$$

Introducînd (3) şi (5) în (4), după unele simplificări se obţin ecuaţiile amplitudinilor a_1 şi a_2 :

$$a_1(k_1 - m_1\omega^2) + r_0 m_0 \omega^2 = (a_2 - a_1)(k_{12} + k_G) + R_0 k_G = -a_2(k_2 - m_2\omega^2). \tag{6}$$

Din (6) rezultă :

$$a_1 = \frac{-r_0 m_0 \omega^2 (k_{12} + k_G + k_2 - m_2\omega^2) + R_0 k_G (k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) + (k_{12} + k_G)(k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)}, \tag{7}$$

$$a_2 = \frac{-r_0 m_0 \omega^2 (k_{12} + k_G) + R_0 k_G (k_1 - m_1\omega^2)}{(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) + (k_{12} + k_G)(k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)}.$$

Considerînd vibrațiile armonice, din (7) se deduc prin înmulțire cu ω, respectiv cu ω^2, amplitudinile vitezelor v_1 și ale accelerațiilor w_1.

Relațiile (7) arată factorii de care depind amplitudinile a_1 și a_2, deci pot servi pentru stabilirea posibilităților de reglare a parametrilor mașinii. În studiul reglării mașinii vibratoare, care va fi făcut în continuare, mărimile $r_0 m_0$, pentru excitatorul G_1, respectiv R_0, pentru excitatorul G_2, vor fi considerate constante. Evident ,și acestea pot fi modificate înlocuind masa m_0, reglînd excentricitatea r_0 sau amplitudinea R_0, fapt care duce la reglarea în trepte a parametrilor mașinii, mărind astfel domeniul ei de utilizare. În mod curent, pentru variația amplitudinii a_1, modalitățile considerate eficiente sînt modificarea constantei elastice k_{12} sau a constantei k_G; celelalte două, k_1 și k_2, reprezentînd suspensii statice, rămîn cu valori invariabile.

3. ANALIZA RĂSPUNSULUI DINAMIC LA UNELE TIPURI DE MAȘINI VIBRATOARE MECANICE

3.1. CURBELE DE RĂSPUNS ÎN FRECVENȚĂ

În tabelul 1 sînt prezentate principalele tipuri de mașini vibratoare cu acționare mecanică și caracteristicile pentru care au fost calculate : ele sînt cazuri particulare ale modelului din figurile 4 și 5. Alegerea caracteristicilor s-a făcut astfel încît mașinile să fie ușor realizabile și să corespundă unor încercări pe domeniile de frecvențe și amplitudini prevăzute în normele UIC.

Curbele de răspuns în frecvență pentru cele cinci mașini vibratoare considerate sînt date în figurile 6 — 10. S-au notat cu cifrele 1, 2, 3, 4 și 5 ramurile acestor curbe înainte de rezonanță, cu 1′, 2′, 3′, 4′ și 5′, curbele după rezonanță, respectiv cu O curbele reprezentînd amplitudinile prescrise de normele UIC. Pentru unele comparații au mai fost reprezentate curbe corespunzătoare unor amplitudini constante ale vitezelor, notate $v_1 = \text{const.}$

3.2. ANALIZA RĂSPUNSULUI ÎN FRECVENȚĂ

În cadrul analizei s-au avut în vedere :

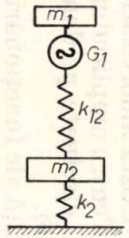
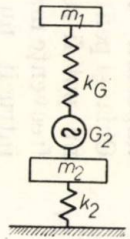
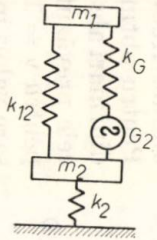
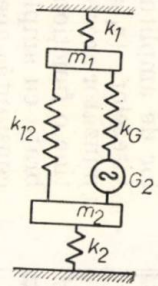
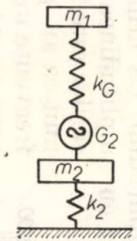
— domeniile de frecvențe și mărimile cinematice (deplasări, viteze, accelerații) pentru care mașina are o funcționare bună, stabilă și cu reglaje simple ;

— modul în care mașina corespunde unor încercări de vibrații cu amplitudini date (de exemplu, după normele UIC) ; se va analiza care dintre curbele de răspuns în frecvență se apropie cel mai mult de cele prescrise de norme.

A. Mașina vibratoare cu excitator avînd mase excentrice în rotație (fig. 6)

În afara unor domenii restrînse de frecvențe din apropierea rezonanțelor, curbele 1′—4′ din figura 6*a* corespund amplitudinii constante

Tabelul 1

Tipul mașinii	Cu excitator avînd mase excentrice în rotație A	Cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristica variabilă B	Cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristică constantă C	Cu două mase în mișcare vibratorie D	Cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristică variabilă, varianta cu $m_1 = 400$kg B*
Modelul dinamic					
$r_0 m_0$ kg.cm	10	—	—	—	—
R_0 cm	—	1	1	1	1
m_1 kg	200	200	200	200	400
m_2 kg	500	500	4000	300	4000
k_1 daN/cm	—	—	—	8	—
k_2 daN/cm	$7{,}9 \cdot 10^5$	$7{,}9 \cdot 10^5$	—	10	$1{,}8 \cdot 10^6$
k_{12} daN/cm	8 — 92000	—	4 — 89250	0,77 — 47370	—
k_G daN/cm	—	8 — 92000	—	1,5	150 — 60000
Observații	m_2 reprezintă masa mașinii (în afară de m_1). Amplitudinile vibrațiilor ei (a_2) sînt foarte mici.			Amplitudinile maselor m_1 și m_2 sînt comparabile	$a_2 \approx 0$

$a_1 = 0{,}5$ mm. Întrucît se obține această amplitudine indiferent de valoare a constantei k_{12}, rezultă că amplitudinea poate fi modificată doar prin variația dezechilibrului dinamic $r_0 m_0$. Chiar și în acest mod, sînt posibile reglaje numai într-un domeniu mic de amplitudini. Ca urmare și domeniul de utilizare a mașinii pentru încercări cu amplitudinea constantă a deplasărilor este limitat. În mod obișnuit ea ar putea fi folosită la frecvențe de 10—30 Hz, pentru care se recomandă încercări la amplitudini de 0,4—2,0 mm.

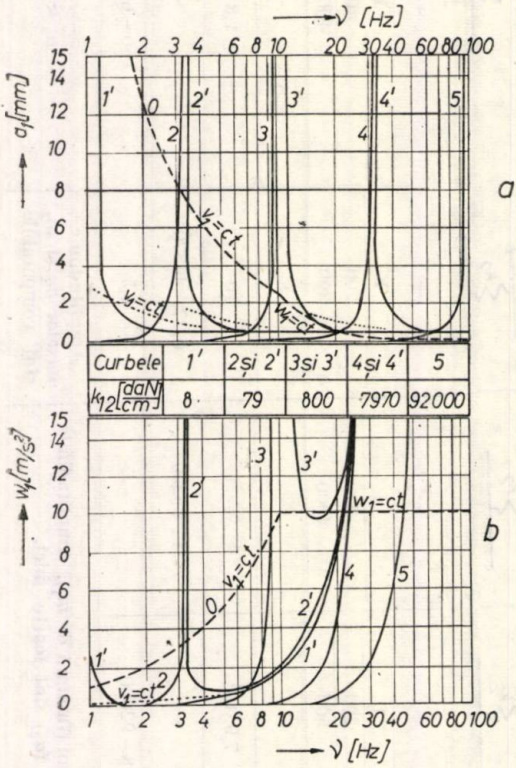


Fig. 6

În apropierea frecvențelor de rezonanță, curbele 1′—4′ au alură apropiată de cea a curbelor de amplitudine constantă a vitezelor ($v_1 = \text{const.}$). Corespunzător acestor porțiuni, se obține o funcționare stabilă la vibrații cu amplitudinea vitezelor constantă, aceasta nefiind perturbată de unele fluctuații posibile ale frecvenței de excitație. Pentru obținerea unor amplitudini mari ale vitezei (de exemplu cele prevăzute de normele UIC pentru $\nu = 1—10$ Hz) sînt necesare valori mari ale dezechilibrului dinamic $r_0 m_0$, greu sau chiar imposibil de realizat practic. Chiar și pentru amplitudini mici, nu pot fi realizate încercări la frecvențe mai mici de 2 — 3 Hz, întrucît nu se poate obține $k_{12} < 80$ daN/cm.

Este posibil să se obțină vibrații cu amplitudinea accelerației constantă numai dacă în sistemul oscilant există amortizări mari care să aplatiseze curbele în zonele de rezonanță. Pentru amplitudini mari ale accelerației ($w_1 \approx g$) astfel de încercări pot fi efectuate pe domeniul de frecvențe 10—100 Hz (curbele 2—5 din fig. 6 *b*).

Corespunzînd zonelor de rezonanță ale funcționării mașinii, reglajele pe care le necesită sînt relativ greu de realizat.

B. Mașina vibratoare cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristică variabilă (fig. 7)

Pe domeniul de amplitudine $a_1 = (1 - 1{,}2)\ R_0 = 10—12$ mm, alura curbelor 2—5 este apropiată de cea a curbelor de amplitudine constantă a deplasărilor, corespunzînd unor linii orizontale în figura 7*a*. În acest domeniu de amplitudini sînt posibile încercări la frecvențe cuprinse între 1 și 100 Hz. Prin modificarea caracteristicii k_G se obține un domeniu relativ

restrîns al amplitudinilor a_1, de la R_0 pînă la $1{,}2R_0$. Prin modificarea amplitudinii R_0 acest domeniu se lărgește, reglajul fiind însă greu de realizat în timpul funcționării mașinii.

Pe zone largi de frecvențe, curbele 1′—4′ din figura 7*a* (de exemplu curba 1′, după punctul α, $\nu > 3$ Hz) au alura curbelor de amplitudine constantă a vitezelor ($v_1 = \text{const.}$). Pe aceste zone reglajele de amplitudine sînt ușor de realizat chiar în timpul funcționării mașinii. Se obțin funcționări stabile, neinfluențate de fluctuațiile frecvenței de excitație. Încercările cu amplitudinea vitezei constantă, la valorile prescrise de normele UIC pot fi realizate la frecvențe mai mari de 3 Hz; pentru frecvențe sub 3 Hz sînt necesare valori prea mici ale constantei $k_G (k_G < 80$ daN/cm), imposibil de realizat practic în cazul considerat.

Încercări cu amplitudinea accelerațiilor constantă sînt posibile începînd de la frecvența de 2 Hz în cazul unor valori mici, $w_1 < 1$ m/s² (curba 1′, fig. 7*b*). La frecvențe mai mari decît 10 Hz astfel de încercări sînt realizabile prin amortizarea vibrațiilor în zonele de rezonanță (curbele 3′ și 4′).

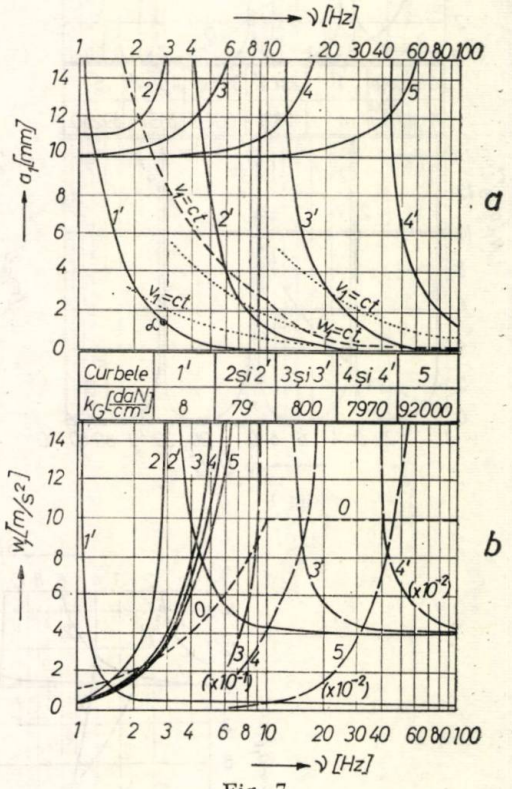


Fig. 7

C. Mașina vibratoare cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristică constantă (fig. 8)

În afara zonelor de rezonanță, care sînt și foarte înguste, în cazul mașinii vibratoare considerate se obțin amplitudini mici ale vibrațiilor pe tot domeniul de frecvențe 1—100 Hz. Pentru mărirea acestora sînt necesare valori mari ale amplitudinii R_0 a semnalului excitatorului G_2, ceea ce determină unele dificultăți constructive și funcționale.

D. Mașina vibratoare cu două mase în mișcare vibratorie (fig. 9)

Se obțin vibrații de amplitudini mici, chiar și în cazul unor semnale puternice de excitație. Zonele de rezonanță fiind foarte înguste, nu pot fi luate în considerare pentru funcționarea mașinii.

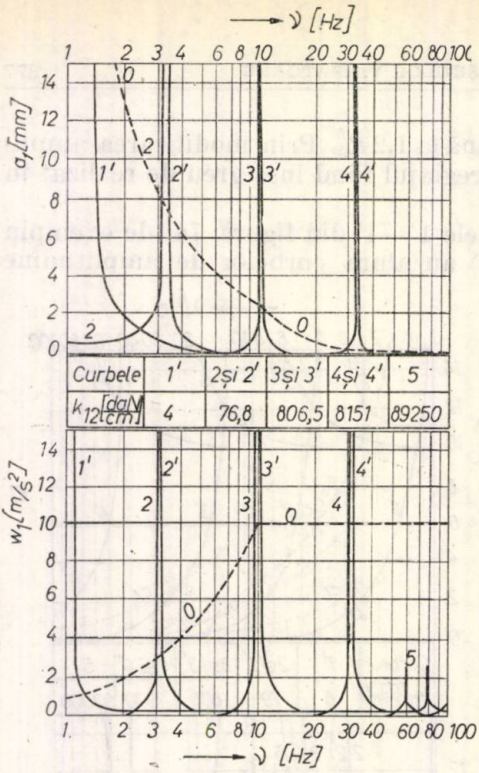


Fig. 8

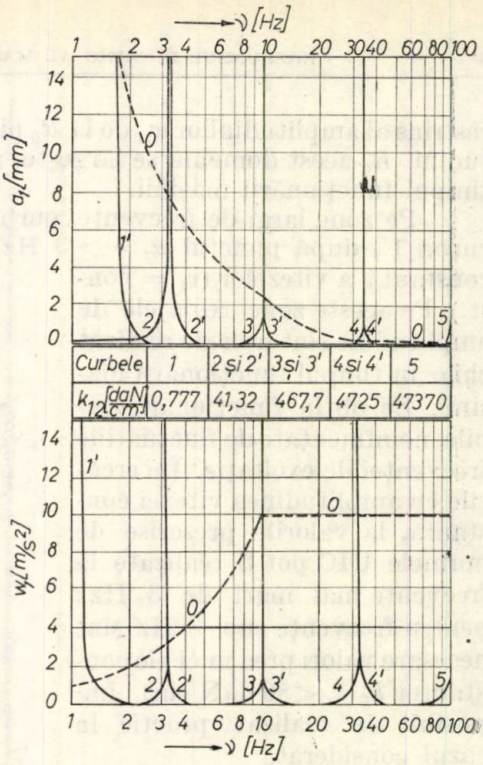
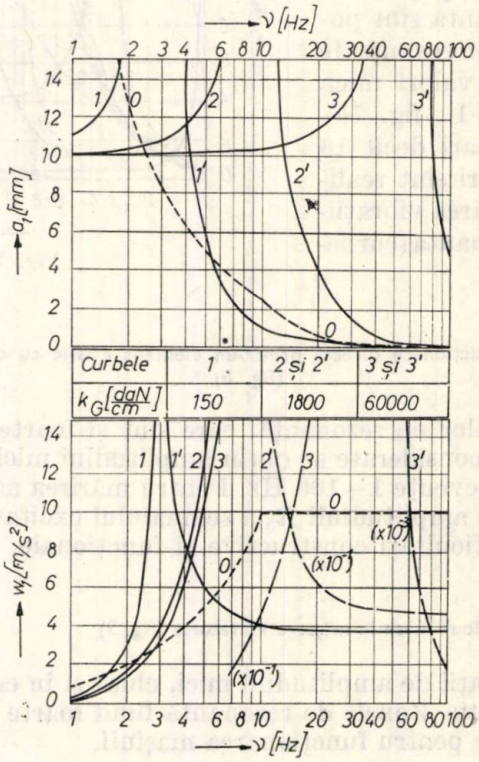


Fig. 9



F g. 10

B*. Mașina cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristică variabilă, varianta $m_1 = 400$ kg (fig. 10)

Mașina prezintă aceleași particularități și posibilități de funcționare ca în cazul variantei B ($m_1 = 200$ kg); cele două variante au aceeași alură a curbelor de răspuns în frecvență.

4. CONCLUZII

Dintre tipurile de mașini vibratoare considerate, *cea cu acționare directă printr-un element elastic cu caracteristică variabilă* corespunde cel mai bine cerințelor impuse de realizarea unor încercări de amplitudini constante (variantele B și B*).

Pe această mașină se pot efectua încercări cu amplitudinea deplasărilor constantă, și, respectiv, cu amplitudinea vitezelor constantă, pentru frecvențe de la 3 la 100 Hz. Sînt, de asemenea, posibile și încercări de vibrații cu amplitudine constantă a accelerațiilor, pentru frecvențe cuprinse între 10 și 100 Hz. Mașina corespunde bine, încercărilor de vibrații după normele UIC. Din analiza variantei B* a mașinii, rezultă că și în acest caz se obține un răspuns în frecvență avantajos pentru efectuarea încercărilor după normele menționate.

Stabilitatea funcționării mașinii vibratoare este bună atunci cînd curbele de răspuns în frecvență se suprapun pe o bandă cît mai mare cu cele ale amplitudinilor prescrise de norme. În general curbele de răspuns în frecvență sînt mai abrupte decît cele ale amplitudinilor prescrise; se poate obține o apropiere a lor prin reglarea corespunzătoare a amortizărilor.

Primită la redacție la 17 mai 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Normele UIC (Union Internationale des Chemins de Fer) Nr. 616—0.
2. C. Harris, Ch. Crede, *Șocuri și vibrații*, vol. I și II, traducere din limba engleză, București, Edit. tehnică, 1968.
3. Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș, *Vibrațiile sistemelor mecanice*, București, Edit. Academiei, 1975.

PARAMETRII FUNCȚIONĂRII ÎN REGIM OSCILANT A UNUI RECIPIENT CILINDRIC VERTICAL, DE MARE PRESIUNE, CU FUNCȚIE DE ACUMULATOR ENERGETIC ÎNTR-O CENTRALĂ HIDROPNEUMATICĂ. III

de A. PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se prezintă principalele rezultate obținute în urma efectuării unor studii, cercetări, determinări (măsurări) și analize teoretico-experimentale privind parametrii ce caracterizează ciclurile de presiune corespunzătoare funcționării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcție de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. Lucrarea se finalizează printr-un grafic de lucru, cu ajutorul căruia poate fi precizat, oricînd și în mod acoperitor, numărul ciclurilor de presiune preluate de către recipientul respectiv pentru o anumită durată totală de serviciu.

4.6. MĂRIMEA p_m A CICLURILOR DE PRESIUNE

În general, valorile medii p_m au variat în timp aproape *uniform*) prezentînd o tendință generală fie de scădere**) (fig. 9*a*), fie de creștere***) (fig. 9*b*). Pe durata tuturor seriilor de înregistrări efectuate și studiate, valorile medii p_m respective s-au înscris în următorul domeniu general:

$$p_m = 256{,}0 \ldots 288{,}3 \text{ daN/cm}^2 = 261 \ldots 294 \text{ kgf/cm}^2, \qquad (61)$$

în dependență de condițiile funcționării și solicitării operative a centralei hidropneumatice.

---

*) Valorile apropiate de cea maximă (circa 18%) corespund unor condiții de exploatare singulare (v. partea a II-a).

**) În seriile de înregistrări: I — de la circa 288,3 daN/cm^2 = 294 kgf/cm^2 (LS), pînă la circa 272,6 daN/cm^2 = 278 kgf/cm^2 (LI), deci L = 15,69 daN/cm^2 = 16 kgf/cm^2; III — de la circa 284,4 daN/cm^2 = 290 kgf/cm^2 (LS), pînă la circa 269,7 daN/cm^2 = 275 kgf/cm^2 (LI), deci L = 14,71 daN/cm^2 = 15 kgf/cm^2; V — de la circa 288,3 daN/cm^2 = 294 kgf/cm^2 (LS), pînă la circa 275,6 daN/cm^2 = 281 kgf/cm^2 (LI), deci L = 12,75 daN/cm^2 = 13 kgf/cm^2.

***) În seriile de înregistrări: II — de la circa 261,8 daN/cm^2 = 267 kgf/cm^2 (LS), pînă la circa 274,6 daN/cm^2 = 280 kgf/cm^2 (LI), deci L = 12,75 daN/cm^2 = 13 kgf/cm^2; IV — de la circa 256,0 daN/cm^2 = 261 kgf/cm^2 (LI), pînă la circa 261,8 daN/cm^2 = 267 kgf/cm^2 (LS), deci L = 5,884 daN/cm^2 = 6 kgf/cm^2, respectiv, de la circa 283,4 daN/cm^2 = 289 kgf/cm^2 (LI), pînă la circa 288,3 daN/cm^2 = 294 kgf/cm^2 (LS), deci L = 4,903 daN/cm^2 = = 5 kgf/cm^2.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 381—393

Rezultă, aşadar, că — practic — menţinerea în timp corespunzător de îndelungat a unui anumit (dat sau impus) nivel valoric p_m nu este posibilă, aceasta excluzînd oricare dintre alternativele funcţionării staţionare a centralei hidropneumatice şi, deci, a recipientului *3* (fig. 1).

De la o perioadă de serviciu la alta, lăţimea L (fig. 9) a benzii de dispersie a valorilor medii p_m s-a înscris în următorul domeniu general*) :

$$L_{(m)} = 4{,}903 \ldots 15{,}69 \text{ daN/cm}^2 = 5 \ldots 16 \text{ kgf/cm}^2, \qquad (62)$$

în funcţie de condiţiile şi parametrii regimului de lucru în care şi pentru care s-a exploatat centrala hidropneumatică.

*Pierderea orară medie***) de presiune p_m a fost de aproximativ 0,176 (daN/cm ^{2})/h = 0,18 (kgf/cm ^{2})/h, iar *creşterea orară medie***) de presiune p_m a fost de aproximativ 0,324 (daN/cm ^{2})/h = 0,33 (kgf/cm ^{2})/h.

Tabelul 8

Pierderea de presiune P_m (valori globale medii rotunjite, în kgf/cm²) din recipientul *3*, în funcţie de durata funcţionări centralei hidropneumatice

Durata funcţionării centralei hidropneumatice, în h	Pierderea orară medie de presiune p_m, în (kgf/cm²)/h		
	0,10	0,18	0,30
1	0,10	0,18	0,30
10	1,00	1,80	3,00
20	2,00	3,60	6,00
30	3,00	5,40	9,00
40	4,00	7,20	12,00
50	5,00	9,00	15,00
60	6,00	10,80	18,00
70	7,00	12,60	21,00
80	8,00	14,40	24,00
90	9,00	16,20	27,00
100	10,00	18,00	30,00

Notă: 1(kgf/cm²)/h=0,980665(daN/cm²)/h.

Aşa cum au indicat înregistrările, pierderea şi, respectiv, creşterea de presiune p_m din recipientul *3* se face după o lege *liniară* (fig. 9) sau aproape liniară, cu ritmuri diferite de la o situaţie caracteristică la alta, de la un anumit interval orar la altul, cărora le corespund valori determinate ale pierderii sau creşterii *orare medii* de presiune p_m. În baza acestei constatări, pentru cîteva trepte valorice reprezentative, au fost calculate valorile *globale medii rotunjite* ale pierderii şi, respectiv, ale creşterii de presiune p_m din recipientul *3*, în funcţie de durata funcţionării sale, rezultatele obţinute fiind centralizate în tabelele 8 şi 9, de asemenea în figurile 10 şi 11. Cu ajutorul graficelor sugestive redate în figurile 10 şi 11 se poate afla — rapid şi comod, în fiecare moment — care este nivelul valoric p_m corespunzător unei valori date a pierderii orare medii (fig. 10) sau a creşterii orare medii (fig. 11) de presiune p_m, faţă de un anumit nivel p_m de referinţă***).

*) În acest caz (p_m), lăţimea $L_{(m)}$ a benzii de dispersie este comparabilă cu cea corespunzătoare benzii de dispersie a valorilor sistematice p_{max} şi (mai ales) p_{min} (formulele 49 şi 50).

**) Pentru cazul de faţă (p_m), pierderea şi — respectiv — creşterea orară medie de presiune (mărimi care pot fi evaluate suficient de precis pentru condiţiile de lucru date) sînt indicatori preţioşi şi utili, în funcţie de valoarea cărora se poate corecta sau regla, în mod corespunzător, regimul de exploatare al centralei hidropneumatice.

***) De exemplu, pentru o pierdere orară medie de presiune p_m egală cu 0,176 (daN/cm²)/h = 0,18 (kgf/cm ^{2})/h, pierderea de presiune p_m din recipientul *3* este egală cu 8,826 daN/cm ^{2} = = 9,0 kgf/cm ^{2} după 50 h de funcţionare a centralei hidropneumatice şi cu 14,12 daN/cm ^{2} = = 14,4 kgf/cm ^{2} după 80 h de funcţionare a centralei hidropneumatice.

Nu se mai insistă asupra unor rezultate evidente și bine cunoscute, pentru a se evita reluarea concluziilor privind valorile sistematice p_{max} și p_{min}, care pot fi extrapolat extinse și asupra valorilor medii p_m.

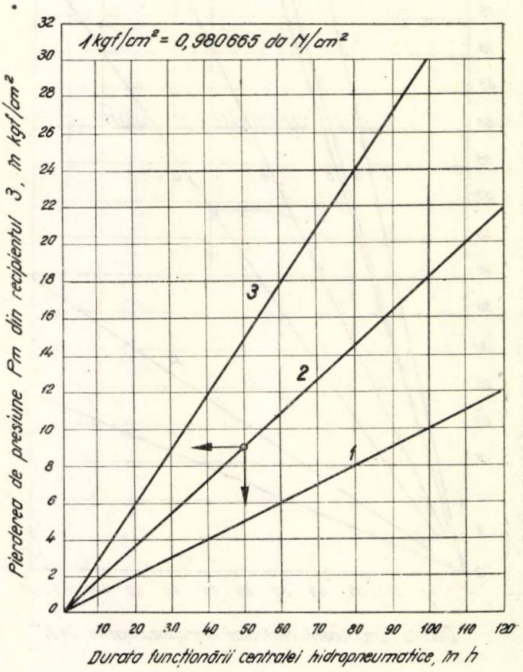


Fig. 10 — Dependența pierderii de presiune p_m (valori globale medii rotunjite) din recipientul *3* de durata funcționării centralei hidropneumatice, pentru diferite valori ale pierderii orare medii de presiune p_m :
1 — 0,098 (da N / cm² / *h* = 0,10 (kgf/cm²)/*h*; 2 — 0,176 (da N/cm²)/*h* = = 0,18 (kgf / cm²) / *h*; 3 — 0,294 · ·(daN/cm²)/*h* = 0,30(kgf/cm²)/*h*

Tabelul 9

Creșterea de presiune p_m (valori globale medii rotunjite, în kgf/cm²) din recipientul *3*, în funcție de durata funcționării centralei hidropneumatice

Durata funcționării centralei hidropneumatice, în h	Creșterea orară medie de presiune p_m, în (kgf/cm²)/*h*						
	0,20	0,33	0,70	1,00	1,50	1,60	2,00
1	0,20	0,33	0,70	1,00	1,50	1,60	2,00
10	2,00	3,30	7,00	10,00	15,00	16,00	20,00
20	4,00	6,60	14,00	20,00	30,00	32,00	40,00
30	6,00	9,90	21,00	30,00	45,00	48,00	60,00
40	8,00	13,20	28,00	40,00	60,00	64,00	80,00
50	10,00	16,50	35,00	50,00	75,00	80,00	100,00
60	12,00	19,80	42,00	60,00	90,00	96,00	120,00
70	14,00	23,10	49,00	70,00	105,00	112,00	140,00
80	16,00	26,40	56,00	80,00	120,00	128,00	160,00
90	18,00	29,70	63,00	90,00	135,00	144,00	180,00
100	20,00	33,00	70,00	100,00	150,00	160,00	200,00

Notă : 1 (kgf/cm²)/*h* = 0,980665 (daN/cm²)/*h*.

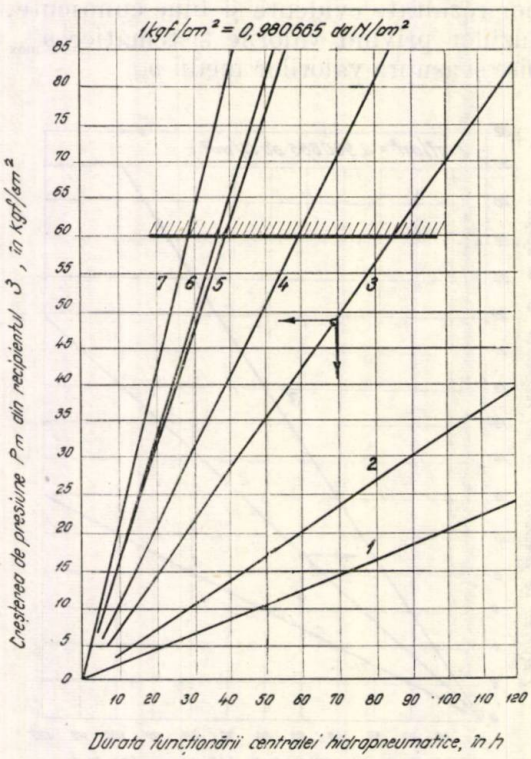


Fig. 11 — Dependența creșterii de presiune p_m (valori globale medii rotunjite) din recipientul *3* de durata funcționării centralei hidropneumatice, pentru diferite valori ale creșterii orare medii de presiune p_m : 1 — 0,196(daN/cm²)/h = 0,20 (kgf/cm²)/h ; 2 — 0,324(daN/cm²)/h = =0,33(kgf/cm²)/h; 3 — 0,686(daN/cm²)/h= =0,70(kgf/cm²)/h ; 4 — 0,980(daN/cm²)/h= =1,00(kgf/cm²)/h ; 5 — 1,470(daN/cm²)/h= =1,50(kgf/cm²)/h ; 6 — 1,569(daN/cm²)/h= =1,60(kgf/cm²)/h ; 7 — 1,961(daN/cm²)/h= =2,00(kgf/cm²)/h.

Observație. În cîmpul figurii și în tabelul 9 a fost marcat în mod distinct nivelul maxim (presupus, ipotetic) al creșterii de presiune p_m.

4.7. PERIOADA ȘI PULSAȚIA CICLURILOR DE PRESIUNE

Perioada. Pe durata tuturor seriilor de înregistrări efectuate și studiate (tab. 2), valorile *singulare* T_{max} și T_{min} s-au înscris în următoarele domenii generale (tab. 10) :

$$T_{max} = 0{,}010 \ldots 0{,}300 \ h, \tag{63}$$

$$T_{min} = 0{,}005 \ldots 0{,}150 \ h, \tag{64}$$

în dependență de regimul de funcționare al recipientului *3*, iar valorile *medii* T_m și T_{mc} s-au înscris în următoarele domenii generale (tab. **10**) :

$$T_m = 0{,}010 \ldots 0{,}165 \ h, \tag{65}$$

$$T_{mc} = 0{,}010 \ldots 0{,}300 \ h, \tag{66}$$

remarcîndu-se deci o concordanță destul de bună — în anumite împrejurări și condiții — a valorilor mărimilor T_m și T_{mc}.

Tabelul 10

Valorile perioadei T și ale pulsației ν, corespunzătoare ciclurilor de presiune din recipientul 3 (fig. 1)

Seria de înregistrări	Valorile perioadei T a ciclurilor de presiune, în h				Valorile pulsației ν a ciclurilor de presiune, în h^{-1}
	T_{max}	T_{min}	T_m	T_{mc}	
I	0,017...0,250	0,010...0,150	0,017...0,150	0,017...0,150	8...59
II	0,014...0,170	0,010...0,100	0,014...0,125	0,014...0,125	8...70
III	0,010...0,128	0,005...0,120	0,010...0,124	0,010...0,120	10...50(100)
IV	0,022...0,115	0,015...0,112	0,020...0,112	0,020...0,112	9...55
V	$\leqslant$ 0,300	circa 0,030	circa 0,165	0,030...0,300	3...32

Observații — 1. Nu s-au luat în considerație valorile T și ν corespunzătoare intervalelor caracteristice $\Delta\tau$ prezentînd variație (liniar) monotonă a presiunii (statice) din recipientul 3 sau anomalii și accidente de înregistrare.

2. Valorile extreme indicate pentru perioadele T și pulsația ν sînt *valori singulare*, corespunzătoare unor situații izolate, particulare. În general, *valorile sistematice* ale perioadelor T și cele ale pulsației ν se înscriu în limitele unor domenii de dispersie (valorică) mai restrînse decît cele indicate în tabelul de față.

În cazul general, este îndeplinită condiția :

$$1 \leqslant I_T = T_{max}/T_{min} \leqslant \text{circa } 70, \tag{67}$$

pentru cele mai multe dintre intervalele caracteristice cercetate se obține :

$$1 \leqslant I_T = T_{max}/T_{min} \leqslant 5, \tag{68}$$

iar pentru suficient de multe intervale $\Delta\tau$ cercetate rezultă :

$$1 \leqslant I_T = T_{max}/T_{min} \leqslant 2, \tag{69}$$

evident, condiția (69) fiind indusă în condițiile precedente (68) și (67).

Așadar, în funcție de condițiile în care se face exploatarea centralei hidropneumatice (recipientului 3), valorile T_{max} ale perioadei ciclurilor de presiune pot depăși mult ($I_T \leqslant 2$), foarte mult ($I_T \leqslant 5$) sau considerabil de mult ($I_T \leqslant 70$) o anumită valoare T_{min} reprezentativă pentru un interval $\Delta\tau$ cu o durată mai mult sau mai puțin îndelungată.

În general, ciclurile de presiune se succed în mod neuniform, perioada lor T modificîndu-se mai mult sau mai puțin sensibil de la un ciclu dat la următorul sau de la un moment dat la altul (momentul ultim fiind uneori foarte apropiat de cel de referință). S-au înregistrat, însă, destule situații (în majoritatea lor tipice) cînd ciclurile de presiune — nestaționare, cvasistaționare sau staționare — s-au succedat în mod *uniform* pe durate $\Delta\tau$ notabil de mari*). Pentru astfel de situații, rezultă în mod evident

$$T_{max} = T_{min} = T_m. \tag{70}$$

*) De exemplu, $\Delta\tau = 0{,}80$; 0,90 ; 1,01 ; 1,10 ; 1,20 h etc.

Se înțelege că, dacă durata $\Delta\tau$ a intervalelor caracteristice cercetate s-ar fi micșorat în mod corespunzător (bunăoară, sub 0,50 *h*), atunci ponderea situațiilor pentru care este satisfăcută egalitatea (70) ar fi devenit determinantă. Deocamdată, însă, o asemenea investigare nu prezintă importanță de utilitate practică, date fiind condițiile funcționării neîntrerupte îndelungate a centralei hidropneumatice.

Se precizează că, în mod *preponderent*, perioada T a ciclurilor de presiune din recipientul *3* se înscrie valoric în următorul domeniu general*) :

$$T = 0{,}005 \ldots 0{,}300 \; h = 18 \ldots 1\,080 \text{ s}, \tag{71}$$

valorile *sistematice* (cele mai des întîlnite) ale perioadei T fiind următoarele*) :

$$T = 0{,}020 \ldots 0{,}100 \; h = 72 \ldots 360 \text{ s}. \tag{72}$$

Se precizează, de asemenea, că, în funcție de caracterul dependenței $p = p(\tau)$, după valorile perioadei T, corespunzătoare anumitor succesiuni ale ciclurilor de presiune din recipientul *3*, pot fi identificate, studiate și clasificate, ca atare, situațiile tipice (cel puțin în număr de șase, fig. 7) în care și pentru care se face exploatarea centralei hidropneumatice.

Pulsația. Pe durata tuturor înregistrărilor efectuate și studiate (tab. 1), pulsația ν a ciclurilor de presiune din recipientul *3* (fig. 1) s-a înscris valoric în următorul domeniu general :

$$\nu = 3 \ldots 70 \; h^{-1}, \tag{73}$$

putînd fi distinse cel puțin trei situații caracteristice (tipice), pentru care

$$\nu \leqslant 20 \; h^{-1}; \quad \nu = 21 \ldots 40 \; h^{-1}; \quad \nu > 40 \; h^{-1}, \tag{74; 75; 76}$$

în funcție de regimul de funcționare al recipientului *3*.

Durata totală aproximativă a funcționării recipientului respectiv într-un regim dat de pulsație ν s-a înscris, valoric, în următoarele limite (valori extreme) :

— în cazul exprimării în procente (%) din *durata înregistrărilor efective* (tab. 1) :

$$28 \ldots 42\% \text{ pentru } \nu \leqslant 20 \; h^{-1},$$

$$52 \ldots 71\% \text{ pentru } \nu = 20 \ldots 40 \; h^{-1},$$

$$1 \ldots 15\% \text{ pentru } \nu > 40 \; h^{-1},$$

respectiv :

$$71 \ldots 97\% \text{ pentru } \nu = 11 \ldots 40 \; h^{-1};$$

*) În sistemul sexagesimal.

— în cazul exprimării în procente (%) din *durata totală a înregistrărilor* (tab. 1):

$$11...32\% \text{ pentru } \nu \leqslant 20\ h^{-1},$$

$$27...47\% \text{ pentru } \nu = 21...40\ h^{-1},$$

$$0{,}4...11\% \text{ pentru } \nu > 40,$$

respectiv

$$37...63\% \text{ pentru } \nu = 11...40\ h^{-1}.$$

Se constată, astfel, că situațiile de exploatare pentru care $\nu = 11...40\ h^{-1}$ sînt preponderente și, deci, determinante pentru funcționarea recipientului *3*, cuantumul caracterizant din punctul de vedere al regimului de lucru revenind situațiilor de exploatare pentru care $\nu = 21...40\ h^{-1}$. Durata intervalelor în care recipientul *3* a funcționat neîntrerupt în acest din urmă regim de pulsație ($\nu = 21...40 h^{-1}$) a fost de 0,04... 7,65 *h*, variind, deci, în limite foarte largi*), în legătură directă cu modul cum s-a făcut exploatarea centralei hidropneumatice.

★

Pentru cele cinci serii de înregistrări cercetate, în tabelul 11 se indică *numărul total N* al ciclurilor de presiune din recipientul *3*, care a fost stabilit prin citirea directă a benzilor de înregistrare. În tabelul 11 se pre-

Tabelul 11

Unele caracteristici ale ciclurilor de presiune din recipientul *3*

Seria de înregistrări	Durata τ a înregistrării efective a ciclurilor de presiune, în *h* (tab. 1)	Numărul total *N* al ciclurilor de presiune din recipientul *3*	Pulsația calculată ν_{calc} a ciclurilor de presiune, în h^{-1}	Perioada calculată T_{calc} a ciclurilor de presiune, în *h*	Perioada calculată T_{calc} a ciclurilor de presiune, în s
I	60,5	1 719...1 803	28...30	0,033...0,036	119...130
II	60,9	1 557...1 608	25...27	0,037...0,040	133...144
III	74,4	1 703...1 764	22...24	0,042...0,045	151...162
IV	12,6	311...323	24...26	0,038...0,042	137...151
V*	112,0	398...3 865	3...35	0,029...0,335	104...1 199

*) Valorile $N\nu_{calc}$, și T_{calc} sînt valori estimate.

cizează, de asemenea, valorile *medii* ale pulsației ν_{calc} și ale perioadei T_{calc}, calculate cu următoarele formule generale evidente:

$$\nu_{calc} = \frac{1}{T_{calc}} = \frac{N}{\tau}; \tag{77}$$

$$T_{calc} = \frac{1}{\nu_{calc}} = \frac{\tau}{N}, \tag{78}$$

*) Valorile indicate (mai ales 7,65 *h*) s-ar putea să nu fie valori extreme ultime pentru exploatarea în continuare a recipientului *3*, respectiv a centralei hidropneumatice.

Pentru seriile de înregistrări I, ..., IV, valoarea *globală* N_t a numărului (total N) de cicluri de presiune din recipientul *3* este (tab. 11):

$$N_t = N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}} + N_{\mathrm{III}} + N_{\mathrm{IV}} = 5\,290 \ldots 5\,498, \tag{79}$$

aceasta corespunzînd (tab. 11) următoarei durate totale τ_t de înregistrare efectivă a ciclurilor de presiune (deci de funcţionare a recipientului *3*):

$$\tau_t = \tau_{\mathrm{I}} + \tau_{\mathrm{II}} + \tau_{\mathrm{III}} + \tau_{\mathrm{IV}} \approx 208\ h. \tag{80}$$

În cuprinsul acestei din urmă durate ($\tau_t \approx 208\ h$), valorile ν_{calc} şi T_{calc} s-au înscris în următoarele domenii generale (tab. 11):

$$\nu_{\mathrm{calc}} = 22 \ldots 30\ h^{-1}, \tag{81}$$

$$T_{\mathrm{calc}} = 0{,}033 \ldots 0{,}045\ h = 119 \ldots 162\ \mathrm{s}, \tag{82}$$

în baza formulelor (77)...(80) rezultînd:

$$\nu'_{calc} = \frac{N_t}{\tau_t} \approx 25 \ldots 27\ h^{-1}, \tag{83}$$

$$T'_{calc} = \frac{\tau_t}{N_t} \approx 0{,}037 \ldots 0{,}040\ h = 133 \ldots 144\ \mathrm{s}, \tag{84}$$

valorile medii *calculate* — mai restrînse — (83) şi (84) fiind incluse în domeniile valorice precizate anterior pentru ν şi T.

4.8. NUMĂRUL TOTAL AL CICLURILOR DE PRESIUNE (PRELUATE DE RECIPIENTUL *3*)

Pentru o durată totală de serviciu $\tau_s^{*)} = 10\,000\ h$, duratele totale (calculate) τ_{cf} corespunzătoare funcţionării recipientului *3* într-un regim dat de pulsaţie ν se înscriu valoric în următoarele limite probabile (valori extreme aproximative):

$$\tau_{cf} = 1\,100 \ldots 3\,200\ h \qquad \text{pentru } \nu \leqslant 20\ h^{-1},$$

$$\tau_{cf} = 2\,700 \ldots 4\,700\ h \qquad \text{pentru } \nu = 21 \ldots 40\ h^{-1},$$

$$\tau_{cf} = 40 \ldots 1\,100\ h \qquad \text{pentru } \nu > 40\ h^{-1},$$

respectiv

$$\tau_{cf} = 3\,700 \ldots 6\,300\ h \qquad \text{pentru } \nu = 11 \ldots 40\ \mathrm{h}^{-1},$$

*) Calcule similare se pot efectua pentru oricare durată de serviciu τ_s (de exemplu, $\tau_s = 100\,000\ h$).

aceste rezultate fiind, în mod firesc, perfect concordante cu cele precizate anterior (pentru pulsaţii).

În baza formulei (77), rezultă următoarele expresii de calcul pentru numărul *total* N_{cf}(minim — $N_{cf\min}$ sau maxim $N_{cf\max}$) al ciclurilor de presiune din recipientul *3* :

$$N_{cf} = \nu\tau_{cf}, \tag{85}$$

respectiv

$$N_{cf\min} = \nu_{\min}\tau_{cf}\,;\; N_{cf\max} = \nu_{\max}\tau_{cf}, \tag{86 ; 87}$$

în cazul $\tau_s = 10\,000\ h$ obţinîndu-se următoarele limite probabile (valori extreme aproximative) pentru $N_{cf\max}$:

$$N_{cf\max} = 21\,000\ldots51\,000 \text{ pentru } \nu \leqslant 20\ h^{-1},$$

$$N_{cf\max} = 95\,000\ldots170\,000 \text{ pentru } \nu = 21\ldots40\ h^{-1},$$

$$N_{cf\max} = 2\,100\ldots56\,000 \text{ pentru } \nu > 40\ h^{-1},$$

respectiv

$$N_{cf\max} = 116\,000\ldots207\,000 \text{ pentru } \nu = 11\ldots40\ h^{-1}.$$

Valorile calculate *globale* N_{ct} (minime — $N_{ct\min}$, maxime $N_{ct\max}$ sau medii $N_{ct\,med}$) ale numărului (total N) de cicluri de presiune *preluate* de recipientul *3* pentru $\tau_s = 10\,000\ h$ şi $\tau_s = 100\,000$ h, în condiţiile funcţionării în regimuri identice cu cele corespunzătoare seriilor de înregistrări *I*, ..., IV, sînt indicate — centralizat şi comparativ — în tabelul 12. Din

Tabelul 12

Valorile calculate globale (minime, maxime şi medii) ale numărului total de cicluri de presiune preluate de recipientul *3* pentru o durată totală de serviciu $\tau_s = 10\,000$ h şi, respectiv, $\tau_s = 100\,000$ h

Seria de înregistrări	Numărul total calculat (N_{ct})					
	minim ($N_{ct\min}$)	maxim ($N_{ct\max}$)	mediu ($N_{ct\,med}$)	minim ($N_{ct\min}$)	maxim ($N_{ct\max}$)	mediu ($N_{ct\,med}$)
	al ciclurilor de presiune din recipientul *3* pentru o durată totală de serviciu					
	$\tau_s = 10\,000\ h$			$\tau_s = 100\,000\ h$		
I	153 040	212 800	182 920	1 530 400	1 128 000	1 829 200
II	89 810	119 410	104 610	898 100	1 194 100	1 046 100
III	147 551	218 300	182 926	1 475 510	2 183 000	1 829 260
IV	156 350	226 100	191 225	1 563 500	2 261 000	1 912 250
Valori medii calculate (N'_{ct})	136 688	194 153	165 420	1 366 880	1 941 530	1 654 200
Valori medii (calculate) rotunjite (N''_{ct})	140 000	200 000	170 000	1 400 000	2 000 000	1 700 000

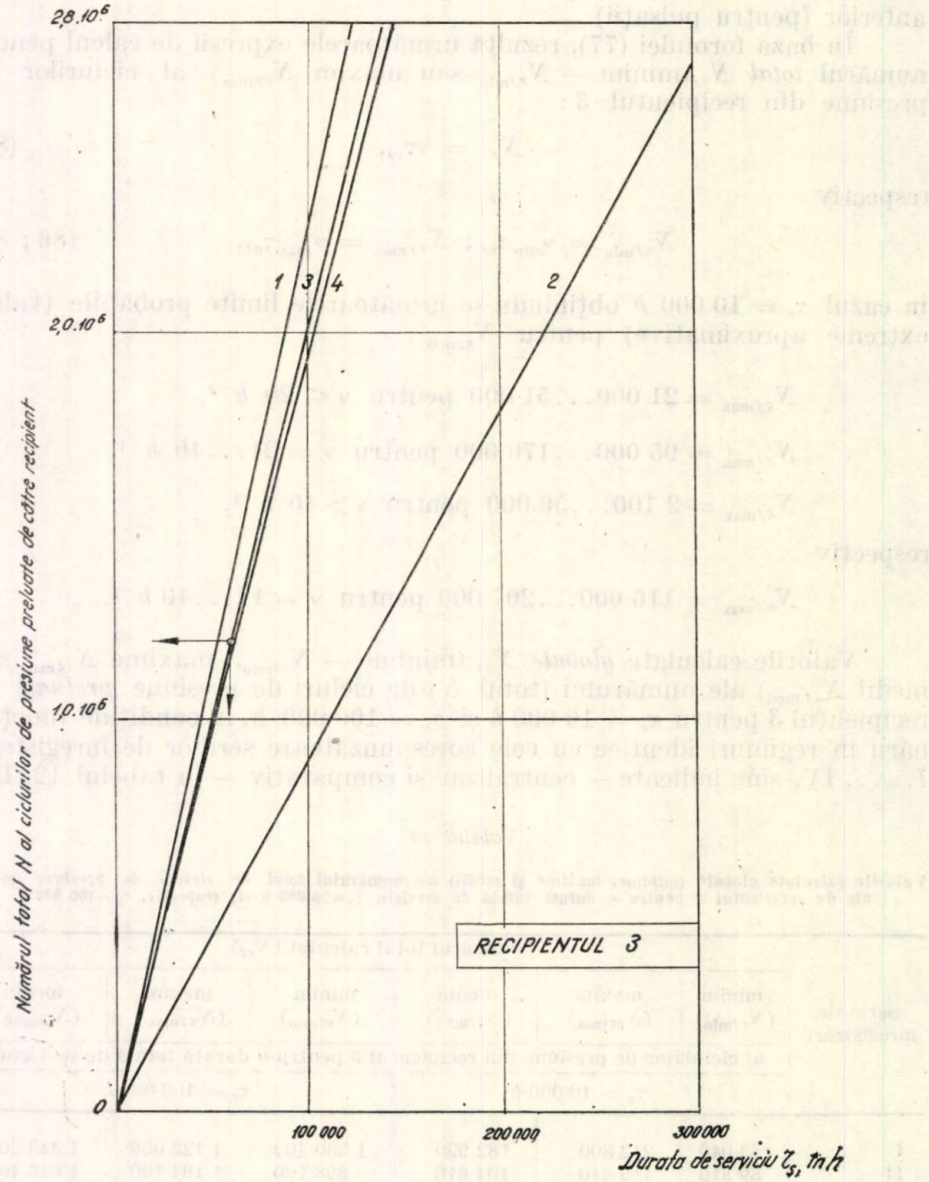


Fig. 12 — Dependența de durata de serviciu τ_s a numărului total N ciclurilor de presiune preluate de către recipientul *3*.

Grafic comparativ generalizat

$1 - N = N_{ct\,\min\,\max}$(de exemplu, pentru $\tau_s = 100\,000\ h$, $N_{ct\,\max\,\max} = 2\,261\,000$ = — tab. 12); $2 - N = N_{ct\,\min\,\min}$(de exemplu, pentru $\tau_s = 100\,000\ h$, $N_{ct\,\min\,\min}$ = = 898 100); $3 - N = N''_{ct\,\max}$(formulele 90 și 93); $4 - N = N'_{ct\,\max}$ (formulele 89 și 92).

acest tabel, pentru $N_{ct\,max}$ rezultă următoarele limite probabile (valori extreme aproximative):

— în cazul $\tau_s = 10\,000\ h$:

$$N_{ct\,max} = 119\,000 \ldots 226\,000, \tag{88}$$

respectiv

$$N'_{ct\,max} \approx 194\,000\,;\ N''_{ct\,max} = 200\,000, \tag{89 ; 90}$$

— în cazul $\tau_s = 100\,000\ h$:

$$N_{ct\,max} = 1\,194\,000 \ldots 2\,261\,000, \tag{91}$$

respectiv

$$N'_{ct\,max} \approx 1\,941\,000\,;\ N''_{ct\,max} = 200\,000 \tag{92 ; 93}$$

Observînd că dependența $N = N(\tau)$ este liniară (formula 85), a fost construit graficul comparativ generalizat din figura 12, care evidențiază sugestiv și consolidează unele dintre concluziile expuse anterior. A fost construit, de asemenea, *graficul final de lucru* redat în figura 13

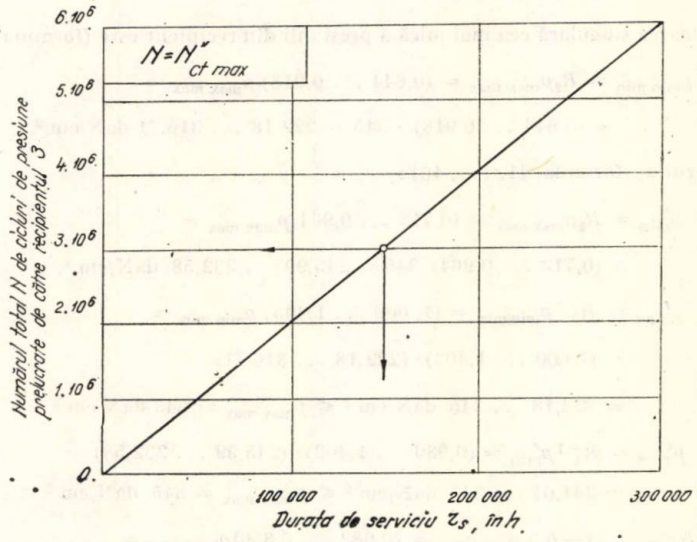


Fig. 13— Dependența de durata de serviciu τ_s a numărului total $N = N''_{ct\,max}$ (formulele 90 și 93) al ciclurilor de presiune preluate de către recipientul *3*.
Graficul final de lucru

cu ajutorul căruia poate fi precizat oricînd (și în mod acoperitor) numărul — $N = N''_{ct\,max}$ al — ciclurilor de presiune preluate de către recipientul *3* pentru o anumită durată (totală) de serviciu τ_s. Se poate verifica fără

dificultate că valorile N care rezultă din graficul prezentat în figura 13 sînt pe deplin concordante cu cele indicate anterior.

★

În acest context, se estimează că recipientul *3* va prelua (de exemplu) $1.10^7 = 10\,000\,000$ cicluri de presiune după o durată totală de serviciu egală — în cele mai defavorabile împrejurări — cu circa 500 000 h (valoare minimă).

★

Aplicație. Să se estimeze parametrii funcționării în regim oscilant pentru recipientul cilindric vertical, cu funcție de acumulator energetic, al unei centrale hidropneumatice identice structural și funcțional cu cea care a făcut obiectul lucrării prezente. Se cunosc următoarele date $p_{max} = 300$ daN/cm ^{2}; $p_{max\,max} = 1{,}15 p_{max} = 1{,}15.300 = 345$ daN/cm ^{2}; $\tau_s = 100\,000$ *h*.

Rezolvare.

a). Valoarea minimă (inferioară) a presiunii din recipientul dat este (formula 59) :

$$p_{min} = p_{inf} = R_5\, p_{max} = (0{,}819 \ldots 0{,}944)\, p_{max} =$$

$$= (0{,}819 \ldots 0{,}944) \cdot 300 = 245{,}7 \ldots 283{,}2 \text{ daN/cm}^2.$$

b). Valoarea medie a presiunii din recipientul în discuție va fi :

$$p_m = 0{,}5\,(p_{max} + p_{min}) = 0{,}5 \cdot [300 + (245{,}7 \ldots 283{,}2)] =$$

$$= 272{,}85 \ldots 291{,}6 \text{ daN/cm}^2.$$

c). Valoarea singulară cea mai mică a presiunii din recipient este (formula 40) :

$$p_{min\,min} = R_2 p_{max\,max} = (0{,}644 \ldots 0{,}918)\, p_{max\,max} =$$

$$= (0{,}644 \ldots 0{,}918) \cdot 345 = 222{,}18 \ldots 316{,}71 \text{ daN/cm}^2.$$

d). Rezultă (formula 41, ..., 46) :

$$p'_{min} = R_1 p_{max\,max} = (0{,}713 \ldots 0{,}964) p_{max\,max} =$$

$$= (0{,}713 \ldots 0{,}964) \cdot 345 = 245{,}99 \ldots 332{,}58 \text{ daN/cm}^2,$$

$$p'_{max} = R_3^{-1} p_{min\,min} = (1{,}000 \ldots 1{,}403)\, p_{min\,min} =$$

$$= (1{,}000 \ldots 1{,}403) \cdot (222{,}18 \ldots 316{,}71) =$$

$$= 222{,}18 \ldots 345 \text{ daN/cm}^2 \leqslant p_{max\,max} = 345 \text{ daN/cm}^2$$

$$p'_{max} = R_4^{-1} p'_{min} = (0{,}980 \ldots 1{,}403) \cdot (245{,}99 \ldots 332{,}58) =$$

$$= 241{,}07 \ldots 345 \text{ daN/cm}^2 \leqslant p_{max\,max} = 345 \text{ daN/cm}^2 \leqslant$$

$$\Delta p_{max} = (1 - R_2)\, p_{max\,max} = (0{,}082 \ldots 0{,}356) p_{max\,max} =$$

$$= (0{,}082 \ldots 0{,}356) \cdot 345 = 28{,}29 \ldots 122{,}82 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\Delta p'_{max} = (1 - R_1)\, p_{max\,max} = (0{,}036 \ldots 0{,}287)\, p_{max\,max} =$$

$$= (0{,}036 \ldots 0{,}287) \cdot 345 = 12{,}42 \ldots 99{,}02 \text{ daN/cm}^2 <$$

$$< \Delta p_{max} = 28{,}29 \ldots 122{,}82 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\Delta p''_{max} = p'_{max} - p_{min\ min} = (222{,}18 \ldots 345) -$$

$$- (222{,}18 \ldots 316{,}71) = 0{,}00 \ldots 122{,}82 \text{ daN/cm}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Delta p_{max} = 28{,}29 \ldots 122{,}82 \text{ daN/cm}^2.$$

e). Din tabelul 12 se obține :

$$N''_{ctmin} = 1\,400\,000,$$

$$N''_{ctmax} = 2\,000\,000,$$

$$N''_{ctmed} = 1\,700\,000,$$

rezultînd în acest caz (formulele 77 și 78) :

$$\nu_{calc} = \frac{N''_{ct}}{\tau_s} = \frac{1\,400\,000}{100\,000} \ldots \frac{2\,000\,000}{100\,000} = 14 \ldots 20\ h^{-1},$$

$$T_{calc} = \frac{\tau_s}{N''_{ct}} = \frac{100\,000}{1\,400\,000} \ldots \frac{100\,000}{2\,000\,000} = 0{,}050 \ldots 0{,}071\ h =$$

$$= 180{,}00 \ldots 255{,}60 \text{ s}.$$

f). Din tabelul 12 se obține de asemenea :

$$N_{ctmax} = 1\,194\,000 \ldots 2\,261\,000,$$

rezultînd în acest caz (formulele 77 și 78) :

$$\nu_{calc} = \frac{1\,194\,000}{100\,000} \ldots \frac{2\,261\,000}{100\,000} = 11{,}94 \ldots 22{,}61\ h^{-1},$$

$$T_{calc} = \frac{100\,000}{1\,194\,000} \ldots \frac{100\,000}{2\,261\,000} = 0{,}044 \ldots 0{,}084\ h = 158{,}4 \ldots 301{,}5 \text{ s}.$$

Primită la redacție la 14 iulie 1975

ASUPRA CIOCNIRII DINTRE UN POD RULANT ȘI STRUCTURA PORTANTĂ

de EUGEN GEORGESCU
Institutul de proiectare tip și tehnologii pentru construcții, București
DAN MUCICHESCU
Institutul de construcții București

Se studiază fenomenul ciocnirii accidentale a unui pod rulant cu structura construcției, folosind un model dinamic discret liniar pe porțiuni și integrarea numerică a ecuațiilor mișcării. Se examinează influența unor parametri asupra răspunsului dinamic, iar rezultatele sînt comparate cu cele oferite de o metodă cunoscută. Se desprind concluzii cu semnificație teoretică și practică privind starea de tensiune și deformație generată de tamponare.

1. INTRODUCERE

Lucrarea prezintă concluziile unui studiu teoretic asupra tamponării dintre un pod rulant și structura de susținere a căii de rulare.

Cercetarea întreprinsă aduce elemente noi în modelarea teoretică a fenomenului tamponării, implicit în metoda de calcul a structurii, cu consecințe directe pentru proiectare.

Modelul dinamic adoptat și algoritmul corespunzător generalizează și perfecționează realizările anterioare, [1] permițînd considerarea unui număr mai mare de parametri semnificativi.

Generalitatea metodei propuse depășește limitele analizei numerice efectuate în lucrare, care se referă, în mod specific, la cazul structurilor cu un singur nivel.

Rezultatul final al cercetării este un program de calcul complet, în limbaj FORTRAN, intitulat „programul TAMPON", care permite aplicarea comodă a metodei propuse în activitatea curentă de proiectare a structurilor.

Formularea problemei și alegerea modelului dinamic sînt rezultatul colaborării celor doi autori; metoda de analiză și programul de calcul numeric aparțin celui de-al doilea.

2. MODELUL DINAMIC

Soluția cunoscută a problemei tamponării [1], derivă din adoptarea unui model dinamic liniar, cu două grade de libertate, caracterizat prin

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 395–406

patru parametri : masa structurii, masa aferentă a podului, rigiditatea la translaţie a structurii la nivelul căii şi rigiditatea tamponului. În acest fel problema este simplificată la maximum, iar soluţia ei nu reprezintă decît o primă aproximaţie, care, după cum se va arăta mai jos, este în general larg acoperitoare.

Următorii factori au condus pe autorii prezentei lucrări la adoptarea unui model dinamic mai complex, menit să se apropie în mai mare măsură de fenomenul fizic studiat :

1) Legătura pod-structură la nivelul tampoanelor este unilaterală, tampoanele fiind active doar la compresiune.

2) În cazul halelor, structura, considerată independent, are cel puţin două grade de libertate — translaţiile la nivelul căii şi la nivelul acoperişului.

3) Podul rulant este el însuşi o structură, caracterizată de o anumită flexibilitate finită.

4) Modelul dinamic trebuie să cuprindă un mecanism disipator de energie oarecare.

Ca urmare, la baza studiului a fost pus modelul dinamic discret, cu patru grade de libertate, reprezentat în figura 1.

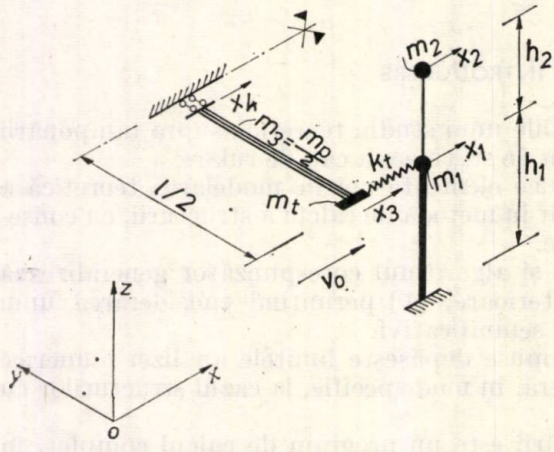


Fig. 1. — Modelul dinamic.

Prin „structură" se înţelege, în cele ce urmează, cadrul longitudinal format de stîlpii care susţin o cale de rulare, iar prin „pod" semistructura podului rulant cuprinsă între structură şi planul longitudinal de simetrie al halei, presupusă cu o singură deschidere.

Se folosesc notaţiile :

$x_1(t)$, $x_2(t)$ — deplasările longitudinale ale structurii (la nivelul căii de rulare, respectiv a acoperişului).

$x_3(t)$, $x_4(t)$ — deplasările longitudinale ale podului (la tampon, respectiv în secţiunea centrală) ;

m_1, m_2 — masele structurii, presupuse concentrate la nivelul căii de rulare, respectiv a acoperişului ;

m_p — masa totală a podului ;

$m_3 = m_p/2$;

m_{33}, m_{44}, m_{34} — elementele matricei de inerţie a podului (vezi pct. 3) ;

k_t — rigiditatea tamponului ;

k_{11}, k_{22}, k_{12} — elementele matricei de rigiditate a structurii, considerată independent de pod ;

k_p — rigiditatea podului la translaţia relativă $x_3 - x_4$;

v_0 — viteza podului în momentul tamponării ;

l, h_1, h_2 — conform figurii 1.

Modelul se aplică, în particular, estacadelor, cu $m_2 = h_2 = k_{22} = k_{12} = 0$.

În principiu, modelul este aplicabil şi halelor cu mai multe deschideri, prin adoptarea unor ipoteze suplimentare privind conlucrarea deschiderilor prin intermediul diafragmei acoperişului.

Se admite că sistemul pod-structură este geometric liniar. Considerarea legăturii unilaterale la nivelul tampoanelor conduce însă la o matrice de rigiditate constantă pe porţiuni (relaţiile (10) şi (11)), implicit la o lege forţă — deformaţie biliniară. Ca atare, modelul considerat este, în fond, fizic neliniar.

Amortizarea este presupusă de tip vîscos (proporţională cu viteza). S-a admis că disiparea de energie are loc numai în structură. Amortizarea în structura podului a fost neglijată acoperitor, iar amortizarea din tampon a fost ignorată, din lipsa datelor constructive necesare. Experimentarea numerică a programului TAMPON (vezi pct. 6) arată însă că efectul amortizării asupra răspunsului este relativ mic ; pe de altă parte, programul TAMPON poate fi adaptat cu uşurinţă pentru considerarea amortizării din podul rulant şi din tampoane. Cît priveşte valoarea amortizării în structură, N. M. Newmark [2] recomandă $\lambda = 0{,}04$ pentru structuri din beton armat sau metalice nituite şi bulonate şi $\lambda = 0{,}02$ pentru structuri metalice sudate (λ este coeficientul amortizării relative [3]).

3. MODELUL MATEMATIC

Prin alegerea modelului dinamic descris mai sus, mişcarea sistemului pod-structură se consideră complet definită prin vectorul 4-dimensional

$$X(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ x_3(t)\ \ x_4(t)]^T \tag{1}$$

(indicele superior T indică transpunerea).

Mărimile $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, sînt considerate pozitive, prin convenţie, în sensul deplasării podului înainte de tamporare. În momentul tamponării ($t = 0$) se consideră $x_i = 0$; în acelaşi moment, structura este în repaus, iar podul are viteza v_0.

Legătura unilaterală pod-structură este descrisă de o lege forţă-deformaţie de tip biliniar

$$F_t = \begin{cases} k_t(x_3 - x_1) & \text{dacă } x_3 > x_1, \\ 0 & \text{dacă } x_3 \leqslant x_1, \end{cases} \tag{2}$$

unde F_t este forţa din tampon. Tranziţia de la o stare la cealaltă a sistemului se produce în clipa desprinderii podului de structură, la un anumit moment $t_* > 0$. Valoarea t_* este necunoscută a priori şi se determină în procesul integrării numerice a ecuaţiilor mişcării (vezi pct. 4).

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării au forma generală cunoscută pentru sisteme liniare discrete, [3],

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0, \tag{3}$$

iar condițiile inițiale rezultă direct din modul în care au fost definite deplasările

$$X(0) = 0, \tag{4}$$

$$\dot{X}(0) = [0 \quad 0 \quad v_0 \quad v_0]^T. \tag{5}$$

În ecuația (3), M, C, K, sînt, respectiv, matricele de inerție, de amortizare și de rigiditate ale sistemului pod-structură a căror alcătuire este descrisă mai jos.

a) *Matricea de inerție.* Masa structurii fiind, prin însăși realizarea constructivă, concentrată predominant la nivelul căii de rulare și acoperișului, gradelor de libertate x_1 și x_2 le corespund în matricea M elemente $m_{11} = m_1$, $m_{22} = m_2$. Pe de altă parte, masa podului rulant este distribuită continuu, cu excepția unor concentrări la capete. Pentru a ține seama de caracterul continuu al distribuției de masă fără a renunța la modelarea discretă, se folosește metoda de discretizare a lui J. S. Archer (metoda matricei de masă „consistente"), [4],

$$m_{ij} = \int_0^{l/2} \rho \psi_i(y)\, \psi_j(y)\, dy + m_t \psi_i(0)\, \psi_j(0)\,; \; i, j = 3, 4, \tag{6}$$

în care ρ este densitatea liniară de masă a podului, m_t este masa suplimentară concentrată la capăt, iar $\psi_3(y)$, $\psi_4(y)$ sînt deformatele podului în plan orizontal, respectiv pentru $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ și $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. S-a admis, în spiritul metodei elementului finit, [3], că $\psi_i(y)$ sînt deformatele statice corespunzătoare (care, în cazul considerat, corespund consolei uniforme de lungime $l/2$)*).

Rezultă astfel matricea completă de inerție

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_S & 0 \\ 0 & M_p \end{bmatrix}, \tag{7}$$

unde M_S și M_p sînt submatrice 2×2.

b) *Matricea de amortizare.* Conform ipotezelor formulate la punctul 2

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

*) Pentru testarea reprezentării (6), în problema de față s-a calculat perioada naturală de vibrație a podului — privit ca sistem cu două grade de libertate, cu matricea de masă(6). Rezultatele obținute diferă neglijabil (sub 0,1 %) de soluția exactă dată în [5].

Ştiind că în coordonate normale, [3], matricea de amortizare a structurii este $\Phi^T C_S \Phi$, unde Φ este matricea modală iar matricea de inerţie are forma

$$\Phi^T M_S \Phi = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix},$$

şi admiţînd că amortizarea relativă (fracţiunea din amortizarea critică) are aceeaşi valoare λ în cele două moduri proprii ale structurii, considerată independent de pod, rezultă

$$2\lambda \begin{bmatrix} \mu_1 p_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 p_2 \end{bmatrix} = \Phi^T C_S \Phi,$$

de unde, prin inversare,

$$C_S = 2\lambda (\Phi^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 p_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 p_2 \end{bmatrix} \Phi^{-1}.$$

c) *Matricea de rigiditate.* Cu notaţiile de la punctul 2,

$$k_p = \frac{3\,EI}{(l/2)^3} = \frac{24\,EI}{l^3},$$

unde EI defineşte rigiditatea la încovoiere a podului în plan orizontal. Energia de deformaţie a sistemului pod-structură are expresia (în cazul tamponului activ, $x_3 \geqslant x_1$),

$$W = \frac{1}{2}\Big[k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 + k_t(x_3 - x_1)^2 + \\ + k_p(x_3 - x_4)^2\Big], \tag{9}$$

de unde rezultă matricea de rigiditate a sistemului pod-structură, în cazul $x_3 \geqslant x_1$,

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}+k_t & k_{12} & -k_t & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ -k_t & 0 & k_p+k_t & -k_p \\ 0 & 0 & -k_p & k_p \end{bmatrix}. \tag{10}$$

După desprindere, $x_3 < x_1$, penultimul termen din expresia (9) dispare, ceea ce revine la a considera $k_t = 0$ în (10). În acest caz se observă că matricea K ia forma

$$K = \begin{bmatrix} K_S & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix}, \tag{11}$$

unde submatricele K_S și K_p, de ordinul 2, caracterizează rigiditățile structurii și a podului, privite independent una de alta. Ecuațiile diferențiale (3) se decuplează astfel în două sisteme de cîte două ecuații, independente, ceea ce corespunde dispariției cuplajului elastic dintre cele două subsisteme.

4. INTEGRAREA NUMERICĂ

Ecuațiile (3), în care matricele M, C, K sînt date de (7), (8) și (10) sau (11), cu condițiile inițiale (4) și (5), au fost integrate numeric, prin metoda de integrare Euler ameliorată (cu corecție la fiecare semiinterval [6]). În acest scop, sistemul (3) a fost în prealabil redus la un sistem de ecuații de ordinul I

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY, \tag{12}$$

unde

$$Y(t) = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \dot{x}_1\ \dot{x}_2\ \dot{x}_3\ \dot{x}_4]^T, \tag{13}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$Y(0) = [0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad v_0\quad v_0]^T. \tag{15}$$

În relația (14) matricea pătrată A (matricea rezolvantă), de ordinul 8, este reprezentată prin submatricele sale, de ordinul 4; I reprezintă matricea unitate.

Notînd $h = \Delta t$ pasul de timp al integrării numerice, metoda Euler permite determinarea vectorului Y în puncte echidistante situate pe axa timpului

$$Y_i = Y((i-1)h), \tag{16}$$

folosind un algoritm recursiv,

$$Y_{i+1} = (I + hA + h^2A^2/2)Y_i, \tag{17}$$

cu valoarea inițială $Y_1 = Y(0)$, dată de (16) și (15). Se observă că metoda de integrare adoptată este o metodă de ordinul II, conținînd termeni pînă la gradul 2 inclusiv în h.

Programul de calcul TAMPON prevede verificarea, la fiecare pas de timp, a condiției de contact $x_3 \geqslant x_1$. După momentul desprinderii ($x_3 < x_1$), în relația (14) expresia (10) a matricei K se înlocuiește prin (11), și integrarea continuă, cu modificarea corespunzătoare în (17).

Pentru a asigura o precizie satisfăcătoare a metodei numerice (care converge, pentru $h \to 0$, la soluția exactă), s-a adoptat un pas de timp

$$h = \min(T_1,\ T_2,\ T_p)/20,$$

unde T_1 și T_2 sînt perioadele proprii ale structurii (în cazul estacadelor $T_1 = T_2$), iar T_p este perioada proprie a podului în modul fundamental.

5. PROGRAMUL TAMPON

Algoritmul prezentat, trascris în limbaj FORTRAN, permite efectuarea automată a întregului calcul. Datele inițiale ale problemei sînt mărimile k_t, k_p, m_1, m_2, m_p, m_t, λ, v_0, modulul de elasticitate, deschiderile și momentele de inerție ale barelor.

Programul imprimă, sub titlul „Rezultate" :

— pasul de timp al integrării, h,

— elementele matricei de rigiditate reduse, k_{ij},

— pulsațiile proprii p_1, p_2 (ale structurii) și p_p(a podului),

— forța maximă în tampon $F_t^{\max}$,

— deplasările maxime, în valoare absolută, ale structurii, la nivelul căii de rulare și acoperișului, $x_1^{\max}$ și $x_2^{\max}$,

— momentele încovoietoare maxime în barele cadrului.

Opțional, programul tipărește și istoria deformației, în funcție de timp, $x_i((j-1)h)$, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,\ldots,N$.

6. ANALIZA SOLUȚIEI

Pentru integrarea soluției și desprinderea unor concluzii, programul TAMPON a fost rulat în diverse variante privind datele inițiale. S-a urmărit în mod special comparația soluției prezente cu cea din lucrarea [1] (denumită, în cele ce urmează, „soluția [1]"). De aceea, în prezenta lucrare sînt menționate numai rezultate obținute în cazul estacadelor ($m_2 = 0$), la care soluția [1] este aplicabilă.

S-a admis $m_t = 0{,}1\ m_p$, rezultînd din relația (6) $m_{33} = m_{44} = 0{,}1943\ m_p$, $m_{24} = 0{,}0557\ m_p$. De asemenea, s-a presupus în toate calculele $v_0 = 0{,}83$ m/s.

Se notează prin F_∞, forța maximă din tampon (și din structură) care ar corespunde structurii perfect rigide, în soluția [1]

$$F_\infty = v_0 \sqrt{k_t m_3}. \tag{18}$$

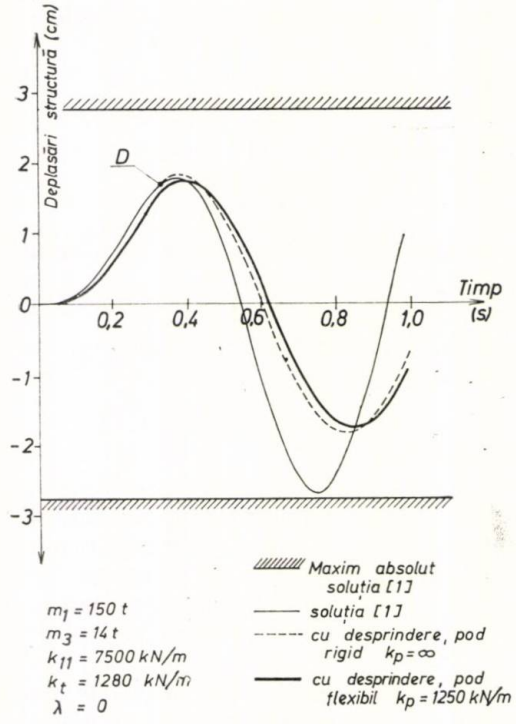
Mărimea F_∞ are rolul unei forțe de referință în considerațiile care urmează.

Se notează, în fine,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{11}}{m_1}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{m_3}} \tag{19}$$

pulsația proprie a structurii independente (pentru estacade, $\omega_1 \equiv p_1$) și, respectiv, a subsistemului pod-tampon, (în ipoteza podului perfect rigid).

Integrarea numerică a fost efectuată pentru $0 \leqslant t \leqslant t_m$, unde t_m este momentul primului extrem relativ al mărimii $x_1(t)$ după desprindere. Întrucît structura este, după desprindere, un oscilator liniar cu un singur grad de libertate, avem evident $|x_1(t)| \leqslant |x_1(t_m)|$ pentru $t \geqslant t_m$, deci max $|x_1(t)|$ se realizează în mod necesar la un moment $t_0 \leqslant t_m$, ceea ce asigură atingerea efectivă a maximului absolut în intervalul de timp urmărit prin integrarea numerică $[0, t_m]$.



ig. 2. — Influența desprinderii și flexibilității podului asupra deplasărilor.

Influența fenomenului de desprindere și a flexibilității podului asupra deplasării x_1 (și, implicit, asupra forței tăietoare din structură T_1) se observă în figura 2. În exemplul considerat, desprinderea**) reduce sensibil (cu circa 34%) maximumul deplasării, chiar și în absența amortizării ($\lambda = 0$). În schimb, flexibilitatea podului are un efect relativ mic—reducere suplimentară a deplasărilor maxime cu circa 3%.

Este demn de semnalat că maximele absolute ale răspunsului în soluția [1] sînt deduse pe baza relației corecte (pentru oscilatorul linear neamortizat cu două grade de libertate)

$$|x_1|_{\max} = \max_{0 \leqslant t < \infty} |a_1 \sin p_1 t + a_2 \sin p_2 t| = |a_1| + |a_2|, \quad (20)$$

care însă nu precizează și momentul la care egalitatea are loc; de pildă, în exemplul din figura 2, maximumul absolut al soluției [1] nu a fost atins în intervalul de timp considerat. Dimpotrivă, metoda propusă în prezenta lucrare asigură determinarea maximului absolut, realizabil efectiv, inclusiv în prezența amortizării (inevitabilă în structurile reale), cînd relația (20) își pierde sensul.

În final, se observă că pentru $k_p = \infty$, $\lambda = 0$ (curba punctată din fig. 2) rezultatele metodei propuse coincid cu soluția [1] în intervalul $0 \leqslant t \leqslant t_*$ (pînă la desprindere), întrucît cele două metode se aplică aceluiași model dinamic (pod rigid, contact pod-structură, fără amortizare).

Funcționarea legăturii unilaterale dintre pod și structură este ilustrată de figura 3, care arată evoluția deplasărilor $x_1(t)$, $x_3(t)$ și a forței din tampon, dată de relația (2).

**) În figura 2 și următoarele, momentul desprinderii este marcat prin D.

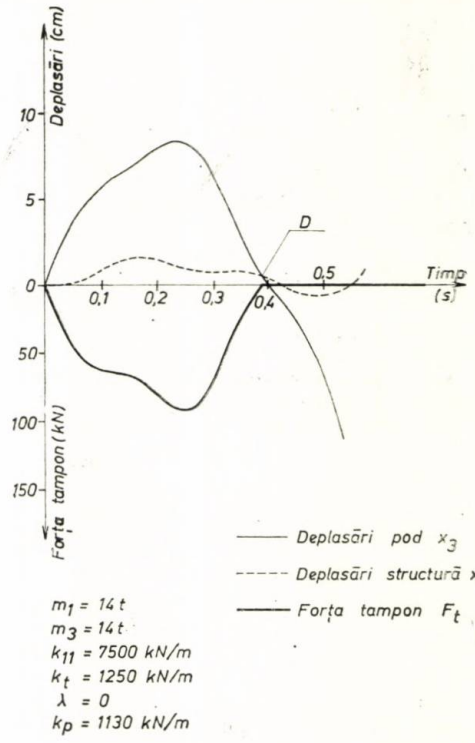


Fig. 3 — Variația forței din tampon.

În figura 4 este ilustrată influența desprinderii și a flexibilității podului asupra forței din tampon. În exemplul considerat efectul desprinderii este neglijabil (reducerea de 2,5% față de [1]), în schimb efectul

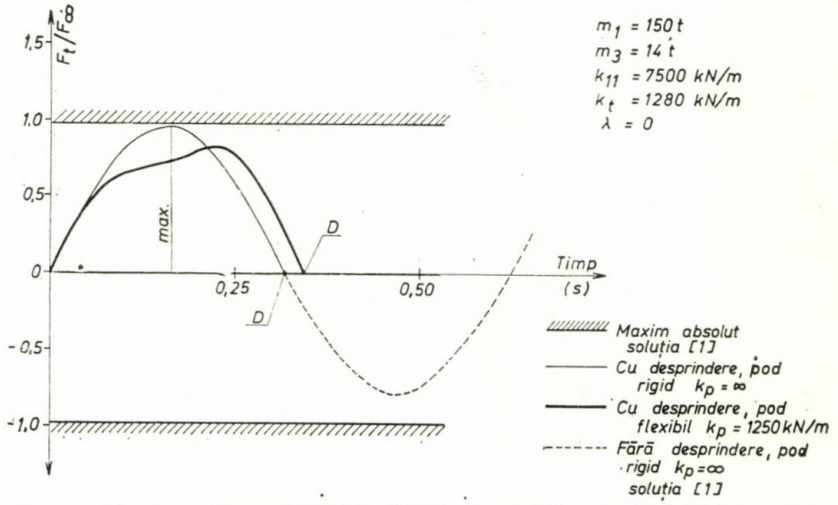
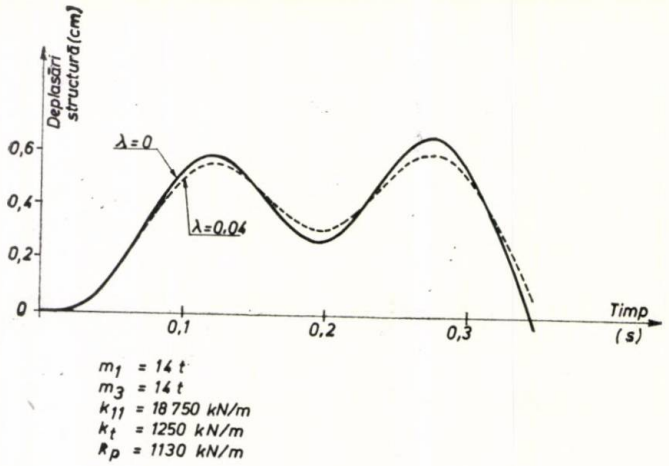


Fig. 4 — Influența desprinderii și flexibilității podului asupra forței din tampon.

flexibilității podului este important (reducere de 18% față de [1]). Nici de această dată maximumul absolut, dat de relația (21) din [1] nu este



m_1 = 14 t
m_3 = 14 t
k_{11} = 18750 kN/m
k_t = 1250 kN/m
k_p = 1130 kN/m

Fig. 5 — Influența amortizării asupra răspunsului.

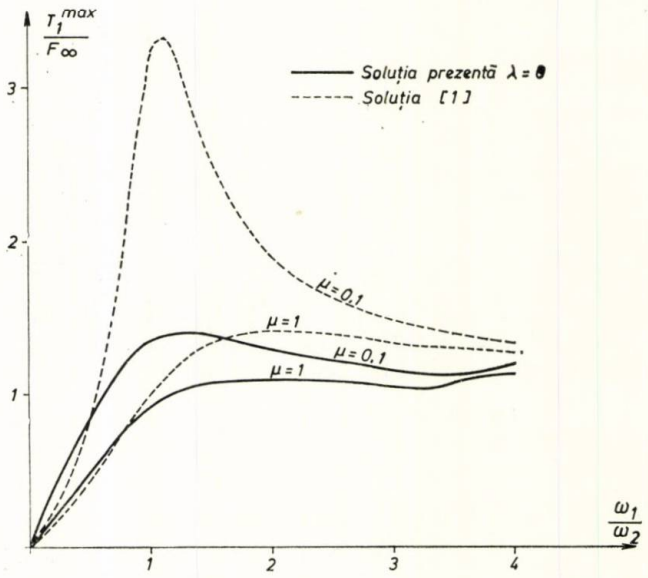


Fig. 6 — Forța tăietoare maximă în funcție de parametrii dinamici ai structurii

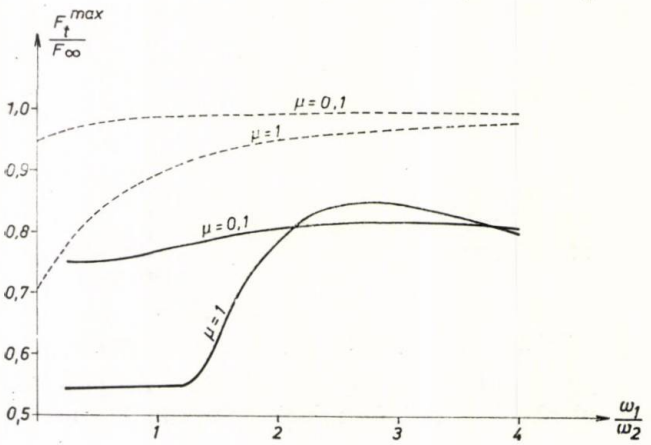


Fig. 7 — Forța maximă din tampon în funcție de parametrii dinamici ai structurii.

atins efectiv în timpul contactului pod-structură. De notat că și în figura 4 curba plină și cea punctată se suprapun pînă în momentul desprinderii, pentru motivul amintit mai sus în legătură cu figura 2.

Efectul amortizării este examinat în figura 5, comparînd soluțiile în două variante care diferă numai prin valoarea atribuită parametrului λ. Se observă că amortizarea influențează relativ puțin maximumul curbei răspunsului (în exemplul considerat, scădere de circa 9%) și neglijabil forma acestei curbe. Evident, efectul amortizării este întotdeauna favorabil pentru structură.

În figurile 6 și 7 este reprezentată variația principalilor indicatori ai soluției — forța tăietoare maximă în structură, T_1^{max} și în tampon, F_t^{max}, pentru două rapoarte ale factorului $\mu = m_3/m_1$ și pentru diverse valori ale raportului ω_1/ω_2. În toate cazurile s-a admis $\lambda = 0$, pentru a obține o comparație cît mai concludentă cu soluția [1]. Pentru generalitatea concluziilor, în ordonată au fost înregistrate valorile adimensionale T_1^{max}/F_∞, respectiv F_t^{max}/F_∞, unde $F_\infty = m_3 v_0 \omega_2$, conform relațiilor (18) și (19). În acest fel, graficele arată direct influența parametrilor esențiali ai structurii, (masă și rigiditate), asupra solicitărilor maxime. Într-adevăr, pentru un pod anumit, parametrii m_3, v_0, k_t, implicit F_∞ și ω_2 au valori determinate, masa structurii determină raportul μ, iar rigiditatea sa determină valoarea ω_1, deci raportul ω_1/ω_2. De notat că în figura 5 a lucrării [1] este reprezentată de fapt variația raportului $T_1^{max}/(m_3 v_0 \omega_1)$, identificat în text, în mod eronat, cu T_1^{max}/F_∞.

Figura 6 arată că soluția [1] majorează soluția propusă pe un interval larg de frecvențe proprii, indicînd în anumite zone solicitări sporite cu peste 100%. Se remarcă, de asemenea, relativa independență a forței T_1^{max} față de rigiditatea și masa structurii, în zona frecvențelor proprii înalte, (deci a structurilor rigide).

În schimb, se observă că există un interval de frecvențe proprii joase (structuri flexibile), la care soluția [1] este descoperitoare. În ceea ce privește forța din tampon, figura 7 arată că soluția [1] are peste tot un caracter exagerat acoperitor.

7. CONCLUZII

În lucrare se propune o nouă metodă pentru analiza dinamică a structurilor supuse tamponării podurilor rulante.

În raport cu realizările anterioare, metoda propusă este mai cuprinzătoare, permițînd luarea în considerare a unor factori suplimentari (prezența maselor importante la nivelul acoperișului, caracterul unilateral al legăturii prin tampon, flexibilitatea podului rulant și disiparea de energie în fenomenul ciocnirii).

Aplicarea metodei propuse în activitatea curentă de proiectare nu ridică obstacole, calculul fiind complet automatizat prin programul TAMPON, elaborat de autori.

Efectul parametrilor noi luați în considerare asupra răspunsului structurii este suficient de important încît aplicarea metodei de calcul să se recomande de la sine.

Metoda se poate generaliza fără modificări de fond în diverse direcții : clădiri cu mai multe nivele sau mai multe deschideri, legi fizice nelineare pentru tampon sau structură, etc.

Primită la redacție la 22 octombrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. I. Otescu, *Determinarea forțelor produse de izbirea podurilor rulante*, Standardizarea, nr. 11/1969.
2. N. M. Newmark, *Seismic design spectra for nuclear power plants*, Proc. ASCE, Journ. Power Div., No PO2/Nov. 1973.
3. W. Hurty, M. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1964.
4. J. Archer, *Consistent mass matrix for distributed mass systems*, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., No. ST4/Aug. 1963.
5. W. Nowacki, *Dinamica sistemelor elastice*, Edit. tehnică, București, 1969.
6. J. Legras, *Méthodes et techniques de l'analyse numérique*, Dunod, Paris, 1971.

UNELE REZULTATE ALE UTILIZĂRII CORELAȚIILOR MULTIPLE ÎN PROBLEME DE MECANICA PĂMÎNTURILOR*)

de RODICA MINCU, AURELIAN BĂLĂȘESCU

Institutul de studii și proiectări pentru îmbunătățiri funciare (ISPIF)

ANATOLIE MARCU

Institutul de construcții București

Proprietățile pămîntului sînt definite de un număr de mărimi (caracteristici geotehnice), care au un caracter aleatoriu, legăturile cauzale (fizice) între ele nefiind — în general — cunoscute; în consecință se apelează la corelațiile statistice pentru analiza acestor dependențe.

În lucrare se studiază influența simultană a caracteristicilor independente (factoriale) asupra caracteristicei rezultante, precum și posibilitatea de a determina contribuția fiecărei variabile. Se demonstrează că regresiile multiple sînt mai semnificative, din punct de vedere tehnic și statistic, față de regresiile simple (între două caracteristici), utilizate curent în studiile geotehnice.

Spre exemplificare se prezintă: corelații între parametrii rezistenței la forfecare (Θ, c) și indicii fizici ai pămîntului, corelații între modulul de deformație și rezistența la penetrare statică și corelații privind stabilitatea taluzelor, determinate pe baza unor date din practica curentă de studii și proiectare.

Structura complexă, cu microneomogenități datorată condițiilor particulare de formare geologică și transformare ulterioară, conferă pămîntului, în raport cu alte corpuri solide, o stare solidă cu comportare specială sub acțiunea factorilor influenți.

Ca urmare acestei structuri complexe, proprietățile pămîntului sînt definite de un număr mare de mărimi (caracteristici geotehnice), mărimi cu caracter aleatoriu și cu legături cauzale (fizice) în general necunoscute.

În vederea dimensionării optime a terenului de fundare și a construcțiilor de pămînt, este necesară, de regulă, cunoașterea valorilor caracteristicilor mecanice ale pămînturilor (compresibilitate, rezistență la forfecare) și a variabilității acestora în amplasamentele respective, precum și corelațiile între mărimile ce interesează.

Pentru analiza dependențelor este interesant să se studieze influența simultană a caracteristicilor independente (factoriale) asupra caracteristicei dependente (rezultante), precum și posibilitatea de a determina contribuția fiecărei variabile independente.

*) Lucrarare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică aplicată, București, 18—20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3 ,1977, P. 407—415

Din punct de vedere tehnic și statistic, regresiile multiple sînt mai semnificative față de regresiile simple (între două caracteristici), utilizate curent în studiile geotehnice.

Suprafața de regresie a lui y, variabilă dependentă, în raport cu variabilele independente x_k poate fi aproximată printr un hiperplan în spațiul euclidian cu $k + 1$ dimensiuni.

Hiperplanul de regresie descrie corelația dintre mărimile variabile și modul în care variațiile unor variabile independente modifică în medie variabila dependentă.

Ecuația hiperplanului de regresie este de forma

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k. \tag{1}$$

Coeficienții $b_0, b_1 \ldots, b_k$ se determină astfel încît dispersia abaterilor valorilor observate y față de valorile determinate pe baza ecuației de regresie $Yx_1 x_2 \ldots x_k$ să fie minimă :

$$M[y - Yx_1 x_2 \ldots x_k]^2 = M[y - b_0 - b_1 x_1 - \ldots - b_k x_k]^2 = \text{minim.} \tag{2}$$

Anulînd derivatele parțiale ale expresiei (2) în raport cu parametrii b_0, b_k se obține un sistem liniar de $k + 1$ ecuații cu $k + 1$ necunoscute : $b_0, b_1, \ldots, b_k$.

Matricea coeficienților sistemului fiind simetrică, sistemul rezolvat prin metoda Gauss-Jordan normalizată dă valorile coeficienților de regresie $b_0, b_1, \ldots, b_k$.

În cazul corelației multiple interesează influența simultană a caracteristicilor factoriale $x_1, \ldots, x_k$ asupra caracteristicii rezultate y.

Pentru a măsura intensitatea legăturii între caracteristica rezultantă y și caracteristicile factoriale $x_1, x_2, \ldots, x_k$, se folosește coeficientul multiplu de corelație, $R_{yx_1 \ldots x_k}$.

$$R_{yx_1 x_2 \ldots x_k} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{yx_1 \ldots x_k}}{\sigma^2_y}}, \tag{3}$$

în care $\sigma^2_{yx_1 \ldots x_k}$ reprezintă abaterea medie pătratică a valorilor observate y față de valorile corespunzătoare, Y, calculate pe baza ecuației de regresie :

$$\sigma^2_{yx_1 \ldots x_k} = \frac{\Sigma y^2 - b_0 \Sigma y - b_1 \Sigma y x_1 - \ldots - b_k \Sigma y x_k}{n},$$

$$0 \leqslant R_{yx_1 \ldots x_k} \leqslant 1.$$

Dacă $R_{yx_1 \ldots x_k} = 1 \Rightarrow \sigma^2_{yx_1 \ldots x_k} = 0$,
ceea ce înseamnă că valorile observate ale lui y coincid cu valorile determinate pe baza regresiei multiple, adică toate valorile observate se găsesc pe un hiperplan definit de ecuația de regresie în spațiul cu $k + 1$ dimensiuni.

Dacă $R_{yx_1 \ldots x_k} = 0$ înseamnă că caracteristica y nu e corelată liniar cu caracteristicile $x_1, \ldots, x_k$.

În cazul corelației multiple se cercetează influența simultană a caracteristicilor factoriale (variabilele independente) $x_1, \ldots, x_k$ asupra caracteristicei rezultante (variabila dependentă) y.

Această influență simultană este măsurată de pătratul coeficientului de corelație multiplă $Ry\ x_1, \ldots x_k$ denumit coeficient al determinației multiple.

$$d_{yx_1 \ldots x_k} = R^2_{yx_1 \ldots x_k} = \frac{\sigma_y^2 - \sigma^2_{yx_1 \ldots x_k}}{\sigma_2^y}. \tag{4}$$

Să presupunem că un număr ($j < k - 1$) de caracteristici factoriale (variabile independente) se mențin la un anumit nivel constant. Rezultă că se poate cerceta influența uneia sau simultan mai multor variabile independente asupra lui y. Această influență se poate măsura prin coeficienții determinației parțiale. Fiecare coeficient de determinație parțială arată ponderea influenței fiecărei caracteristici factoriale în variația variabilei rezultante y.

Se demonstrează că determinația totală se poate descompune în coeficienți de determinație parțială

$$d_{yx_1 \ldots x_k} = d_{yx_1} + x_1 d_{yx_2} + \ldots + x_1 \ldots x_{k-1} d_{yx_k} \tag{5}$$

Așadar prin includerea de noi caracteristici factoriale în analiza corelațională se micșorează succesiv dispersia rămasă a caracteristicii rezultante y.

În consecință, coeficientul corelației multiple exprimînd influența totală a tuturor caracteristicilor factoriale are valoarea mai mare decît coeficienții de determinație parțială.

Calculele de corelație statistică efectuîndu-se asupra unor selecții de variabile aleatoare, indicatorii obținuți constituie estimații ale valorii lor exacte în colectivitatea generală.

Trebuie deci să se verifice semnificația lor, determinîndu-se limitele de încredere corespunzătoare unui anumit nivel de semnificație.

Semnificația coeficienților de regresie b_j, se verifică cu ajutorul „criteriului t" definit de

$$t_j = \frac{b_j}{S_{bj}} \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{6}$$

în care S_{bj} este eroarea de selecție a coeficientului de regresie b_j.

Se consideră b_j semnificativ dacă valoarea lui t_j calculată din datele cercetării este mai mare decît valoarea lui t a repartiției teoretice, corespunzătoare nivelului de semnificație ales și gradelor respective de libertate.

Limitele de încredere ale coeficienților de regresie în colectivitatea generală vor fi date de

$$b_j \pm t_j \tag{7}$$

cu posibilitatea de a le depăși (funcție de nivelul de semnificație ales).

Pentru a verifica semnificația corelației multiple se face analiza dispersională, cu testul F (Snedekor)

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}, \tag{8}$$

unde s_1^2, s_2^2 sînt estimații ale dispersiei generale,

$\Sigma(y - Y)^2$ reprezintă suma pătratelor abaterilor valorilor observate față de valorile calculate pe baza ecuației de regresie,

$\Sigma(Y - \bar{y})^2$ suma pătratelor abaterilor valorilor calculate pe baza ecuației de regresie față de media caracteristicii y.

Expresiile acestor dispersii sînt date de relațiile :

$$s_1^2 = \frac{\Sigma(y - Y)^2}{n - k - 1} \quad n - k - 1 \text{ grade de libertate,}$$

$$s_2^2 = \frac{\Sigma(Y - \bar{y})^2}{k} \quad k \text{ grade de libertate.} \tag{8'}$$

Corelația multiplă este semnificativă dacă valoarea F calculată mai sus este mai mare decît valoarea F a repartiției teoretice (citită în tabele) corespunzătoare nivelului de semnificație ales și gradelor de libertate.

Regiunea de încredere pentru Y se determină construind pentru σ^2 (corespunzătoare lui y) estimația absolut corectă (s^2).

Atunci limitele de încredere pentru Y în colectivitatea generală vor fi date de expresia

$$y = f(x_1, \ldots, x_k) \pm t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{9}$$

în care

s este estimația absolută exactă pentru σ_y^2,

$t_{n-1}(\alpha)$ — coeficient al repartiției Student funcție de numărul gradelor de libertate $(n-1)$ și nivelul de încredere $\alpha = 0{,}95$ (probabilitate $p = 0{,}05$).

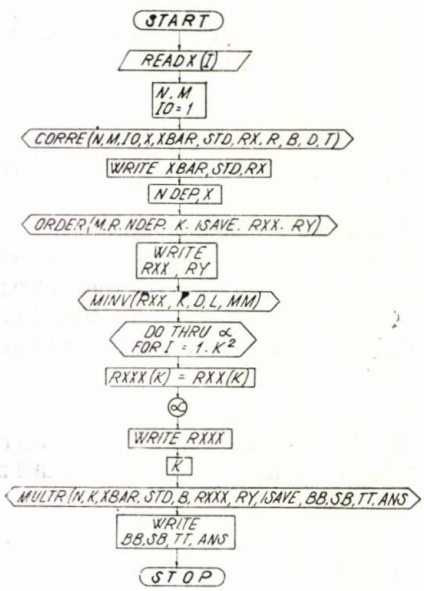


Fig. 1. — *Schema logică a programului principal de calcul.*

În geotehnică se folosește un nivel de încredere de 0,90 ... 0,95 (normele noi SNiP au legiferat aceste valori). În exemplele ce urmează s-a acceptat $\alpha = 0{,}95$.

Variabilele independen $j = 1, \ldots, k$ și variabila dependentă y pot fi considerate componentele unui vector aleator în spațiul cu $k + 1$ dimensiuni.

Deci vectorul aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_k, Y)_i$ $(i = 1, n)$ este un vector cu $k + 1$ componente, asupra căruia s-au efectuat n observații.

Se obține o matrice X cu $(k+1) \times n$ elemente.

Programul principal (fig. 1) folosește subrutinele : CORRE, ORDER, MINV, MULTR, stabilind : valorile medii ale variabilelor (vectorul XBAR), dispersiile acestora (vectorul STD), coeficienții de corelație parțială (vectorul RY), coeficienții hiperplanului de regresie (vectorul BB), coeficientul multiplu de corelație R și alte elemente pentru analiza dispersională.

I. CORELAȚII ÎNTRE MODULUL DE DEFORMAȚIE LINIARĂ AL PĂMÎNTURILOR ȘI REZISTENȚA LA PENETRARE STATICĂ

Modulul de deformație liniară este o caracteristică de bază servind la calculul tasărilor construcțiilor proiectate pe terenul respectiv.

Modulul se stabilește experimental, în laborator sau pe teren, pornind de la ipoteza dependenței liniare între efort și deformație (fig. 2).

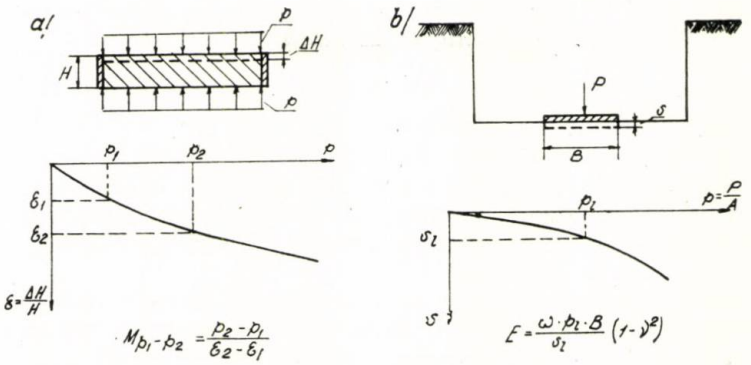


Fig. 2. — *Schemele încercărilor de compresibilitate* : a) încercarea în edometru ; b) încercarea cu placă.

— În laborator, modulul edometric M se determină pe probe de pământ, de obicei în intervalul de presiuni 2 și 3 daN/cm ^{2} (M_{2-3}).

— Pe teren se stabilește modulul E prin încercări cu placa, direct pe stratul de fundare, folosind relația Schleicher din teoria elasticității.

— Încercarea de penetrare statică (fig. 3), utilizată mult în practica mondială în ultimul timp, are avantajul rapidității, costului redus și al continuității testării pe întreaga grosime a stratului.

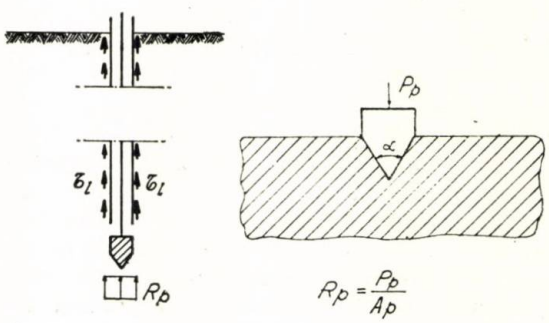


Fig. 3. — *Schema de lucru a penetrometrului static.*

Caracteristicile penetrometrului utilizat :

— diametrul penetrometrului ... $\ldots d_p = 3{,}56$ cm,

— unghiul la vîrf al conului... $\alpha =$ $= 60°$,

— viteza de penetrare..... $v =$ $= 2$ cm/s.

Buisman (1944) a arătat că la presarea unui con rigid într-un mediu elastic, între modulul de elasticitate E al mediului și efortul unitar pe suprafața bazei conului există dependența

$$E = \frac{3}{2} R_p$$

În realitate pământul nu se comportă ca un corp perfect elastic, iar operația de înfigere, cu viteza constantă, a penetrometrului crează zone de rupere în masiv : deci relația teoretică reproduce doar aproximativ fenomenul.

Totuși experimentările au arătat existența unei dependențe între valorile E și R_p.

Studiile efectuate în străinătate de Bachelier și Parez (1965), Sanglerat s. a. (1972), Trofimenkov (1974) precum și unele experimentări realizate în cadrul INCERC — București, au semnalat posibilitatea stabilirii unei corelații statistice simple de forma

$$E = \alpha R_p,$$

în care $\alpha = 1 \ldots 9$ (în funcție de tipul pământului).

Totuși, dispersiile valorilor au fost mari.

În continuare, se prezintă corelații multiple stabilite de autori, în care s-a ținut seama și de influența unor caracteristici fizice ale pământurilor (porozitatea n, consistența Ic, precum și sarcina geologică la nivelul încercării σ_{gz}).

Datele experimentale ce au stat la baza prelucrării au fost alese cu discernământ, reținîndu-se numai determinările în strate omogene. S-au analizat în paralel valorile R_p determinate cu același tip de penetrometru (fig. 3) și valorile M și E stabilite în sondaje amplasate în imediata vecinătate.

Se prezintă corelațiile stabilite pentru cîteva categorii de pământuri :

A. *Pentru argile*, prin prelucrarea unui număr $N = 143$ valori a rezultat corelația :

$$M_{2-3} = 69 + 2{,}28\ R_p - 10{,}6\ \sigma_{gz} - 1{,}08\ n + 53{,}3\ Ic \pm 0{,}95.$$

Coeficienții de corelație parțială (simplă)

$r_1(M_{2-3},\ R_p) = 0{,}609$: $\quad r_2(M_{2-3},\ \sigma_{gz}) = 0{,}094,$

$r_3(M_{2-3},\ n) = 0{,}48$: $\quad r_3(M_{2-3},\ I_c) = 0{,}50.$

Coeficientul corelației multiple : $R = 0{,}714$.

Se remarcă :

— dependența valorilor M_{2-3} de porozitatea și consistența pământului, pusă în evidență de valorile relativ ridicate r_3 și r_4 ;

— valoarea mai ridicată a coeficientului corelației multiple R, față de valorile r ;

— valoarea redusă a abaterii față de hiperplanul de regresie ($\pm$ 0,95 daN/cm ^{2}) pentru nivelul de încredere ales (95%).

B. Corelația între modulul de deformație liniară determinat prin încercări cu placa, pentru 17 încercări paralele în pământuri coezive :

$$E = 259 + 3{,}8\ R_p - 12{,}7\ \sigma_{gz} - 5{,}53\ n + 28{,}4\ I_c \pm 4{,}25,$$

$r_1(E,\ R_p) = 0{,}937$: $\quad r_2\ (E,\ \sigma_{gz}) = 0{,}294,$

$r_3\ (E,\ n) = 0{,}801$: $\quad r_4(E,\ I_c) = 0{,}14,$

$$R = 0{,}979.$$

Se remarcă valoarea ridicată a coeficientului de corelație multiplă, deoarece se compară două determinări efectuate în situ, fără a mai apare influența tulburării probelor de pămînt la recoltare.

II. CORELAȚII ÎNTRE EFORTUL UNITAR DE FORFECARE AL PĂMÎNTURILOR ȘI ALTE CARACTERISTICI GEOTEHNICE

Se consideră că prezintă interes corelația multiplă $\tau = f(\sigma, S_r, n, I_p)$.

τ, σ — efortul unitar de forfecare și, respectiv, efortul unitar normal (daN/cm ^{2}),
S_r — gradul de umiditate,
n — porozitatea (%),
I_p — indicele de plasticitate (%).

Se acceptă relația lui Coulomb ($\tau = \sigma \cdot \mathrm{tg}\Phi + c$) într-un cadru mai general (relație liniară în spațiul cu 5 dimensiuni) adică sub influența simultană a altor variabile factoriale (S_r, n, I_p).

Pentru un strat relativ omogen alcătuit din argile grase ... argile prăfoase din amplasamentul unei construcții inginerești pe rîul Ialomița (amenajare Panțoiu), pentru un număr de 25 încercări s-au obținut următoarele rezultate :

$$\tau = 2{,}29 + 0{,}264\ \sigma - 0{,}658\ S_r - 0{,}0267\ n - 0{,}001\ I_p \pm 0{,}192$$

$$R = 0{,}882.$$

Caracteristica geotehnică	UM	Domeniul valorilor	Valori medii	r_{yx}
τ	daN/cm ^{2}	0,26...1,36	0,82	—
σ	daN/cm ^{2}	0,50...3,00	1,94	0,857
S_r	—	0,86...1,00	0,94	0,122
n	%	44,0...52,0	49,3	0,391
I_p	%	30,0...64,0	51,0	0,133

Se remarcă :

Influența mare a efortului unitar normal asupra efortului unitar de forfecare, ceea ce confirmă relația lui Coulomb.

Influența celorlalte caracteristici factoriale asupra efortului unitar de forfecare.

Semnificația mai cuprinzătoare a conceptului de coeziune a pămînturilor.

III. CORELAȚIA MULTIPLĂ ÎN PROBLEMELE DE STABILITATE A TALUZELOR

Stabilitatea taluzelor se analizează prin multe metode și ipoteze de calcul. Important este faptul că factorii influenți luați în calcul (geometrici și geotehnici) sînt factori nealeatori.

În literatura de specialitate (Taylor — 1954) se cunosc relațiile empirice între mai mulți factori : $\frac{c}{\gamma \cdot H} = f(\alpha)$ (fig. 4).

Este interesant faptul că și în domeniul factorilor nealeatori se poate aplica metoda corelațiilor multiple.

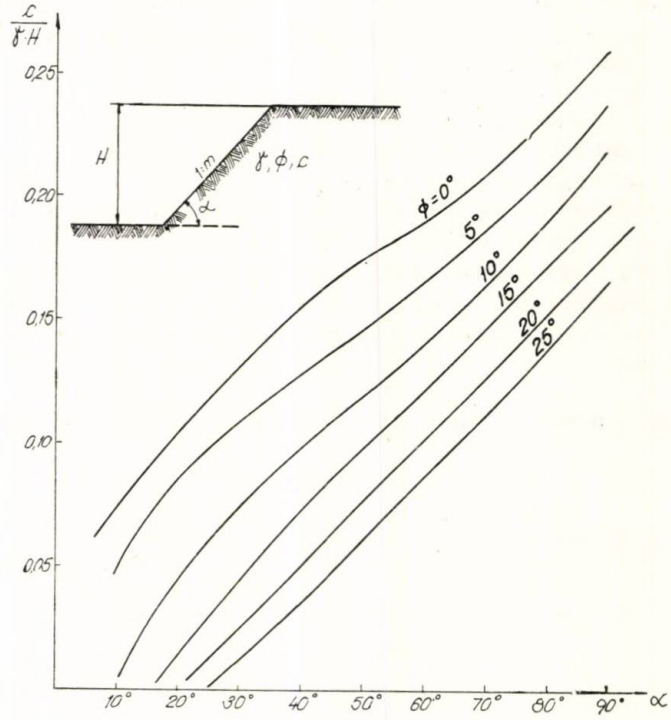


Fig. 4. — *Nomogramă pentru calculul stabilității taluzelor* (Taylor, 1954).

Se poate stabili corelația multiplă $F_s = f(H, m, \Phi, c, \gamma)$, în care F_s este factorul de stabilitate determinat prin metoda Fellenius.

Pentru un număr de 42 de situații de stabilitate calculate s-au obținut următoarele rezultate :

$$\log F_s = -1{,}91 - 0{,}416 \log H + 0{,}593 \log m - 0{,}151 \log \text{Ø} -$$

$$- 0{,}063 \log C + 7{,}57 \log \gamma \pm 0{,}128.$$

$$R = 0{,}823.$$

Caracteristica geotehnică	UM	Domeniul valorilor	Valori medii	r_{yx}
F_s	—	0,761...2,916	1,62	—
H	m	2,0 ... 5,0	3,67	0,492
m	—	1,5...2,5	2,0	0,459
Ø	rad.	0,087...0,611	0,312	0,047
c	10 daN/cm^2	0,0...1,5	0,641	0,103
γ	10^{-1}kN/m^3	1,70...1,90	1,83	0,350

BIBLIOGRAFIE

1. M. Bachelier, L. Parez, *Contribution à l'étude de la compressibilité des sols à l'aide du pénétromètre a cône*, Proceedings of the sixth I. C. O. S. M. F. E., University of Toronto Press, Montreal, 1965.
2. K. Buisman, *Groundmechanica*, Walterman, Delft, 1944.
3. G. Sanglerat, J. Gilley, P. Lareal, C. Chapeau, *Le pénétromètre statique et la compressibilité des sols*, Annalles de l'I.T.B.T.P. *298*, Octobre 1972, Paris.
4. D. W. Taylor, *Fundamentals of Soil Mechanics*, J. Wiley, New York — London, 1954.
5. I. G. Trofimenkov, L. N. Vorobkov, *Polevie metodi issledovania stroitelnih svoistv gruntov*, Stroiizdat, Moskva, 1974.
6. I. Văduva, *Analiza dispersională*, Edit. tehnică, București, 1970.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL DE CONLUCRARE SPAȚIALĂ DINTRE SUPRASTRUCTURĂ, FUNDAȚIE ȘI TERENUL DE FUNDARE *)

de DECEBAL M. ANASTASESCU

Institutul de proiectări Timișoara (IPROTIM)

Într-o tratare de sinteză, autorul prezintă unele contribuții în problema interacțiunii suprastructură — fundație — teren, ca :

— generalizarea metodelor de calcul static (metoda eforturilor și metoda deplasărilor), precum și a sintezei lor (metoda mixtă) la cadrele spațiale în conlucrare cu terenul de fundare prin intermediul fundațiilor izolate sau de tip radier general ;

— includerea aspectului reologic (curgerea lentă a betonului și consolidarea terenului argilos) în calculul cadrelor spațiale de beton armat pe reazeme deplasabile precum și elaborarea unui procedeu de calcul aproximativ, în două etape, pentru determinarea eforturilor relaxate ce apar în secțiunile acestor structuri în cazul fundării pe terenuri necoezive (nisipoase) ;

— formularea matricelă a întregei expuneri, potrivită programării la calculatoarele electronice.

Exemplele practice de calcul din lucrare demonstrează importanța cantitativă, dar mai ales calitativă, a considerării deformațiilor terenului de fundare și a aspectului reologic în calculul cadrelor spațiale, în vederea obținerii unor soluții cît mai eficiente, sub aspect constructiv și economic, în proiectarea acestor structuri.

I. GENERALIZAREA METODELOR DE CALCUL STATIC [3]

A. CALCULUL EXACT

1. Cazul fundațiilor izolate

Se consideră structura spațială din figura 1*a* în care reazemele *i*, *o*, *p* ,*r* sînt deplasabile. Pentru a include în calcule efectul de conlucrare dintre suprastructură și reazeme, acestea din urmă au fost introduse în schema de calcul sub forma unor bare fictive, echivalente ca rigiditate. Prin „reazem" se înțelege ansamblul constituit din fundația izolată și terenul de fundare corespunzător acesteia [2].

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18 — 20 decembrie 1975.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 417–427

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR BUDAPEST 1848

În continuare se prezintă foarte succint unele relații de calcul, specifice efectului de conlucrare suprastructură — fundație — teren și rezultate ca o reflexie a prezenței barelor fictive.

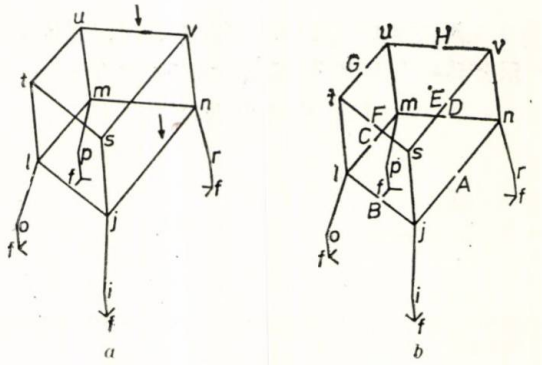


Fig. 1

1.1. *Metoda eforturilor*

În figura 1*b* se prezintă sistemul de bază al structurii considerate. Sistemul de axe *a* (1, 2, 3), propriu fiecărei bare, precum și orientarea necunoscutelor X din secțiunea operată în bara lj sînt date în figura 2*a*.

În figura 2*b* se arată sistemul de axe $A(X, Y, Z)$ valabil pentru întreaga structură, față de care se orientează sistemul de axe propriu fiecărei bare ($a = 1, 2, 3$).

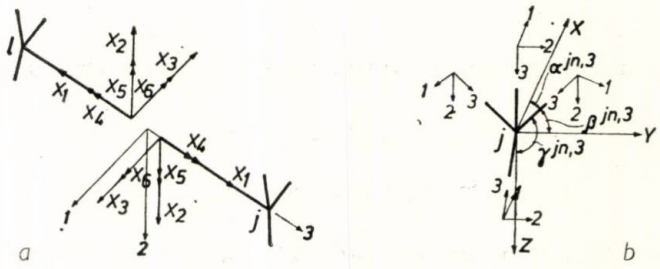


Fig. 2

În matricea de flexibilitate a înregii structuri

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{AA} & \cdots & f_{AE} & \cdots & f_{AH} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{EA} & \cdots & f_{EE} & \cdots & f_{EH} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{HA} & \cdots & f_{HE} & \cdots & f_{HH} \end{bmatrix} \tag{1}$$

unde

$$[f_{AE}] = \begin{bmatrix} f_{1_A 1_E} \cdots f_{1_A 6_E} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ f_{6_A 1_E} \cdots f_{6_A 6_E} \end{bmatrix} \tag{2}$$

și unde, de exemplu,

$$f_{1_A 1_E} = \sum^{S} \sum_{a=1}^{3} \int_0^{s(f)} \frac{e_{a1_A} \cdot e_{a1_E}}{\mathfrak{M}\, \mathcal{G}} \, \mathrm{d}s(f) = f^s_{1_A 1_E} + f^f_{1_A 1_E}, \tag{3}$$

termenul f^f_{A1E1} exprimă influența flexibilității reazemelor.

În mod similar, în matricea deplasărilor datorite încărcărilor exterioare

$$\{F_Q\} = \begin{Bmatrix} F_{AQ} \\ \vdots \\ F_{EQ} \\ \vdots \\ F_{HQ} \end{Bmatrix}, \quad (4), \text{ unde } \{F_{AQ}\} = \begin{Bmatrix} F_{1_A Q} \\ \vdots \\ F_{3_A Q} \\ \vdots \\ F_{6_A Q} \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

și unde, de exemplu,

$$F_{1_A Q} = \sum^{S} \sum_{a=1}^{3} \int_0^{s(f)} \frac{e_{a1_A} \cdot E_{aQ}}{\mathfrak{M}\, \mathcal{G}} \, \mathrm{d}s(f) = F^s_{1_A Q} + F^f_{1_A Q}, \tag{6}$$

termenul $F^f_{1_A Q}$ exprimă aceeași influență, menționată mai sus.

Rezultă că sistemul ecuațiilor de condiție poate fi scris sub forma explicită

$$[F^s + F^f]\{X\} + \{F^s_Q + F^f_Q\} = 0, \tag{7}$$

în care termenii F^s, F^s_Q și F^f, F^f_Q exprimă influența flexibilității suprastructurii, respectiv a reazemelor.

Eforturile finale se obțin din relația

$$\{E^{lj,a}\} = \{E^{lj,a}_Q\} + [e^{lj,a}_X]\,\{X\}. \tag{8}$$

1.2. *Metoda deplasărilor*

În matricea de rigiditate a întregii structuri (cu sistemul de bază din figura 3*a*)

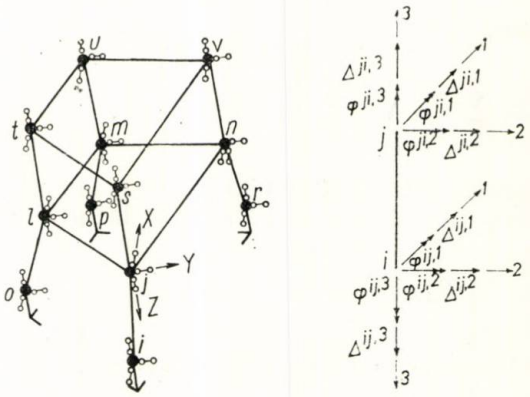
$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} \cdots K_{in} \cdots K_{iv} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ K_{ni} \cdots K_{nn} \cdots K_{nv} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ K_{vi} \cdots K_{vn} \cdots K_{vv} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

unde

$$[K_{ii}] = [k^{if,A}] + [k^{if,A}] \tag{10}$$

și unde

$$[k^{if,A}] = [T^{if}]^T \; [K^{ij,a}] \; [T^{if}] \tag{11}$$



a *b*

Fig. 3

reprezintă matricea de rigiditate a „reazemului" *if*, în sistemul de axe *A*, în care matricele de transformare sînt :

$$[T^{if}] = \begin{bmatrix} C^{if} & \\ & C^{if} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$[C^{if}] = \begin{bmatrix} \alpha^{if,3} & \beta^{if,3} & \gamma^{if,3} \\ \alpha^{if,2} & \beta^{if,2} & \gamma^{if,2} \\ \alpha^{if,1} & \beta^{if,1} & \gamma^{if,1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

iar

$$[K^{if,a}] = [k^{if,a}] = \left[\begin{array}{c|c} k^{if,a}_{\Delta\Delta} & k^{if,a}_{\Delta\varphi} \\ \hline k^{if,a}_{\varphi\Delta} & k^{if,a}_{\varphi\varphi} \end{array}\right] \tag{14}$$

reprezintă matricea de rigiditate a reazemului *if* după direcțiile *a* (1, 2, 3)

Rezolvînd sistemul ecuațiilor de condiție

$$[K]\{\Delta\} + \{Q\} = 0, \tag{15}$$

se obține

$$\{\Delta\} = -\,[K]^{-1}\{Q\} \tag{16}$$

și în final, eforturile în capetele barelor,

$$\{E^{ij,a}\} = \{\mathcal{E}^{ij,a}\} + [K^{ij,a}]\,[T^{ij}]\{\Delta\} \tag{17}$$

1.3. *Metoda mixtă*

În cadrul acestei metode, care reprezintă de fapt o sinteză a celor două metode generale de calcul (metoda eforturilor și metoda deplasărilor), sistemul de bază este prezentat în figura 4, iar sistemul ecuațiilor de condiție este :

$$\begin{bmatrix} F & \vdots & F_K \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_F & \vdots & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \cdots \\ \Delta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_Q \\ \cdots \\ Q \end{Bmatrix} = 0, \qquad (18)$$

unde

$$[F_K] = \begin{bmatrix} f_{Ei} & \cdots & f_{En} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{Hi} & \cdots & f_{Hn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{iE} & \cdots & K_{iH} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{nE} & \cdots & K_{nH} \end{bmatrix}^T =$$

$$= [K_F]^T. \qquad (19)$$

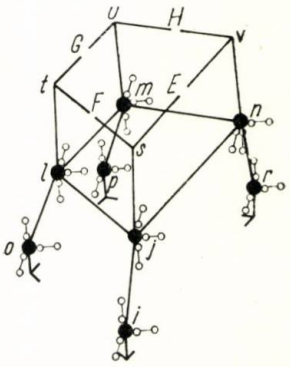


Fig. 4

În final, pentru o secțiune s, a se obțin eforturile

$$\{E^{s,a}\} = \{E_Q^{s,a}\} + \{\mathcal{E}^{s,a}\} + [e_X^{s,a}]\{X\} + [K^{s,a}]\,[T^s]\,\{\Delta\} \qquad (20)$$

B. APROXIMAȚII CURENTE

1. Cazul fundațiilor izolate

Spre deosebire de fundațiile izolate de adîncime (piloți, coloane), în cazul fundațiilor izolate de suprafață fiind satisfăcut (datorită frecării între talpa fundației și teren) coeficientul de siguranță contra alunecării, se consideră în calcule numai deplasarea liniară verticală precum și rotirile acestora în jurul axelor ortogonale orizontale ($a = 1,2$).

1.1. *Metoda eforturilor*

Se anulează astfel, în termenii de tip $f^{if}_{1_A\,1_E}$ și $F^{if}_{1_A Q}$, efectul corespunzător celorlalte deplasări ale reazemelor.

1.2. *Metoda deplasărilor*

Matricea de rigiditate a reazemului if devine

$$[K^{if,a}] = [k^{if,a}]_D, \qquad (21)$$

în care nu apar decît elementele $k^{if}_{\Delta_3\Delta_3}$ $k^{if}_{\varphi_2\varphi_2}$, $k^{if}_{\varphi_1\varphi_1}$ și reprezentarea schematică a reazemelor poate fi făcută ca în figurile 6,10. Conform teoriei semispațiului elastic (Boussinesq), pentru rigiditățile barei ce simbolizează

reazemul *if*, în cazul fundațiilor dreptunghiulare rigide se utilizează expresiile :

$$k^{if}_{\Delta_3\Delta_3} = \frac{E_0\sqrt{A \cdot B}}{K(1-\nu_0^2)}; \quad k^{if}_{\varphi_a\varphi_a} = \frac{E_0(L/2)^3}{K_a(1-\nu_0^2)}, \tag{22}$$

unde

$L(A, B)$ reprezintă laturile fundației ;
E_0 — modulul de deformație liniară al terenului ;
K, K_a — coeficienți dați în tabele tehnice ($a = 1, 2$) ;
ν_0 — coeficientul lui Poisson.

2. Cazul radierelor generale

În acest caz radierul de beton armat poate fi transformat într-o rețea de grinzi (triunghiulară sau ortogonală, în funcție de tipul cadrelor suprastructurii), echivalentă ca rigiditate, conform „Teoriei echivalențelor" [1] (fig. 5*b*, 5*c*). Rețeaua de grinzi reazemă pe terenul de fundare prin intermediul unor plăci rigide articulate în punctele de contact cu aceasta [6] (fig. 5*d*).

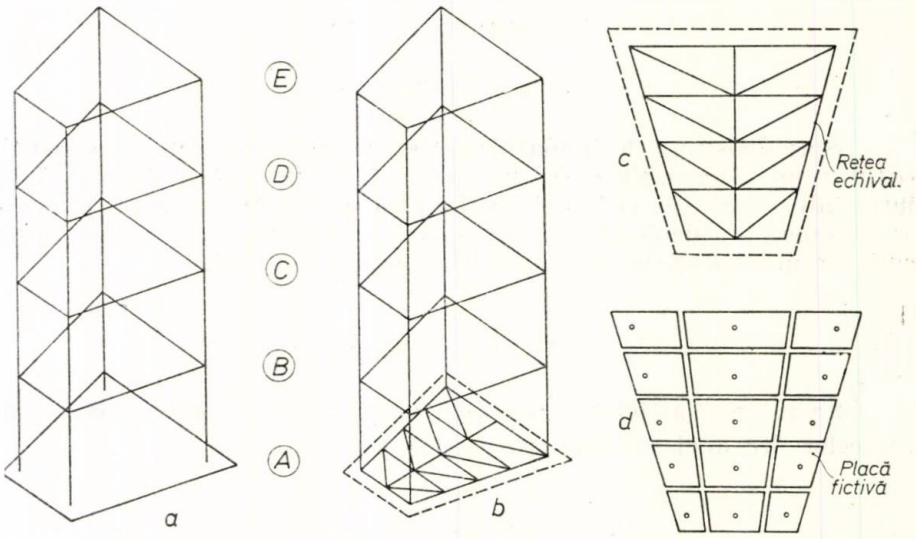


Fig. 5

În continuare se poate aplica procedeul general de calcul pentru cadrele spațiale pe reazeme izolate.

Avînd în vedere avantajele cunoscute ale metodei deplasărilor față de metoda eforturilor, se prezintă în continuare doar unele aspecte privind aplicarea primei metode.

2.1. *Metoda deplasărilor*

Calculul se efectuează avantajos împărțind ansamblul structural în substructuri (nivelurile A, B, C, D, E).

Matricea de rigiditate $[K]$ devine de tip tridiagonal, în varianta de rezolvare a sistemului de ecuații în etape succesive sau numai în două etape (punctat)

$$[K] = \left[\begin{array}{c:cccc} K_{AA} & K_{AB} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} & 0 & 0 \\ 0 & K_{CB} & K_{CC} & K_{CD} & 0 \\ 0 & 0 & K_{DC} & K_{DD} & K_{DE} \\ 0 & 0 & 0 & K_{ED} & K_{EE} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} K_{ss} & K_{sp} \\ \hdashline K_{ps} & K_{pp} \end{array}\right]. \tag{23}$$

În cazul considerării în etapa I numai a necunoscutelor $\Delta_{A'}$ (tasările terenului de fundare) și a rezolvării sistemului de ecuații prin iterație, cu transmiteri între necunoscutele astfel grupate (corespunzătoare terenului, respectiv structurii) se obține procedeul de calcul propus în [5], [6].

II. ASPECTUL REOLOGIC [3]

1. TERENURI COEZIVE (argiloase)

Conform [5] se aplică modulului de elasticitate „redus"

$$E_{bt} = E_b \frac{1 - e^{-\varphi_t}}{\varphi_t}, \tag{24}$$

unde φ_t reprezintă caracteristica curgerii lente a betonului.

2. TERENURI NECOEZIVE (nisipoase)

Conform [3] se aplică relația propusă de autor

$$E_t^{s,a} = \underbrace{E_{el}^{s,a} \cdot e^{-\varphi t}}_{\text{etapa I}} + \underbrace{\Delta E_r^{s,a}}_{\text{etapa II}}, \tag{25}$$

în care $\Delta E_r^{s,a}$ reprezintă efortul ce apare în secțiunea s, a, ca urmare a creșterii tasării terenului de fundare, pe măsură ce se produce relaxarea eforturilor în suprastructură.

Calculul eforturilor $E_t^{s,a}$ se efectuează în două etape:

— etapa I, conform procedeului curent, în care tasarea inițială se consideră, în timp, de mărime constantă [7];

— etapa a II-a, în care se încarcă nodurile cadrului cu forțele $F = F_{el} - F_r$ și se efectuează o echilibrare, considerînd cadrul pe reazeme depla-

sabile, iar elementele de suprastructură cu un modul de elasticitate „redus" conform (24), obținîndu-se astfel corecția $\Delta E_r^{s.a}$.
($F_{el} - F_r$) reprezintă diferența de forță static nedeterminată ce acționează asupra reazemului tasabil, în sensul forței din încărcarea direct aplicată, datorită relaxării în timp a eforturilor din suprastructură.

III. EXEMPLE DE CALCUL

1. Cadrul spațial ortogonal din figura 6 este supus acțiunii unei forțe concentrate $P = 10$ tf, de scurtă durată, după direcția AB. În calcule s-au neglijat deformațiile datorite forțelor axiale și tăietoare din elementele suprastructurii precum și cele menționate la I. B. 1. În figura 6 se prezintă diagrama de momente finală.

2. Structura în cadre spațiale ortogonale de beton armat a Corpului înalt al Universității din Timișoara a fost proiectată în cadrul IPROTIM și realizată de TCM—Timișoara în perioada 1962—63. Radierul de beton

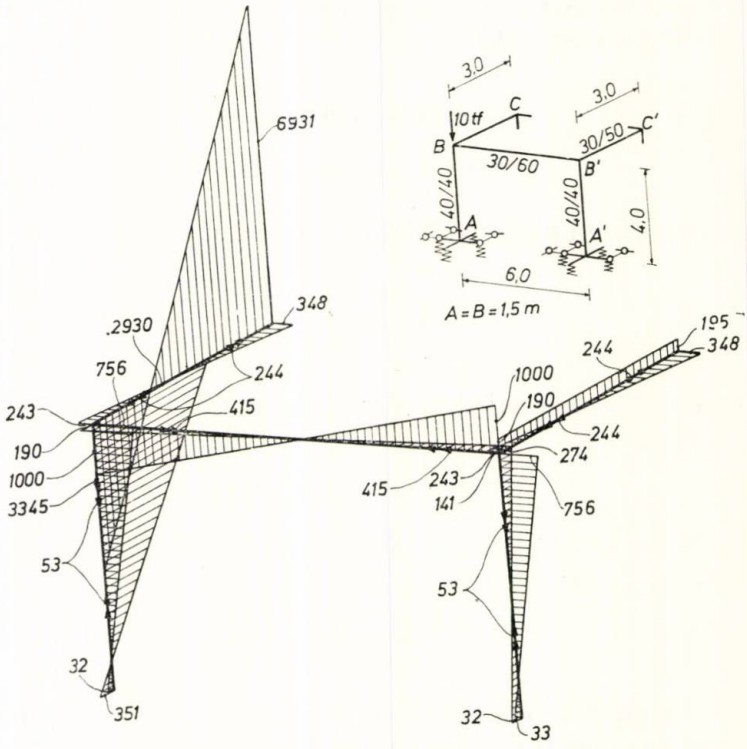


Fig. 6

armat al structurii reazemă pe un teren cu deformații de durată, stabilizate după 12 ani, datorită prezenței unor straturi argiloase.

În figura 8 se arată schema de calcul a cadrului longitudinal central (C8), precum și valorile tasărilor finale măsurate (Δ). Δ_{III} reprezintă va-

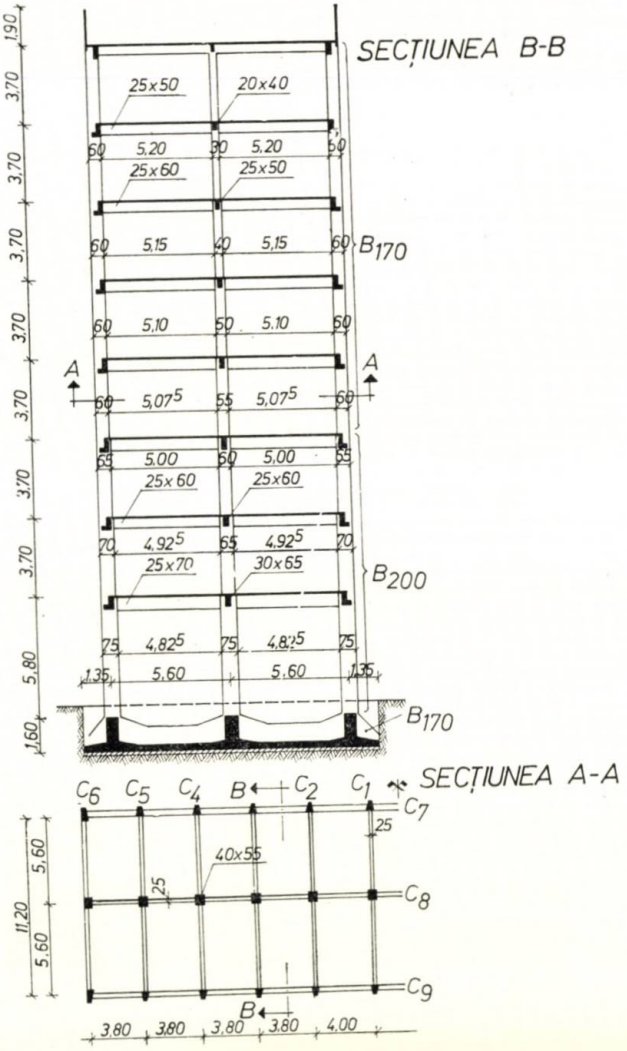

SECȚIUNEA B-B
25x50
20x40
5,20
30
5,20
25x60
25x50
5,15
40
5,15
B170
5,10
50
5,10
A
A
5,07⁵
55
5,07⁵
5,00
50
5,00
25x60
25x60
4,92⁵
65
4,92⁵
25x70
30x65
B200
4,82⁵
75
4,82⁵
5,60
5,60
1,35
1,35
B170
1,90
3,70
3,70
3,70
3,70
3,70
3,70
3,70
5,80
1,60
SECȚIUNEA A-A
C6
C5
C4
B
C2
C1
C7
C8
C9
25
40x55
25
5,60
5,60
11,20
B
3,80
3,80
3,80
3,80
4,00

Fig. 7

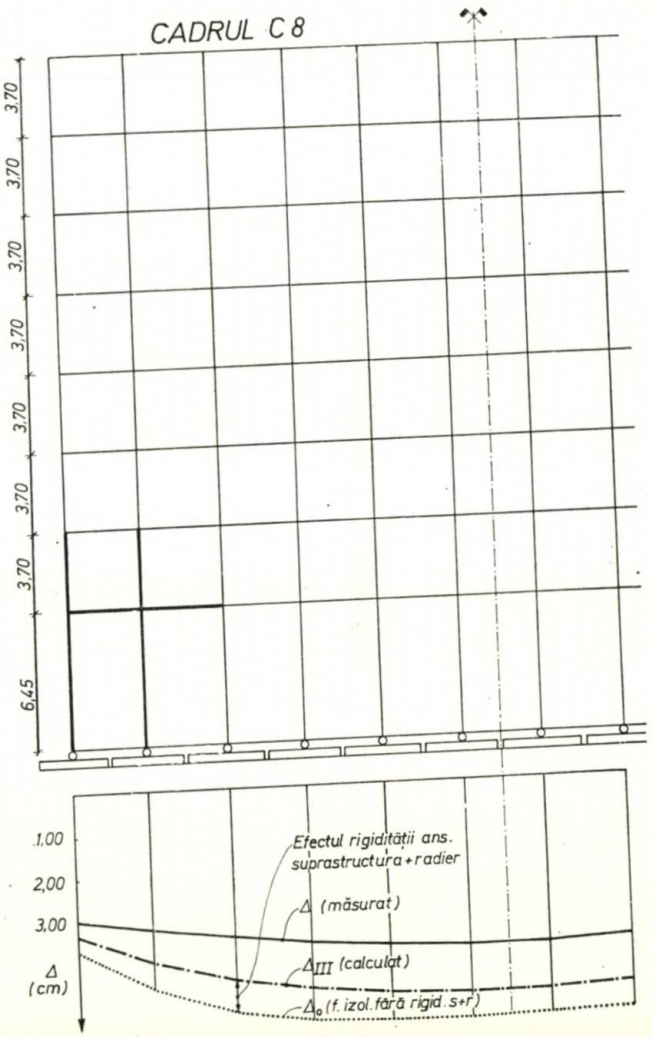

CADRUL C 8
3,70
3,70
3,70
3,70
3,70
3,70
3,70
6,45
1,00
2,00
3,00
Δ (cm)
Efectul rigidității ans. suprastructura+radier
Δ (măsurat)
Δ_III (calculat)
Δ_e (f. izol. fără rigid. s+r)

Fig. 8

lorile tasărilor calculate (rezultate după ultimul ciclu de iterație, [4]), iar Δ_0 pe cele obținute în ipoteza unor fundații izolate, fără considerarea rigidității radierului și a suprastructurii.

Pentru zona inferior marginală a cadrului C8 se prezintă diagrama de momente încovoietoare datorită încărcărilor gravitaționale (fig. 9*a*) precum

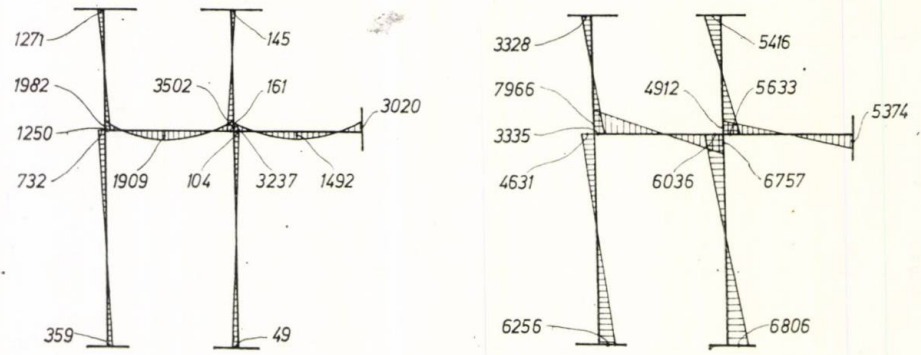


Fig. 9

și cea rezultată din acțiunea tasărilor diferențiale măsurate (Δ) (fig. 9*b*).

3. Pentru cadrul neortogonal din fig. 10 se prezintă valorile momentelor din diagrama finală, obținute în ipotezele de comportare a supra-

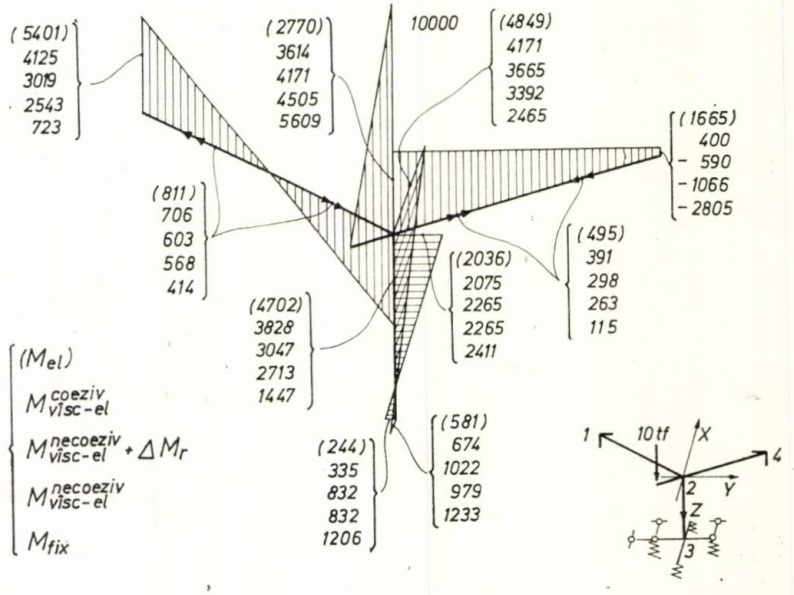


Fig. 10

structurii : elastică, vîsco-elastică (pe teren coeziv), vîsco-elastică (pe teren necoeziv) aplicînd procedeul de calcul aproximativ propus în două etape, vîsco-elastică (pe teren necoeziv) considerînd numai etapa I precum și în ipoteza de nedeplasare (unghiulară și liniară) a reazemului.

IV. CONCLUZII

1. Introducerea barelor fictive reprezentînd „reazemele" în schema de calcul, permite generalizarea metodelor de calcul static (metoda eforturilor și metoda deplasărilor) precum și a sintezei lor (metoda mixtă) la cadrele spațiale în conlucrarea cu terenul de fundare prin intermediul fundațiilor izolate. Generalizarea se poate extinde și la fundațiile de tip radier general, aplicînd „Teoria echivalențelor" [1].

2. Exemplele de calcul din lucrare demonstrează importanța cantitativă dar mai ales calitativă a considerării deformațiilor terenului de fundare în calculul cadrelor spațiale de beton armat.

Astfel, exemplul 1 este deosebit de ilustrativ prin diagrama de momente finală care se anulează total în cazul neglijării conlucrării dintre supra și infrastructură.

De asemenea, din exemplul 2 se remarcă aportul important al efectului tasărilor diferențiale, depășind, în acest caz, pe cel al încărcării gravitaționale.

Se justifică astfel pe deplin introducerea efectului de interacțiune suprastructură — fundație — teren în standardele de calcul, mai ales pentru cazul cadrelor spațiale fundate pe terenuri slabe prin intermediul unor fundații izolate sau continue flexibile.

3. Considerarea aspectului reologic în calculul de conlucrare al cadrelor spațiale de beton armat cu terenul de fundare conduce la evitarea unor supradimensionări, posibile în cazul cînd calculul s-ar efectua în ipoteza elastică de deformare (ex. 3).

Aplicarea procedeului propus de autor, pentru terenurile necoezive, conduce la o evaluare mai exactă a eforturilor relaxate din structură.

4. Diferențele rezultate între valorile calculate și cele măsurate ale tasărilor (ex. 2) se explică prin imprecizia valorilor determinate pentru rigiditățile ansamblului structural, amplificată în cazul elementelor de beton armat ce lucrează în stadiul II și al terenurilor de fundare stratificate (neomogene), sub acțiunea încărcărilor de lungă durată, datorită numeroșilor factori ce intervin în complexitatea fenomenului fizic.

Cunoașterea completă a acestora nu poate fi obținută decît pe baza viitoarelor cercetări experimentale de laborator și mai ales la scară naturală, confruntînd valorile deformațiilor calculate cu cele măsurate.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Absi, *La théorie des équivalences et son application a l'étude des ouvrages d'art*, Annales I.T.B.T.P, Supplément au no. 298, oct. 1972, Paris.
2. D. Anastasescu, *Efectul deformațiilor de durată în calculul cadrelor spațiale de beton armat pe reazeme elastice*, a III-a Conferință de betoane, oct. 1970, Cluj.
3. D. Anastasescu, *Calculul cadrelor spațiale de beton armat pe reazeme deplasabile*, teză de doctorat, 1972, Timișoara.
4. D. Anastasescu, A. Gîdea, A. Weisz, *Considerații asupra calculului cadrelor spațiale ortogonale multietajate din beton armat în conlucrare cu terenul de fundare prin intermediul fundațiilor de tip radier general*, a VII-a Conferință de betoane, oct. 1975, Iași.
5. S. Chamecki, *Calcul des tassements progressifs des fondations, en tenant compte de l'interaction des structures et du sol*, Annales I. T. B. T. P., **261**, 1969, Paris.
6. S. Chamecki, *Interaction between construction and soil foundation*, Seminar, CEE- ONU, oct. 1974, București.
7. Fr. Dischinger, *Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondre der Bogenbrücken*, Der Bauingenieur, *5/6*, (1939), Berlin.

ASPECTE NOI ÎN CERCETAREA CAPACITĂȚII PORTANTE A ROȚILOR DINȚATE CILINDRICE CU DANTURA DREAPTĂ, EXECUTATE DIN POLIAMIDĂ CU ADAOS DE BISULFURĂ DE MOLIBDEN

de T. MLADINESCU

Institutul politehnic București

Se prezintă aspecte noi privind capacitatea portantă a roților dințate cilindrice din poliamidă 6 cu bisulfură de molibden bazate pe particularitățile de variație ale gradului de acoperire real, cu încărcarea și temperatura.
Prin acestea se justifică apropierea sensibilă și diferențiată a capacității portante a acestor roți dințate de capacitatea portantă a roților dințate identice geometric dar din poliamidă 6 simplă, deși rezistențele de rupere și modulele de elasticitate ale celor două materiale sînt mult diferite.

1. INTRODUCERE. STADIUL CERCETĂRILOR ÎN DOMENIU

Poliamida 6 cu adaos de bisulfură de molibden sau cu grafit se recomandă ca material pentru lagăre cu alunecare și roți dințate.

La lagăre, cercetările efectuate în țară [9] — [11], cît și peste graniță [7] au confirmat superioritatea comportării bucșelor din poliamidă 6 cu grafit sau cu bisulfură de molibden, față de cele din poliamidă 6. Se evidențiază efectul favorabil al încorporării unuia din cei doi lubrifianți solizi în poliamida 6, asupra fenomenului de frecare dintre suprafețele aflate în mișcare relativă în anumite condiții funcționale, respectiv a micșorării generării de căldură și a activizării transferului ei.

La roți dințate capacitatea portantă depinde mai mult de rezistența materialelor, deformabilitatea și conductivitatea lor termică.

Cercetări în acest sens sînt relativ puține. K. Daube [3] scrie că există posibilitatea executării de roți dințate din materiale plastice cu adaos de fluoroplast, bisulfură de molibden sau grafit, dar că dantura acestora posedă o rezistență mai scăzută. Constatări similare, dar numai pentru adaos de grafit în materiale plastice pentru roți dințate se fac și în lucrarea [8].

De altfel este bine cunoscut efectul grafitului și bisulfurii de molibden asupra favorizării alunecării secțiunilor barelor, respectiv danturii supuse la încovoiere.

În tabelul 1 se vede că în timp ce la poliamida 6 rezistența de rupere prin încovoiere este mai mare cu 40% decît cea de tracțiune ($\sigma_{ri} > \sigma_r$); la poliamida 6 cu adaos de MoS_2, σ_{ri} este mai mică cu circa 25% decît σ_r.

T. CERC MEC. APL., TOM. 36, NR .3, 1977, P. 429–439

Astfel, σ_{ri} de la poliamida 6 apare cu 89% mai mare decît σ_{ri} a poliamidei 6 cu MoS_2 (850 daN/cm² față de 450 daN/cm ²). Totuși, experimentările făcute de autor [12] au arătat că roțile dințate executate din poliamidă 6 cu MoS_2 de proveniență și calitatea indicată în tabelul 1 au capacitatea portantă mult apropiată de a celor din poliamidă 6 (fig. 1).

Tabelul 1

Materialul	Rezist. de rupere		Modul de elasticitate		Alungirea δ%
	σ_r daN/cm²	σ_{ri} daN/cm²	E_t daN/cm²	E_i daN/cm²	
Poliamidă 6 tip P Uz. Săvinești	600	850	10 000	12 500 (informativ)	200 %
Poliamidă 6 cu adaos de MoS_2 (Sniamid ASNY firma SNIA-Milan)	650	450	8 000	—	300 %
Poliformaldehidă Hostaform — C firma Hoechst—RFG	680	900	—	27 000 la 30 000	25%...75%
Poliformaldehidă firma Du-Pont-SUA	700	—	—	28 000	50%

— Caracteristicile mecanice de mai sus sînt determinate pe material aflat în climat normal (20°C și 65% umiditate).

— Nu se dau valori pentru modulele de elasticitate dinamice care la astfel de materiale sînt sensibil mai mari decît cele statice.

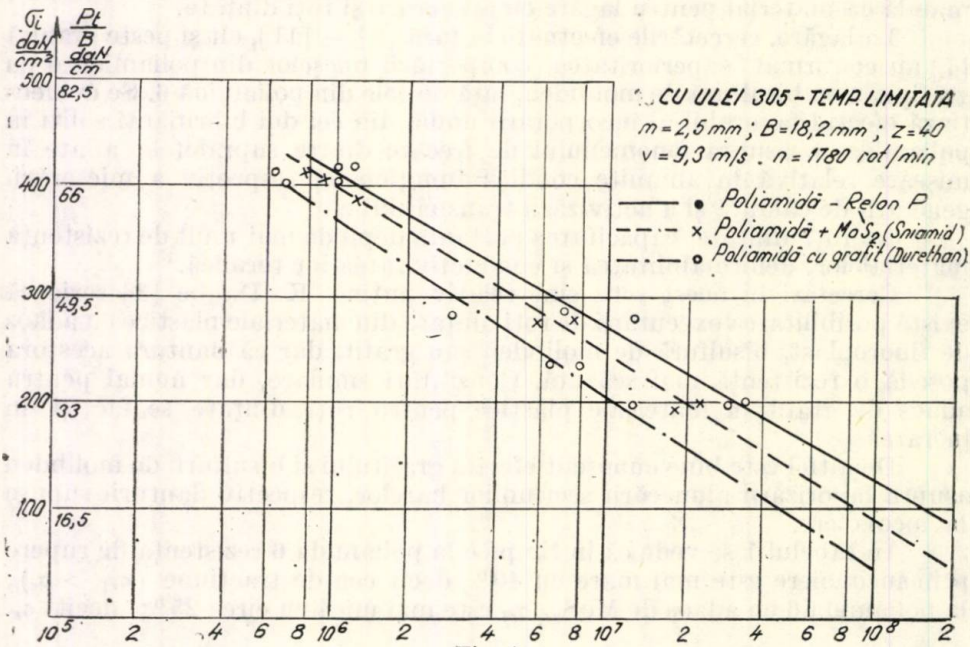


Fig. 1

În zona de utilizare normală, adică peste 10^7 cicluri de funcționare, roțile din poliamidă 6 au capacitatea portantă numai cu 11 ... 22% mai mare decît a roților din poliamidă 6 cu adaos de MoS_2. La durate în jur de 10^6 cicluri apropierea ajunge la 5 ... 6%.

Ipoteza făcută atunci, că efectul ameliorativ al adaosului de MoS_2 asupra durității și frecării flancurilor dinților dublat de mai buna conductibilitate termică, — ipoteză confirmată prin semnele de uzură a flancurilor dinților mai puțin vizibile la roțile din poliamidă cu MoS_2, decît la cele din poliamidă simplă ar contribui la apropierea capacităților portante a roților dințate din cele două materiale, justifică doar parțial și numai calitativ fenomenul redat în figura 1 comparativ cu tabelul 1.

2. ASPECTE NOI ÎN CERCETAREA CAPACITĂȚII PORTANTE A ROȚILOR DINȚATE DIN POLIAMIDĂ 6 CU MoS_2

Se observă în tabelul 1 că modulul de elasticitate al poliamidei 6 cu MoS_2 este mai mic decît al poliamidei 6, iar alungirea cu mult mai mare, rezultînd că deformațiile elastice sînt sensibil mai mari la dantura roților din poliamidă cu MoS_2. Aceste deformații contribuie la creșterea corespunzătoare a gradului de acoperire real al roților dințate respective.

Valoarea gradului de acoperire indicînd a cîta parte din perioada de angrenare se găsesc în contact două perechi de dinți (la dantura dreaptă), respectiv cît timp fiecare pereche de dinți este încărcată cu sarcina maximă, rezultă că, cu cît creșterea gradului de acoperire este mai mare la același modul și număr de dinți, cu atît capacitatea portantă a angrenajului respectiv este mai mare.

Astfel, creșterea diferențiată a gradului de acoperire real al angrenajelor în compunerea cărora intră roți dințate din poliamidă 6 sau din poliamidă 6 cu MoS_2, devine factor caracteristic influent asupra capacității portante a acestor angrenaje.

Determinarea cantitativă a creșterii gradului de acoperire real la roțile dințate din poliamidă 6 cu adaos de MoS_2 în raport cu cele din poliamidă 6 s-a efectuat pe cale experimentală.

2.1. Se cunoaște că gradul de acoperire real a fost evidențiat la roțile dințate din oțel pentru prima dată în 1957 de G. Niemann și H. Rettig [13], care pe baza a numeroase experiențe au stabilit și o relație de calcul :

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \frac{0{,}134}{\sqrt{p_b}} \sqrt{\frac{P_n}{\varepsilon_t C} + A_{pb}}, \qquad (1)$$

în care

ε este gradul de acoperire real ;

ε_t — gradul de acoperire teoretic calculat cu formulele date de „Teoria mecanismelor" ;

p — pasul de bază al danturii în mm ;

P_n — încărcarea normală pe un cm din lungimea dinților $\left(\frac{\text{daN}}{\text{cm}}\right)$,

C — rigiditatea medie la încovoiere a danturii, a cărei valoare pentru dinți din oțel au găsit-o : $C = 10{,}8 \frac{daN}{cm\ \mu m}$;

A_{p_b} — abaterea pasului de bază în μm, cînd una din roți este etalon ; sau diferența abaterii pasului de bază a dinților angrenați la două roți oarecare.

Pentru roțile dințate din materiale plastice (al căror modul de elasticitate este de 100 ... 200 de ori mai mic ca la oțel) deformațiile elastice ale dinților fiind mult mai mari decît erorile pasului de bază, creșterea gradului de acoperire este mai accentuată decît la oțel și neglijabil influențată de abaterile de pas. Cercetările existente în acest domeniu nu pot fi utilizate (în prezenta lucrare) deoarece rezultatele obținute de M. Gafițeanu [5], [6] se referă la roți dințate din poliamidă 6 din alt lot de fabricație decît cel utilizat în experimentările comparative din lucrarea [12] și numai la temperatura camerei (+ 20°C) ; iar E. Cornelius și W. Budich au folosit numai roți din poliformaldehidă (Hostaform C). În plus nici autorii menționați și nici alții nu au publicat date privind gradul de acoperire real la roți dințate din poliamidă 6 cu MoS_2 și în general din materiale plastice cu MoS_2.

Ca urmare s-au programat determinări experimentale comparative ale gradului de acoperire real al angrenajelor cilindrice cu dinți drepți cu roți din poliamidă 6 aditivată cu MoS_2 și din poliamidă 6 din același lot de materiale și de fabricație (precizie și rugozitate) unse cu același ulei ca și în cazul experimentărilor din lucrarea [12]. Această programare este deosebit de importantă date fiind particularitățile proprietăților materialelor plastice de același tip din loturi și condiții de prelucrare diferite.

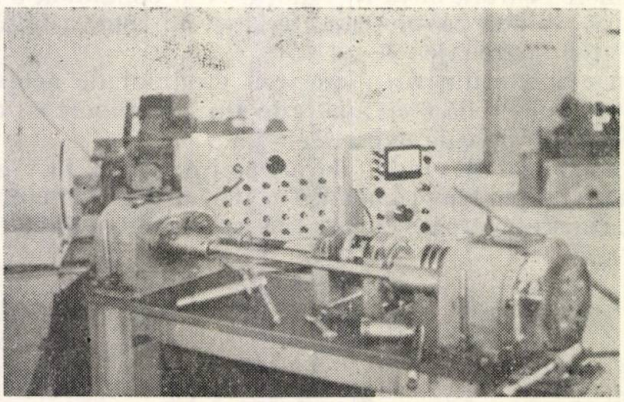


Fig. 2

Standul utilizat este de construcție în circuit mecanic închis, cu încărcarea prin cuplaj de torsiune a arborilor (fig. 2), la care s-a adoptat un mecanism cu șurub melc și roată melcată, pentru a asigura o rotație foarte lentă a roților dințate ($i_{1,2} = 60$). Unghiul de rotire se citește pe un sector gradat în grade și minute (fig. 3).

Roțile dințate din materiale plastice avînd 21 de dinți, modulul de 5 mm și lățimea 18 mm s-au încadrat în urma măsurătorilor danturii în clasa 8—9 de precizie, iar roțile metalice pereche cu $z = 21$ și $B = 35$ mm, executate din OLC 45, în clasa 5—6 de precizie (celeași condiții ca în [12]). La baza cîte unui dinte de la roțile din material plastic s-au lipit pe ambele fețe mărci tensometrice rezistive Hottinger cu baza de 3 mm și rezistența de 120 Ohmi legate apoi prin conductori trecuți prin arborele tubular la o cutie de comutare Orion, iar prin intermediul acesteia la puntea tensometrică tip Orion (fig. 4 și 2).

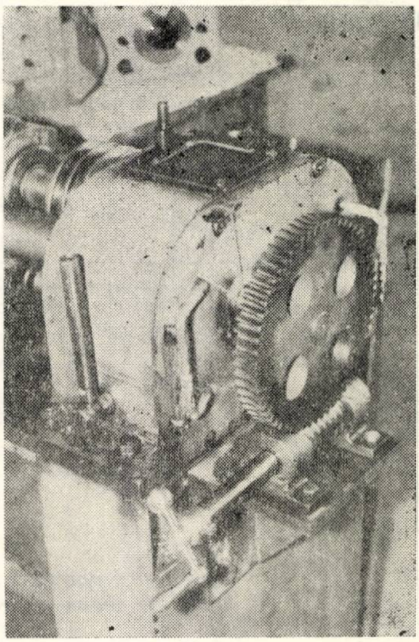


Fig. 3

Astfel, semnalele transmise de la mărcile tensometrice la punte pentru fiecare început și sfîrșit al angrenării unei perechi de dinți au permis citirea pe sectorul gradat (fig. 3) a unghiului corespunzător arcului de angrenare.

2.2. *Determinări preliminare.* Pentru verificarea metodei de măsurare prin tensometrie rezistivă a arcului de angrenare și a preciziei acesteia s-a determinat în prealabil gradul de acoperire real pentru ambele roți din oțel OLC 45 de același modul și număr de dinți ca și la roțile din material plastic. Mărcile tensometrice s-au lipit pe dinții cu erorile pasului de bază cele mai mari, respectiv $A_{p_b} = +11$ μm și $A_{p_b} = +8$ μm, dinți aflați în angrenare cu cei de la roata pereche cu erorile cele mai mici ($A_{p_b} = 0$;

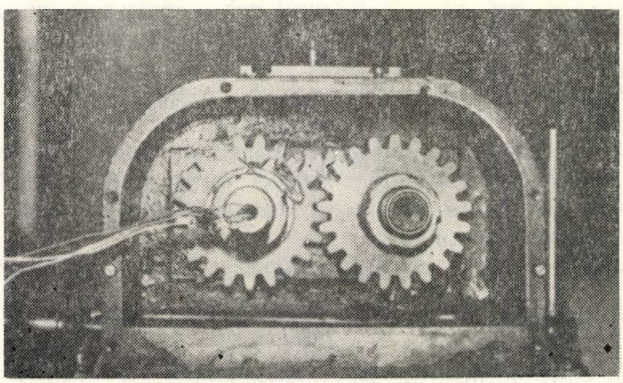


Fig. 4

$A_{p_b} = -0{,}5$ μm și $A_{p_b} = +0{,}5$ μm). Gradul de acoperire real s-a determinat pentru încărcări $\frac{P_t}{B}$ obținute din momentul de torsiune măsu-

rat tot cu mărci tensometrice Hottinger lipite pe un arbore și legate la cutia de comutare prin conductori trecuți prin arbore (fig. 2).

Valorile gradului de acoperire real obținute pentru cele două erori de pas (fig. 5) au rezultat foarte apropiate de valorile calculate cu relația (1). Aceasta arată că metoda tensometrică rezistivă este indicată și suficient

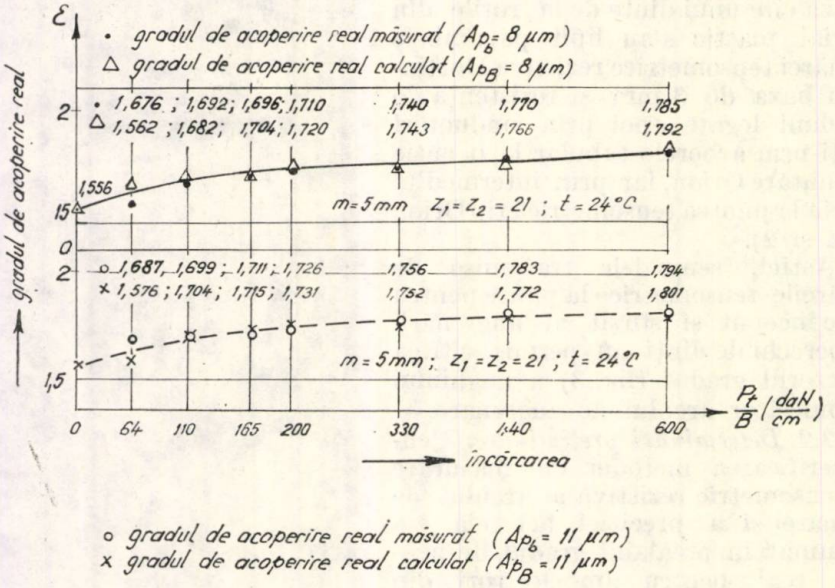


Fig. 5

de precisă, dat fiind că în experimentările lui Niemann și Rettig pentru roțile din oțel, ca și ale lui Cornelius și Budich la roțile din poliacetali, arcul de angrenare s-a măsurat cu ajutorul traductorilor inductivi.

2.3. *Determinări și interpretări comparative.* Folosind aceeași metodă ca la roțile metalice, s-a înlocuit pe rînd roata metalică schimbabilă cu o roată din poliamidă 6 simplă și apoi cu una din poliamidă 6 cu MoS_2. Măsurările arcului de angrenare s-au efectuat la dinții aflați în ulei la temperatura camerei (+24°C) și apoi la temperatura de funcționare ($\approx$ + 55°C). Ținînd seama de variabilitatea statistică a tehnicii experimentale și a caracterului aleator al deformabilității sub sarcină a dinților roților, pentru fiecare încărcare s-au efectuat cel puțin șase măsurători și apoi calculul abaterilor după metoda celor mai mici pătrate atît la roțile din oțel, cît și din materiale plastice.

În figura 6 s-a reprezentat variația gradului de acoperire real în dependența de încărcarea $\frac{P_t}{B}$ pentru cele patru situații cercetate.

În primul rînd se observă că încărcările s-au limitat la 44 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}}$, deoarece pînă la aceste valori numărul de rotații (N_c) este mai mare de 10^7, fără ruperea dinților (fig. 1). Apoi, la aceste încărcări deformațiile specifice ale mărcilor tensometrice fiind mici, liniaritatea deformațiilor cu încărcarea este asigurată.

Poziția relativă a curbelor de variație a gradului de acoperire real este explicabilă : poliamidă 6 avînd modulul de elasticitate și rezistența de rupere prin încovoiere mai mari, iar alungirea mai mică decît la poliamidă

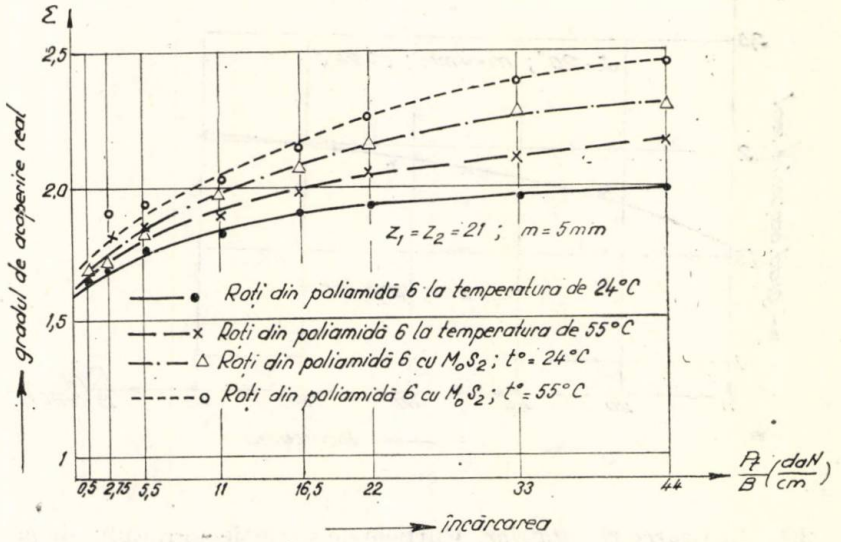


Fig. 6

6 cu MoS_2, dantura roților dințate respective se deformează mai puțin, astfel că gradul de acoperire real este mai mic la toate încărcările decît la roțile din poliamida 6 cu MoS_2 atît la temperatura de 24°C, cît și la 55°C. Explicabil este și faptul că în zona încărcărilor foarte mici împrăștierea punctelor printre care sînt trasate curbele este mai mare, deoarece la aceste încărcări, deformațiile mărcilor tensometrice fiind destul de mici, erorile de măsurare sînt mari, ceea ce confirmă particularitatea tensometriei rezistive [14].

Aceste curbe fiind trasate pentru prima dată la roți dințate din poliamidă simplă și cu adaos de MoS_2 se prezintă pentru comparație curbe similare după [1], [2] dar pentru roți din poliacetal simplu (Hostaform C) cu gradul de acoperire teoretic egal cu al roților din poliamidă și cu modulul de 4 mm (pentru modul de 5 mm nu au determinări) (fig. 7).

Aliura curbelor este aceeași în limita încărcărilor de pînă la 50 $\frac{daN}{cm}$, dar valorile gradului de acoperite real sînt mai mici, deoarece poliacetalii au modulul de elasticitate de 2,5 ... 3 ori mai mare decît poliamidele încercate și alungirea relativă de 4 ... 6 ori mai mică (tabel 1). În figura 8 curbele trasate de aceiași cercetători [1], [2] pentru roți din poliacetali, la temperaturile de 24°, 45° și 60°C (de data aceasta la modul de 3 mm) arată o creștere mai puțin pronunțată a gradului de acoperire real cu tempera-

tura, fenomen de asemenea justificat, dacă se ţine seama că modulul de elasticitate al poliacetalilor scade mai puţin şi mai lent cu temperatura decît la poliamidă [4] (Fig. 9).

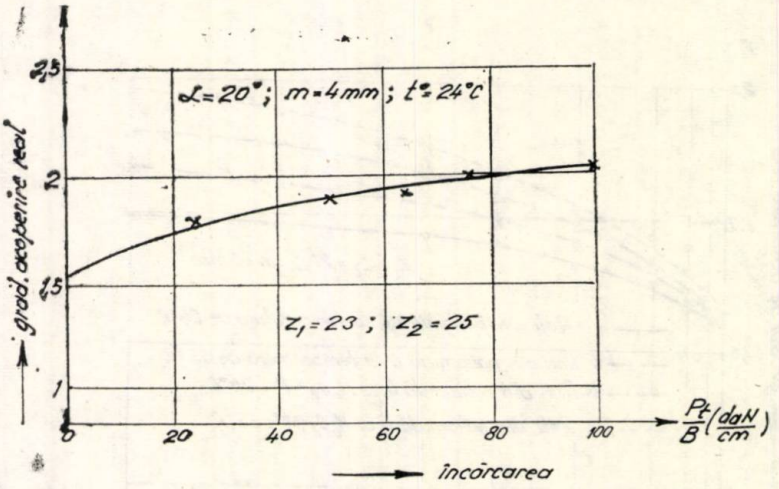


Fig. 7

2.4. *Utilizarea rezultatelor.* Curbele de variaţie a gradului de acoperire real de la angrenajele cu roţi din poliamidă 6 simplă sau cu adaos de MoS_2, permit reliefarea unor aspecte noi, relative la influenţa adaosului de MoS_2 asupra capacităţii portante a acestor angrenaje :

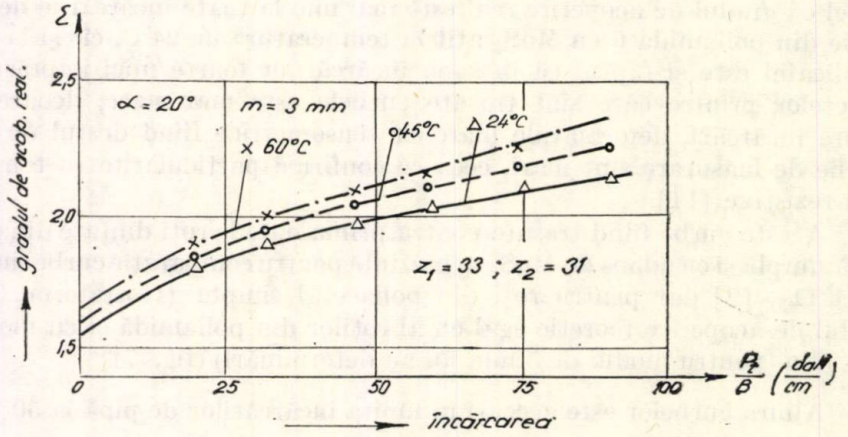


Fig. 8

— În primul rînd, creşterea gradului de acoperire cu încărcarea duce la mărirea duratei de acţiune a sarcinii micşorate pe fiecare pereche de dinţi angrenaţi şi ca urmare la scăderea efortului unitar de încovoiere la baza dinţilor, avînd ca efect mărirea numărului de rotaţii (cicluri) de funcţionare a angrenajului respectiv. Acest avantaj este mai accentuat la roţile

dințate din poliamidă 6 cu MoS_2. Astfel, pentru încărcările de 33 daN/cm și 44 daN/cm folosite în lucrarea [12] și figura 1, gradul de acoperire real la roțile din poliamidă 6 cu MoS_2 este cu 12,8%, respectiv cu 13,5% mai

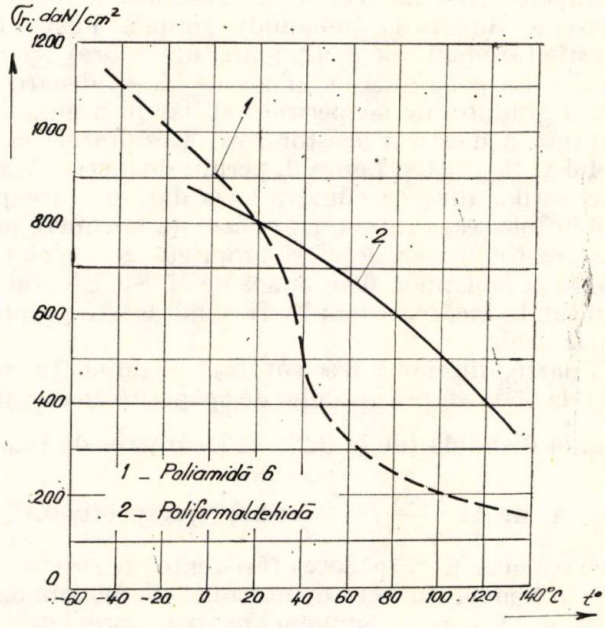


Fig. 9

mare decît la roțile din poliamidă 6, ambele funcționînd în ulei mineral la temperatura de aprox. 55°C (figura 6), deci și capacitatea lor portantă și durabilitatea cresc corespunzător mai mult, decît la roțile din poliamidă 6 simplă.

Prin aceasta se adaugă la considerațiile calitative din [12] o explicație suplimentară bazată pe cifre a fenomenului constatat în figura 1 comparativ cu tabelul 1, adică a apropierii capacităților portante a celor două categorii de roți dințate, deși rezistențele materialelor respective sînt mult diferite. În al doilea rînd creșterea relativă a gradului de acoperire real o dată cu mărirea încărcării este mai pronunțată la roțile din poliamidă 6 cu MoS_2. Pentru încărcarea de 11 daN/cm creșterea este cu 8,1%, iar pentru încărcările de 33 daN/cm și 44 daN/cm cu 12,8% respectiv cu 13,5% indicate mai sus. Apare astfel explicabil aspectul divergent al liniilor caracteristice pentru comportarea la oboseală a danturii. Astfel, la încărcările mai mari (număr de cicluri mai mic) creșterea mai accentuată a gradului de acoperire real la roțile din poliamidă cu MoS_2 apropie linia sa caracteristică mai mult de cea corespunzătoare poliamidei simple. Cînd încărcările sînt mai mici (număr de cicluri mai mare), liniile caracteristice se apropie mai puțin ca urmare a unei mai mici creșteri a gradului real de acoperire la roțile cu adaos de MoS_2 față de cele din poliamidă simplă.

3. CONCLUZII

Roţile dinţate executate din poliamidă 6 cu adaos de MoS_2 au capacitatea portantă apropiată de a celor fabricate din poliamidă 6 simplă, deşi rezistenţa de rupere prin încovoiere a materialelor de bază este mult superioară (aproape dublă) la poliamida simplă. Proprietăţile elastice (modulul de elasticitate mai mic şi alungirea mai mare) apar însă avantajoase pentru roţile din poliamidă cu adaos de MoS_2, deoarece duc la creşterea mai mare a gradului de acoperire real, iar prin aceasta la sporirea capacităţii portante a danturii acestor roţi. Rezultatele cantitative prezentate în tabelul 1, figura 1 şi figura 6, permit deducţia că asupra capacităţii portante a roţilor dinţate cilindrice cu dantură dreaptă executate din poliamide 6 influenţează nu numai rezistenţa la rupere prin încovoiere sau întindere a acestor materiale ci şi proprietăţile lor elastice, care au pondere mai mare la poliamida 6 cu adaos de MoS_2. Efectul acestui adaos este mai pronunţat la încărcări mai mari, cînd aceste proprietăţi elastice se valorifică mai mult.

Pe de altă parte, din figura 6 se constată că influenţa creşterii temperaturii de la 24°C la 55°C asupra gradului de acoperire este relativ mai accentuată la poliamida 6 simplă (de la 3,2 % la încărcarea de $16{,}5\frac{\text{daN}}{\text{cm}}$ la 8 % pentru încărcarea de $44\ \frac{\text{daN}}{\text{cm}}$; faţă de 2,2 %, respectiv 6,7 % la poliamida cu MoS_2). De aci concluzia, că scăderea rezistenţei de rupere şi a modulului de elasticitate cu temperatura este mai mică la poliamida 6 cu MoS_2, ceea ce constituie încă un argument pentru apropierea capacităţilor portante a celor două categorii de roţi dinţate aflate în funcţionare.

Adăugînd şi avantajele proprietăţilor tribologice ale poliamidei cu MoS_2 relevate în [12], apare mai complet răspunsul la problema, că deşi rezistenţa de rupere σ_{ri} a poliamidei simple este cu 89 % mai mare decît a poliamidei cu MoS_2, capacitatea portantă a roţilor dinţate executate din aceste materiale este totuşi numai cu 6...22 % mai mare în domeniul de experimentare normală (10^6 ... 10^8 cicluri de funcţionare).

Rămîne de cercetat, pe măsura cunoaşterii lor, influenţa raportului rezistenţelor la oboseală prin încovoiere şi al modulelor de elasticitate dinamice ale celor două materiale.

Primită la redacţie la 30 noiembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. W. Budich, *Zahnverformung und Überdeckungsgrad von Zahnradgetriebe mit Werkstoffparung Stahl-Kunstoff*, Konstruktion, *9* (1971).
2. E. Cornelius, W. Budich, *Untersuchungen an Zahnrädern aus Acetalharzen*, Konstruktion, *3* (1970).
3. K. F. Daube, *Berechnung von Kunstoff Zahnräder*, Tehnica (Suisse) *11* (1969).
4. H. Dreier, E. Strickle, *Les matières plastiques dans la fabrication d'éléments de machines*, Revue française des techniques mondiales, 1969 *oct.*
5. M. Gafiţeanu, *Consideraţii asupra gradului de acoperire la roţile dinţate cilindrice cu dinţi drepţi*, St. cerc. mec. apl., *6* (1967).

6. M. Gafițeanu, *Contribuții la studiul capacității portante a angrenajelor cu roți dințate cilindrice din poliamidă pe roți din oțel*, Teză de doctorat IPB — 1968.
7. V. A. Kameneţki, *Izgotovlenie detalei maşin i priborov iz Kaprona*, Maşghiz, Moskva-Kiev, 1961.
8. I. Lupescu, I. Balekics, *Contribuții la studiul și experimentarea roților dințate din materiale plastice*, Mat. plastice, *5* (1966).
9. Gh. Manea, *Interdependența dintre componență, structură și proprietățile fizico mecanice ale materialelor plastice folosite în construcția organelor de mașini*, Metalurgia și construcția de mașini, *2* (1962).
10. Gh. Manea, V. Simionescu, *Încercări comparative cu bucșe din poliamide pentru lagăre cu alunecare*, Mat. plastice, *2* (1967).
11. Gh. Manea, M. Pascovici, *Influența adaosurilor ameliorative în bucșele din material plastic asupra cîmpului de temperaturi în lubrifiant*, Bul. IPB, *6* (1968).
12. Gh. Manea, T. Mladinescu, M. Gafițeanu, *Efectul adaosurilor de grafit și de bisulfură de molibden asupra capacității portante a roților dințate cilindrice cu dantura dreaptă executate din semifabricate din poliamidă cu tehnologii diferite*, Mat. plastice, *12* (1972).
13. G. Niemann, H. Rettig, *Dynamische Zahnkräfte*, VDI-Z, *3* și *4* (1957).
14. Gh. Buzdugan, M. Blumenfeld, *Tensometria electrică rezistivă*, Ed. tehnică, București, 1966.

TRIBOLOGIA NUCLEARĂ

de ALEXANDRU NICA
I.N.M.T.

Printre implicaţiile tehnico-ştiinţifice ale dezvoltării tehnologiilor nucleare, se numără şi acelea legate de lubrificaţie, frecare şi uzură. Noile condiţii funcţionale impun în mod firesc noi soluţii constructive, a căror eficienţă şi fiabilitate rezidă în profunzimea stăpînirii fenomenelor mecanice, fizice, chimice şi nucleare, semnificative pentru organul considerat. Se poate deci semnala apariţia unei ramuri noi în tribologie, tribologia nucleară.
Principalele direcţii de preocupări în acest domeniu constau din : stabilirea mutaţiilor datorate iradierii în structura şi proprietăţile lubrifianţilor, dezvoltarea unor construcţii de lagăre capabile să lucreze în mediul de răcire al reactorului, şi stăpînirea fenomenelor de frecare în condiţii specifice elementelor combustibile, pentru a se evita avariile. Acest ultim aspect constituie principala preocupare a lucrării de faţă*).

1. INTRODUCERE

Complexitatea condiţiilor funcţionale şi coeficientul deosebit de ridicat privind siguranţa în exploatare impus construcţiilor nucleare, nu mai permite considerarea problemelor de tribologie (înţelegînd prin acest termen interacţiunea complexă — mecanică, fizică, chimică — dintre suprafeţele cu mişcări relative) prin intermediul datelor tehnice generale (coeficienţi de frecare, etc) oferiţi de literatura curentă, ci reclamă reconsiderarea bazelor fizice ale fenomenului de frecare şi mecanismul intim prin care este influenţat de către diverşii parametri funcţionali, [1]. Numai în felul acesta devine posibilă stăpînirea fenomenelor tribologice şi găsirea soluţiilor adecvate în vederea evitării defecţiunilor în timpul exploatării.

Sînt de menţionat astfel încercările de formulare a unui concept unitar asupra frecării, capabil să explice coerent atît fenomenele dinamice, cît şi cele statice, [2]; trebuie amintit cu regret că stadiul cercetărilor în această direcţie nu permite încă stabilirea unor relaţii cantitative precise. Dificultăţile derivă din faptul că frecarea nu este un proces macromolecular, raportabil la maşini sau piese ale acestora, ci un proces microstructural în care îşi aduc aportul atît forţele de atracţie intermoleculară, cît şi influenţele interatomice, tribologia fiind în consecinţă un subiect multidisciplinar, cu ramificaţii de egală importanţă în ingineria mecanică, structura materialelor, fizică, chimie etc.

*) Dipl. ing. H. Mogard, de la AB ATOMENERGI, Studsvik, Suedia, a contribuit cu sugestii şi discuţii deosebit de utile, pentru care autorul îi aduce mulţumirile sale.

Rezultă deci că o cale logică și eficientă în rezolvarea problemelor tribologice de complexitatea celor întîlnite în tehnologia nucleară o va constitui aplicarea principiilor de analiză a sistemelor complexe, fenomenele tribologice fiind clasificate pe scara Boulding la nivelul IV, deci la nivelul tehnic de complicație maximă, [3].

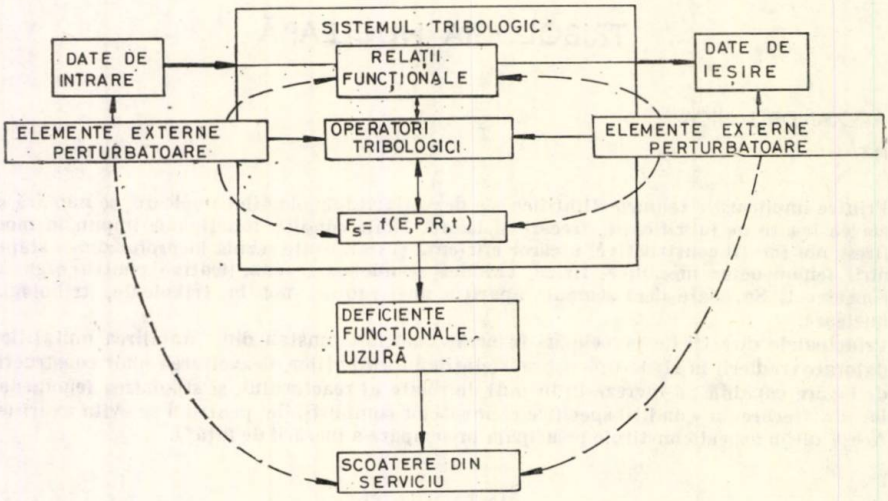


Fig. 1 — Model de calcul tribologic.

Schema de calcul pentru definirea cantitativă a aspectelor tribologice în domeniul considerat este reprezentată principial în figura 1, și este de așteptat să permită pe măsura lămuririi satisfăcătoare a unor detalii fizico-chimice încă în suspensie, stabilirea cu precizia necesară a comportării în timp a cuplei de frecare studiate, [4].

Relațiile funcționale exprimă echilibrul mecanic și termodinamic al sistemului, precum și compatibilitatea geometrică, servind drept legătură între datele de intrare și ieșire; operatorii tribologici (legile de frecare și uzură, transformările tribo-chimice ale suprafețelor) acționează direct asupra acestora (fiind la rîndul lor influențați). Structura sistemului deci este exprimată global prin funcțiile F_S, care cuprind : E — elementele sistemului (în cazul sistemului considerat materialele cuplei de frecare și atmosfera — eventual lubrifiantul); P — proprietățile elementelor (geometrice, mecanice, fizice și chimice); R — relațiile dintre elemente, care pot fi de natură mecanică sau tribologică; sistemul trebuie considerat în evoluția sa în funcție de timpul t.

Drept elemente perturbatoare se pot considera factorii de mediu : atmosfera capabilă de a amorsa reacții chimice, radiațiile conducînd la mutații structurale, temperatura, solicitările mecanice etc.; acestea acționează asupra operatorilor tribologici în sine și fac totodată parte din datele de intrare; trebuie luate în considerație pentru evaluarea șanselor de funcționare necorespunzătoare. Acestea din urmă au o natură stohastică, deci trebuie stabilite printr-o metodă de încercări succesive, determinarea fiabilității sistemului fiind scopul urmărit, în ultimă analiză.

Notîndu-se prin U suma produselor de uzură și a efectelor tribologice ireversibile asupra suprafețelor cu mișcări relative, se pot distinge trei faze în evoluția în timp a funcției U :

a) $dU/dt = \sqrt{A} \cdot t$ perioada de rodaj, în care efectele nocive tind să descrească în intensitate;

b) $dV/dt = B \cdot t$ perioada funcțională de regim, în care efectele nocive au un nivel constant;

c) $dU/dt = e^c \cdot t$ perioada de atingere a defecțiunilor catastrofale, caracterizată prin tendința efectelor nocive de a crește exponențial.

Determinarea constantelor A, B, C printr-un număr suficient de mare de determinări experimentale, pentru a fi posibilă stabilirea unor valori statistice în condițiile funcționale respective, permite estimarea fiabilității construcției considerate.

Pentru ca analiza matematică propusă mai sus să poată conduce la rezultate cantitative certe, stadiul actual al cunoștințelor privind sistemul tribologic trebuie completat prin elucidarea mecanismului de frecare în regim uscat (determinarea unor relații cantitative între coeficientul de frecare și proprietățile fizico-mecanice ale materialelor implicate) și stabilirea influenței factorilor funcționali nou apăruți (efectele iradierii în primul rînd).

2. ASPECTE ALE PROCESULUI DE FRECARE SPECIFICE TEHNICII NUCLEARE

Pentru condițiile funcționale întîlnite în construcțiile de mașini nucleare (atmosferă predominantă de gaze inerte, suprafețe cu rugozitate fină, solicitări termice și mecanice ridicate, absența oricărui agent lubrifiant) se poate afirma că regimul de frecare este uscat, adică cu un aport neglijabil de substanțe străine capabile să producă și să mențină separarea suprafețelor cu mișcări relative.

În aceste condiții sînt de luat în considerație atît ipotezele plastice, [5], cît și cele elastice, [6], privitoare la deformarea suprafețelor, definitorii pentru legile de frecare.

Pentru simplificare, se consideră cazul ideal al unei asperități hemisferice de rază R în contact cu o suprafață plană, fiecare din alt material, cu modulul de elasticitate E_1, respectiv E_2; supusă unei sarcini normale W, va rezulta o deformare elastică pe o arie de rază a, [7] :

$$a = 1{,}1\left[\frac{WR}{2}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\right], \tag{2}$$

în conformitate cu relațiile clasice ale lui Hertz și Timoshenko. Rezultă că aria de contact A_r datorată unei deformații elastice este proporțională cu încărcarea la puterea 2/3 :

$$A_r = \pi a^2 = f(W^{2/3}). \tag{2}$$

Este util să se definească presiunea medie p_m în contactul singular :

$$p_m = \frac{W}{\pi a^2}, \tag{3}$$

rezultînd din (2)

$$p_m = f(W^{1/3}),$$

ceea ce exprimă dependența dintre presiunea medie și încărcare în cazul unei deformații elastice. Trebuie stabilit ce se întîmplă însă dacă se depășește limita elastică a celui mai puțin dur dintre materiale, σe_2. Teoria elasticității afirmă în acest caz că materialul mai moale va începe să curgă plastic dintr-un punct situat la o distanță egală cu 0,6 a dedesuptul suprafeței de sprijin, atunci cînd se atinge valoarea $p_m = 1{,}1\ \sigma e_2$; dacă solicitarea crește încă și mai mult, starea de plasticitate în jurul punctului considerat se extinde în masa materialului, pînă cînd se stabilește o zonă de contact suficient de extinsă pentru a se putea prelua sarcina, în care caz se ajunge la

$$p_m \cong 3\ \sigma e_2, \tag{4}$$

ceea ce constituie condiția pentru curgerea total plastică. În această situație p_m nu mai depinde de încărcarea W; deși σ_e își schimbă valoarea în condițiile curgerii plastice, datorită ecruisării, determinările experimentale ale lui Bowden și Tabor [4] au arătat că relațiile (3) și (4) sînt, în linii mari, valabile în cazul contactelor punctiforme.

Contactele reale între suprafețe însă sînt multiforme, deci suprafața reală de contact A_r, trebuie interpretată drept suma contactelor multiple, și se poate scri :

$$(A_r)_m = \frac{W}{p_m}. \tag{5}$$

Rezultă că asperitățile suprafeței din materialul mai dur se afundă în materialul mai puțin dur (cu limita de curgere p_m) pînă cînd suprafața reală de contact totală $(A_r)_t$ poate prelua încărcarea W. În condiții statice, această situație produce sudarea la rece a celor două corpuri, mai ales dacă este vorba de două metale; rezultă (punct de vedere susținut de mulți cercetători, printre care Bowden și Tabor, [4]) că forța tangențială necesară pentru ruperea sudurilor este proporțională cu coeficientul de frecare static, determinîndu-i valoarea. În condiții dinamice se stabilește o succesiune neîntreruptă de lipiri și deslipiri, coeficientul de frecare dinamic rezultînd direct din suma eforturilor tangențiale necesare ruperii joncțiunilor. Se presupune (și se dovedește experimental) că forța necesară „aratului" metalului mai moale este neglijabilă, ipoteză cu atît mai reală, cu cît materialele implicate sînt mai dure; în cazul materialelor compunînd elementele combustibile pentru centralele nuclearo-electrice de exemplu, această condiție este îndeplinită.

Introducînd noțiunea de efort tangențial mediu de rupere a sudurilor dintre asperități τ_m, se poate scri forța necesară ruperii totalității acestora drept :

$$F_{din} = (A_r)_m\ \tau_m \tag{6}$$

sau, din relația (5),

$$F_{din} = \frac{W\tau_m}{p_m}; \tag{7}$$

sintetizîndu-se astfel legile de bază ale frecării, adică forţa de frecare este proporţională cu încărcarea şi independentă faţă de suprafaţa aparentă de contact.

Prin raportarea forţei de frecare la sarcina normală se obţine coeficientul de frecare dinamic :

$$f_{din} = \frac{F_{din}}{W} = \frac{\tau_m}{p_m}; \tag{8}$$

logic este să se considere τ_m şi p_m ale materialului mai moale, deoarece şi forfecările vor avea loc tot în acesta, iar dacă există posibilitatea utilizării unui lubrifiant solid oarecare sau a producerii de filme protectoare între suprafeţe (oxizi, impurităţi etc), atunci τ va fi tensiunea de forfecare critică la interfaţă, adică

$$f_{din} = \frac{\tau_{int}}{p_m}. \tag{9}$$

Dacă filmul care separă suprafeţele este străpuns în procesul de frecare, τ reia valoarea dată de materialul mai moale.

Concluzia esenţială care se desprinde din această analiză a fenomenului de frecare în regim uscat constă în faptul că valoarea coeficientului de frecare este stabilită de calităţile fizico-mecanice ale materialelor implicate ; în consecinţă, modificarea parametrilor tribologici în cursul utilizării elementelor combustibile (pentru a analiza în continuare exemplul ales) vor fi un rezultat direct al modificării proprietăţilor de rezistenţă ale materialelor implicate, datorită iradierii.

În cazul considerat materialul mai moale este metalul tecii şi din comportarea la iradiere, [8], rezultă că nu se pot produce modificări substanţiale în valoarea lui f_{din}, deoarece în ciuda unei scăderi a ductibilităţii şi creşteri a limitei de curgere, raportul dintre τ_m şi σ_m nu se schimbă, [9].

Soluţiile privind reducerea riscului de gripaj, trebuie aşa dar căutate în dispoziţia macrogeometrică a cuplei de frecare şi în eventuala utilizare a unui lubrifiant solid.

3. SOLUŢII PRIVIND EVITAREA GRIPĂRII PASTILELOR COMBUSTIBILE ÎN TEACA PROTECTOARE

Punerea în evidenţă a mecanismului de producere a fisurilor tecii va permite desigur tragerea unor concluzii valabile privind eficienţa măsurilor privind reducerea acestui risc. Pe de altă parte, şansele de a se putea utiliza un lubrifiant solid între cele două suprafeţe cu mişcări relative vor putea fi evaluate prin intermediul comportării acestuia în condiţiile funcţionale date, şi în primul rînd la iradiere.

3.1. MACROGEOMETRIA OPTIMĂ A SUPRAFEȚELOR

Neomogenitatea microstructurii materialelor reale pe de o parte' și faptul că inițierea fisurilor este un fenomen extrem de localizat, conduc la o distribuție statistică a drumului urmat de fisură în evoluția sa, [10].

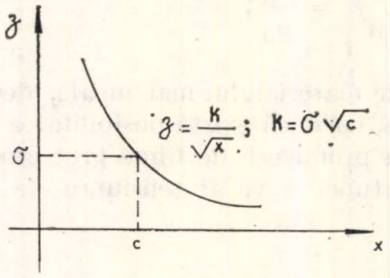


Fig. 2 — Relație între lungimea fisurii $x = c$ și starea critică de tensiune $z = \sigma$.

Din analiza distribuției defectelor și a variației rezistenței materialului în funcție de parametrii săi structurali și macrogeometrici (este suficient de citat ca exemplu relația dintre lungimea fisurii $x = c$, și starea critică de tensiuni $Z = \sigma$ (fig. 2)) rezultă conceptul de „cea mai slabă legătură".

Parametrul k din figura 2 are după Griffith valoarea, [9] :

$$k = \sigma\sqrt{c} = (2\,E\,\Gamma_c/\pi)^{1/2}, \tag{10}$$

în care E este modulul de elasticitate, iar Γ_c gradientul lucrului mecanic consumat pe unitatea de suprafață a fisurii.

În virtutea acestui concept de largă accepțiune (Kontorova și Frenkel, 1943, Epstein, 1948, Fisher și Hollomon, 1950, Volkov, 1962, Bolotin, 1965) procesul de fractură se identifică cu un lanț ale cărui elemente sînt formate din volume elementare, despărțite prin microfisuri, iar rezistența în masa materialului este determinată de cea mai redusă valoare a rezistenței unui volum elementar. Problema distribuției celei mai slabe legături se reduce deci la aceea a distribuției celor mai reduse rezistențe în volumele elementare cu ordinul de mărime n, iar rezistența la fractură în masa materialului este dată de distribuția celei mai reduse rezistențe locale în volumele elementare.

Notîndu-se prin $F_x(x)$ funcția reprezentînd lungimea fisurii (fig. 2) și admițîndu-se o distribuție Cauchy pentru cele mai mari microfisuri (deci lanțurile de minimă rezistență) :

$$F_x(x) = e^{-\left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha}} \tag{11}$$

($c = u$, iar dimensiunea microfisurii este proporțională cu $1/\alpha$) se obține relația lui Weibull pentru distribuția volumică a rezistenței în masa materialului $F_n(z)$:

$$F_n(z) = 1 - e^{\left[\frac{V}{V_0}\left(\frac{x}{z}\right)^{2\alpha}\right]} \tag{12}$$

în care V este volumul materialului ($V = n\,V_0$, V_0 fiind volumul elementar) $v = k\sqrt{u} = \sigma\,u$ (valoarea modală — locală — a rezistenței materialului), iar parametrul $2\,\alpha$ indică dispersia microfisurilor (cu cît este mai mare, cu atît este mai uniformă lungimea microfisurilor, deci mai redus efectul densității lor, care dispare complet în cazul limită al unidimensionării).

Pentru fixarea ideilor, sînt utile unele date fizice; astfel, în cazul metalelor parametrul 2α are valori de ordinul unităților (cu atît mai mari cu cît metalul este mai fragil), iar pentru materialele ceramice $2\alpha = 5 \ldots 10$. Lungimea u a microfisurilor (rezultat al imperfecțiunilor structurale) este de ordinul a $10^{-2} \ldots 10^{-1}$ mm (cu atît mai redusă cu cît materialul este mai fragil).

În lumina acestor date, apare drept cert faptul că microfisurile apărute în pastile (de neevitat, datorită transformărilor structurale care sînt însăși rațiunea lor de existență) nu se vor putea transmite în masa materialului tecii decît, de asemenea, sub forma unor microfisuri în punctele de sudură ale asperităților acestor materiale, iar acestea la rîndul lor, nu se vor putea dezvolta decît urmînd distribuția stohastică a lanțului celei mai slabe legături, deci după segmente orientate la întîmplare, a căror dimensiuni inițiale nu depășesc $10^{-2} \ldots 10^{-1}$ mm.

Rezultă deci, că în cazul unor contacte liniare între pastile și teacă, a căror lățime nu depășește $10^{-2} \ldots 10^{-1}$ mm, nu este posibilă dezvoltarea fisurilor, acestea fiind obligate să se limiteze la stadiul microscopic.

O soluție logică pentru configurația suprafețelor apare deci prelucrarea suprafeței interioare a tecii sub formă ondulată, rezultînd pentru contactul cu pastilele o alternanță de linii drepte și goluri paralele cu axa lor longitudinală; cu cît pasul acestora $2\,\lambda$ este mai mic (tinzînd spre valoarea citată) cu atît șansele de dezvoltare a microfisurilor scad (fig. 3).

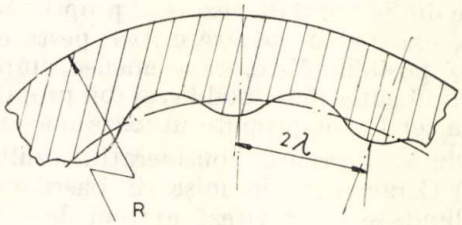


Fig. 3 — Configurația geometrică propusă pentru suprafața interioară a tecii elementelor combustibile.

3.2. POSIBILITĂȚILE DE UTILIZARE A UNUI LUBRIFIANT SOLID

În considerațiile de la punctul precedent nu s-a vorbit de valoarea coeficientului de frecare, deoarece acesta nu are importanță decît în măsura în care indică trecerea la valorea infinită, caracteristică gripajului. Într-adevăr, pentru cazul considerat, care se caracterizează prin deplasări cu amplitudini foarte mici, la care fenomenul de stick-slip este deosebit de favorizat, valorile coeficientului de frecare pot varia între limite foarte largi în timp sau local, problema esențială constînd în evitarea condițiilor de gripaj. Este de menționat că acestea depind prea puțin de valoarea

coeficientului de frecare, în condițiile menționate fiind posibilă apariția gripajului, chiar dacă de jur împrejurul zonei respective valorile coeficientului de frecare sînt foarte reduse datorită existenței unor straturi separatoare (oxizi, impurități etc.) În fine, trebuie amintit că în cazul frecării uscate, valori reduse ale coeficientului de frecare antrenează uzuri mari ale suprafețelor cu mișcări relative și invers, ceea ce rămîne încă unul dintre paradoxurile acestui regim tribologic.

Reiese clar din aceste considerente că apelul la un lubrifiant solid nu va urmări scăderea coeficientului de frecare ca obiectiv în sine, ci separarea suprafețelor cu mișcări relative pentru a se evita contactul direct între acestea, deci pericolul de sudură a asperităților. Existența unui film de lubrifiant continuu, caracterizat prin valori reduse ale lui τ_{int} din relația (9) ar evita așadar acest pericol. Rezultă deci că principala cerință impusă acestui film lubrifiant este continuitatea, asigurată de obicei prin uniformitatea grosimii stratului și a răspîndirii lui.

Dintre materialele solide cu bune calități lubrifiante [11], pentru cazul considerat al elementelor combustibile apare oportună utilizarea grafitului, datorită unei bune rezistențe la temperaturi ridicate; bisulfura de molibden sau fluorurile nu par indicate, deoarece există pericolul separării sulfului sau fluorului și a combinării cu materialul tecii, ceea ce trebuie evitat.

Caracteristicile lubrifiante ale grafitului se bazează pe o anumită orientare a cristalitelor componente, fapt dovedit prin metodele fizice moderne de investigație, de exemplu prin difracție electronică, [12].

În esență, slaba rezistență la forfecare (deci bunele proprietăți lubrifiante) ale grafitului sînt rezultatul faptului că în timpul procesului de frecare numeroase cristalite se orientează astfel încît majoritatea planurilor (0002) devin paralele cu suprafețele în frecare, iar unele vor macla datorită aplicării repetate a tensiunilor de forfecare. Unghiul optim de maclare din punctul de vedere al proprietăților tribologice este o funcție de sarcină, existînd o valoare critică peste care orientarea preferențială nu mai este posibilă. Este, de asemenea, important de menționat că vaporii de apă influențează în mod favorabil proprietățile lubrifiante ale grafitului, iar lipsa lor le compromite în mare măsură.

Din aceste scurte considerații, rezultă :

a) Caracteristicile mișcării pastilelor față de teacă (pe distanțe foarte limitate și cu viteză extrem de redusă) nu favorizează orientarea convenabilă a cristalitelor.

b) Este necesară punerea la punct a unei tehnologii care să permită depunerea uniformă a unui strat continuu de grafit pe suprafața interioară a tecii; trebuie utilizat un solvent acceptabil din punctul de vedere al contaminării tecii.

c) Trebuie menționat totodată că lipsesc date certe privind orientarea și comportarea cristalitelor de grafit în cazul unei iradieri intense și pentru timp îndelungat, așa cum se întîmplă în elementele combustibile. În condiții favorabile, cristalitele de grafit pot deveni factori abrazivi deosebit de periculoși, deoarece pătrund în suprafețele cu mișcări relative sub forma unor particule sferoidale dure, capabile să producă gripaje locale.

4. CONCLUZII PRIVIND POSIBILITĂȚILE DE EVITARE A RISCULUI DE GRIPAJ ÎN INTERIORUL ELEMENTELOR COMBUSTIBILE

a) S-au luat în considerație două categorii de soluții, prima legată de configurația macrogeometrică a suprafețelor în frecare [16], a doua legată de utilizarea unui lubrifiant solid.

b) Utilizarea unei configurații geometrice convenabile poate conduce la evitarea propagării microfisurilor, scăzînd astfel la procente practic neglijabile posibilitatea deteriorării tecii.

c) Valoarea coeficientului de frecare nu este semnificativă în cazul considerat, de mult mai mare importanță fiind evitarea gripajului și a propagării microfisurilor.

d) Eficiența unui lubrifiant solid (grafit) este condiționată de asigurarea uniformității stratului depus și de comportarea la iradiere, ambele fiind elemente de incertitudine.

e) Condițiile funcționale (iradieri, temperatură, presiune) nu influențează configurația macrogeometrică propusă.

Detalii privind alte aspecte ale lubrificației în condițiile unor puternice iradieri (efectul asupra lubrifianților, construcții de lagăre etc) au fost prezentate în lucrări anterioare, [13], [14], [15].

Primită la redacție la 23 iunie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. G. Coast, *Engineering Problems with the Dragon Reactor*, Nuclear Power, *1* (1963).
2. L. B. Sargent, *A Unified Theory of Friction*, ASLE Trans., **17**, *2* (1974).
3. G. Salomon, *Application of Systems Thinking to Tribology*, ASLE Trans., **17**, *4* (1974).
4. H. Czichos, *The Principles of System Analysis and their Application to Tribology*, ASLE Trans., **17**, *4* (1974).
5. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1964.
6. J. F. Archard, *Single Contacts and Multiple Encounters*, Journal of Applied Physics, 1961, p. 1420.
7. Al.Nica, *Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare și ungere*, St. cerc. mec.apl., *2* și *4*(1966).
8. A. L. Bement ș. a. *Fracture Mechanisms and Radiation Effects*, Fracture, vol. III, Academic Press, New York, 1971.
9. A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw — Hill Book Co., New York, 1963.
10. A. M. Freudenthal, *Statistical Approach to Brittle Fracture*, Fracture, vol. II, Academic Press, New York, 1968.
11. ***, *ASLE Proceedings, International Conference on Solid Lubrication*, Denver, 1971.
12. T. F. J. Quinn, *The Application of Modern Physical Techniques to Tribology*, Butterworths, Londra, 1971.
13. Al. Nica, *Sisteme de lubrificație*, Editura Academiei RSR, București, 1967.
14. ***, *Non — Conventional Lubricants and Bearing Materials such as Used in Nuclear Engineering*, Inst. of Mech. Eng., Londra, 1968.
15. Al. Nica, *Theory and Practice of Lubrication Systems*, Editura Academiei RSR și Scientific Publications (G. B.), Londra, 1969.
16. H. Mogard, *Fuel Design Concept Utilizing Rifled—Clad Tubing for the Suppression of Detrimental Fuel — Clad Interaction*, ANS—CNA Joint Topical Meeting on Commercial Nuclear Fuel Technology Today, Toronto, Aprilie 1975.

UTILIZAREA TEORIEI „LAGĂRULUI FOARTE SCURT" ÎN PROIECTAREA LAGĂRELOR HIDRODINAMICE RADIALE

de SERGIU IVANCENCO

Institutul politehnic din București

Este cunoscut faptul că, în vederea proiectării lagărelor radiale de alunecare funcționînd în regim hidrodinamic staționar, este necesară rezolvarea ecuației Reynolds, care, în sistemul de coordonate și notații din figura 1 și în condițiile considerării unei valori medii constante a vîscozității lubrifiantului folosit, are forma :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z}\right) - 6 \cdot u \cdot \eta \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{1}$$

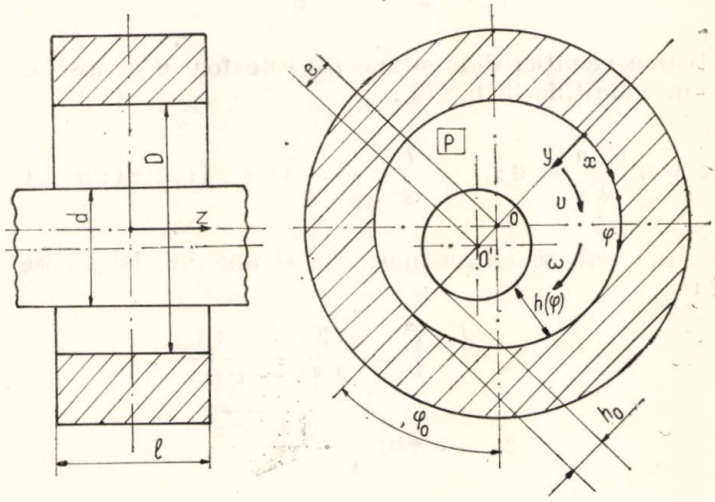


Fig. 1

unde p reprezintă presiunea în pelicula de lubrifiant,
h — grosimea peliculei de lubrifiant,
u — viteza relativă de alunecare fus-cuzinet,
η — viscozitatea dinamică a lubrifiantului,
x, y, z — variabilele sistemului de coordonate.

Rezolvarea ecuației Reynolds posibilă în aceste condiții, devine foarte dificilă în cazul lagărelor funcționînd în regim dinamic, al lagărelor echipate cu cuzineți porosi sau al lagărelor cu geometrii modificate, ca urmare a faptului că această ecuație se modifică prin apariția unor termeni suplimentari [5].

Pentru a ușura această rezolvare în condițiile enumerate, mulți autori recurg la utilizarea ipotezei simplificatoare a „lagărului foarte scurt" [2], [4], [5]. Această ipoteză, bazată pe faptul că lungimea lagărelor moderne este în general mai mică decît diametrul lor, constă în neglijarea variației circumferințiale a presiunii din pelicula de lubrifiant a lagărului în raport cu variația axială a acestei presiuni deoarece, este evident că, ultima variație de la un maxim la zero între mijlocul lungimii lagărului și capetele sale este foarte bruscă în raport cu prima variație. Matematic, ipoteza „lagărului foarte scurt" are forma

$$\frac{\partial p}{\partial z} \gg \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

În condiția (2), ținînd seama de faptul că grosimea peliculei de lubrifiant din lagărul radial nu variază pe lungimea acestuia, ecuația (1) devine :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{6 \cdot u \cdot \eta}{h^3} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3}$$

Rezolvarea ecuației diferențiale (3) este foarte cunoscută și simplu de realizat în condițiile la limită :

$$z = 0 : \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \; ; \; z = \frac{l}{2} : p = 0 \; ; \; \varphi \, \varepsilon \, [\pi, 2\pi] : p = 0. \tag{4}$$

Astfel, în final, se obține portanța și unghiul de poziție al fusului în cuzinet :

$$S_0 \times \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{6 \cdot \varepsilon^2 + 10}}{2 \cdot (1 - \varepsilon^2)^2}, \tag{5}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \tag{6}$$

unde

$S_0 = \dfrac{P_m \cdot \psi^2}{2 \cdot \omega}$ reprezintă portanța adimensională Sommerfeld,

$P_m = \dfrac{P}{d \cdot l}$ — presiunea medie fus-cuzinet,

$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ — portanța,

$P_1 = 2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{l/2} p \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot dz$ — componenta portanței pe direcția liniei centrelor fus-cuzinet,

$P_2 = 2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{l/2} p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot dz$ — componenta portanței pe direcția perpendiculară pe linia centrelor fus-cuzinet,

$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{P_2}{P_1}$ — unghiul dintre direcția portanței și linia centrelor fus-cuzinet,

d — diametrul fusului,

l — lungimea fusului,

ω — viteza unghiulară a fusului,

$\psi = \frac{\Delta r}{r}$ — jocul relativ fus-cuzinet,

$\varepsilon = \frac{e}{\Delta r}$ — excentricitatea relativă fus-cuzinet,

$\Delta r = R - r$ — jocul radial fus-cuzinet (diferența între razele cuzinetului și fusului),

$h = \Delta r \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)$ — relația geometrică dintre grosimea peliculei de lubrifiant și jocul fus-cuzinet.

Pentru determinarea coeficientului de frecare fluidă se recurge la integrarea, în acest caz, a relației lui Newton și raportarea forței de frecare astfel obținute la portanță, ajungîndu-se în final la relația [5]:

$$\frac{\mu}{\psi} = \frac{\pi}{S_0 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \varphi_0, \qquad (7)$$

unde μ este coeficientul frecării fluide.

Cercetările teoretice și experimentale au dovedit că rezultatele obținute prin utilizarea relației (5), deși sînt valabile calitativ, prezintă din punct de vedere cantitativ abateri în raport cu realitatea [1], [2]. Propunîndu-ne studierea acestor abateri, prezentăm în figura 2 variația raportului dintre portanțele adimensionale Sommerfeld obținute atît fără utilizarea

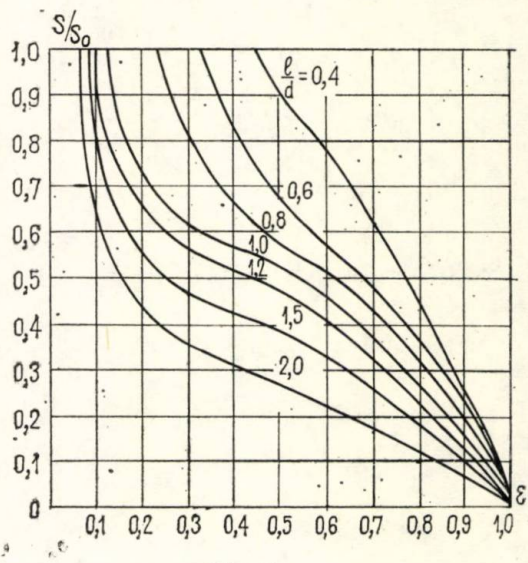


Fig. 2.

ipotezei „lagărului foarte scurt" [3], cît și prin utilizarea acestei ipoteze raport ce poate fi folosit ca factor de corecție în proiectarea cu ajutorul relației (5) a lagărelor radiale de alunecare funcționînd în regim hidrodinamic staționar. Este evident faptul că utilizarea relațiilor (5), (6), și (7) simplifică mult proiectarea acestor lagăre.

O importanță deosebită capătă factorul de corecție prezentat în figura 2 în cazul proiectării lagărelor funcționînd în regim dinamic, lagărelor echipate cu cuzineți poroși sau lagărelor cu geometrii modificate, deoarece în aceste cazuri, după cum s-a arătat, obținerea unor rezultate teoretice și în special dezvoltarea în continuare a studiilor teoretice este considerabil frînată fără utilizarea ipotezei „lagărului foarte scurt".

Evident, valabilitatea utilizării ipotezei „lagărului foarte scurt" și a coeficientului de corecție prezentat în figura 2, în calculul lagărelor anterior enumerate, deși confirmată de unele studii teoretice cum ar fi lucrarea [1], va trebui verificată experimental, deplina verificare teoretică fiind foarte dificilă din punct de vedere matematic.

Primită la redacție la 30 noiembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. C. Cusano, *Lubrication of porous journal bearings*, J. Lubric. Techn., ASME Trans., January 1972, p. 67—73.
2. G. B. DuBois, F. W. Ocvirk, *Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximation for full journal bearings*, NASA Report 1157, 1953.
3. Gh. Manea, *Organe de mașini*, vol. I, Edit. tehnică, București, 1971.
4. F. W. Ocvirk, *Short bearing approximation for full journal bearings*, NASA T. N. 2808, 1952.
5. O. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of hydrodynamic lubrication*, McGraw — Hill Book Company, 1961.

MODIFICĂRI ÎN CINEMATICA POMPELOR ȘI MOTOARELOR HIDROSTATICE ÎN SCOPUL AMELIORĂRII PERFORMANȚELOR DINAMICE

de AUREL OPREAN, LIVIU MASALAR, CONSTANTIN TÎRCOLEA
Institutul politehnic București

Este cunoscut efectul dăunător al vibrațiilor asupra proceselor de lucru în construcția de mașini în general și, în special, în cea a mașinilor unelte, unde precizia dimensinoală, de formă și rugozitate a suprafețelor pieselor prelucrate depind, în modul cel mai direct, de performanțele diamice ale sistemului elastic.

Vibrațiile pot fi înlăturate, dacă se acționează asupra sursei care le provoacă, sau reduse, dacă se utilizează unele tipuri de amortizare.

Avînd în vedere larga utilizare a sistemelor hidraulice de acționare în construcția de mașini precum și faptul că la acestea una din sursele importante de vibrații și zgomot o prezintă pulsațiile de debit ale pompei de acționare, pulsații care rezidă în însuși principiul de funcționare a acesteia, lucrarea de față își propune să prezinte o metodică generală de calcul și o soluție constructivă de principiu a pompelor și motoarelor hidrostatice care modifică cinematica acestora, avînd ca efect eliminarea complectă a pulsațiilor debitului pompei sau pulsațiile de cuplu și putere la motor.

Pulsația debitului pompei se exprimă prin coeficientul de pulsație :

$$\delta_\omega = \frac{Q_{max} - Q_{min}}{Q_{med}} \%, \tag{1}$$

în care

Q_{max}, Q_{min} și Q_{med} reprezintă debitele maxime, minime și, respectiv, mediu ale pompei.

Din punct de vedere matematic, a elimina pulsațiile de debit ale pompei înseamnă a realiza condiția :

$$\delta_\omega \cong 0 \Rightarrow Q_{max} - Q_{min} \cong 0, \quad VQ_{max} \cong Q_{min} \cong Q \cong \text{const.} \tag{2}$$

Caracterul pulsator, spre exemplu, la o pompă cu pistonașe radiale rezultă din figura 1. Ținînd cont de notațiile din figură și de principiul de

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 36, NR. 3, 1977, P. 455–462

funcţionare a pompei, pe porţiunea $A\ B\ C$ va avea loc refularea lichidului. Pornind din punctul A rola va descrie pînă în punctul A' unghiul $\varphi = \omega \cdot t$, iar pistonaşul va efectua cursa x. Volumul de lichid refulat de pistonaş pînă la momentul $t(\varphi)$ va fi dat de produsul

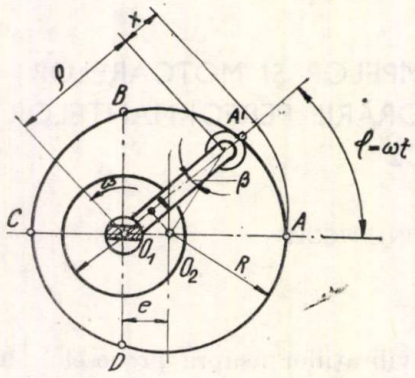


Fig. 1

$$V_x = s \cdot x, \tag{3}$$

unde $s = \dfrac{\pi d^2}{4}$ este suprafaţa activă a pistonaşului (d-diametrul pistonaşului), iar x este spaţiul parcurs de pistonaş pe direcţie radială.

Valoarea lui x, conform figurii 1 se exprimă:

$$x = R + e - \rho, \tag{4}$$

unde $\rho = e\cos\varphi + R\cos\beta$, prin urmare

$$x = R + e - (e\cos\varphi + R\cos\beta). \tag{5}$$

Aplicînd teorema sinusului, se determină expresia unghiului β în funcţie de elemente cunoscute: $\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{e^2}{R^2}\sin^2\varphi}$ care, folosind seria binomială:

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{(1)!!}{(2)!!}u^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}u^n + R_n$$

(unde, înlocuind $u = \dfrac{e^2}{R^2}\sin^2\varphi$, luînd $n = 1$ şi ţinînd cont că $|u| < 1$, se obţine $\sqrt{1 - \dfrac{e^2}{R^2}\sin^2\varphi} \cong 1 - \dfrac{e^2}{R^2}\dfrac{\sin^2\varphi}{2}$), dă expresia: $\cos\beta = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{e^2}{R^2}\sin^2\varphi$, sau, sub o altă formă, $\cos\beta = \dfrac{1}{R}\left(R - \dfrac{e^2}{4R} + \dfrac{e^2\cos 2\varphi}{4R}\right)$ şi în final x are forma

$$x = e(1 - \cos\varphi) + \frac{e^2}{4R}(1 - \cos 2\varphi). \tag{6}$$

Volumul elementar de fluid refulat de un pistonaş are expresia

$$\mathrm{d}V_x = s\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = s\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cong s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e(1 - \cos\varphi)] = s\,e\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{8}$$

în care din expresia (6) s-a luat numai primul termen, deoarece $\dfrac{e}{R} \cong 0{,}05$.

În final, din relaţia (8) rezultă că debitul instantaneu $\dfrac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = q$, deci

debitul instantaneu al unui pistonaş în funcţie de unghiul poziţional φ are expresia

$$q = s\,v = s\,e\,\omega \sin \varphi. \tag{9}$$

Avînd în vedere figura 2, poziţiile pistonaşelor sînt determinate prin unghiurile :

$$\varphi_{n-1} = \varphi + (n-1)\,\theta \quad (n = 1, 2, \ldots k), \tag{10}$$

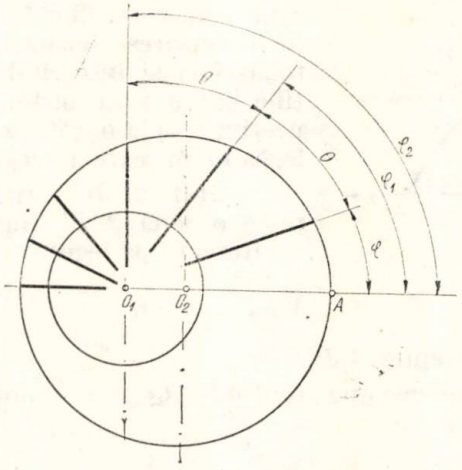


Fig. 2

în care $\theta = \dfrac{2\pi}{z}$ reprezintă pasul unghiular al pistoanelor în rotor.

Ţinînd cont de expresia debitului instantaneu al unui pistonaş şi de valorile lui φ, debitele instantanee, la momentul considerat, sînt date de expresia :

$$q_{n-1} = s\,e\,\omega \sin\,[\varphi + (n-1)\theta], \tag{11}$$

iar debitul instantaneu total al pompei :

$$Q_{\text{inst}} = \sum_{x=1}^{k} q_{n-1} = s\,e\,\omega \sum_{n=1}^{k} \sin\,[\varphi + (n-1)\theta] \tag{12}$$

sau încă

$$Q_{\text{inst}} = s\,e\,\omega \frac{\sin\dfrac{k\,\theta}{2} \sin\left[\varphi + \dfrac{(k-1)\theta}{2}\right]}{\sin\dfrac{\theta}{2}}. \tag{13}$$

Din analiza prezentată rezultă că debitul instantaneu Q_{inst} al pompei este variabil şi depinde de poziţia unghiulară a rotorului, iar fenomenul la pulsaţie se constată uşor reprezentînd grafic $Q = f(\varphi)$ (fig. 3).

Caracterul pulsator se datorește variației vitezei de refulare pe zona cercului $AA'C$ (fig. 1), deci dacă se va profila statorul pompei după o curbă matematică ce va îndeplini condiția $v = \text{const.}$, pompa va funcționa fără pulsații, pentrucă conform relației (9) $q = sv$, deci și $q = \text{const.}$ (la $s = \text{const.}$) indiferent de poziția unghiulară a pistonului.

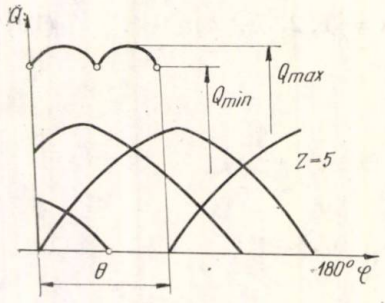


Fig. 3

Alegînd o formă de variație a vitezei conform figurii 4 *b*, modificată însă ca în figura 5 *b*, spre a evita creșterea exagerată a accelerațiilor în punctele 0 și $\pm\pi$ (la inversarea sensului de mișcare a pistonașelor) și integrînd grafic se obțin spațiile parcurse de pistonaș (fig. 4 *a*, și, respectiv, 5 *a*),la o rotație a rotorului, deci legea de mișcare a acestora.

Graficul de variație a vitezei presupune o zonă $A'B'$ (fig. 5 *b*) de creștere a vitezei după legea

$$V_{A'B'} = a \cdot t, \tag{14}$$

unde a este panta dreptei $A'B'$.

Spațiul parcurs de pistonaș pe arcul AB (fig. 5 *a*) se obține prin integrarea expresiei (14), astfel

$$x_{AB} = \frac{at^2}{2}, \tag{15}$$

iar pe porțiunea $B'C'$ viteza fiind (16)

$$V_{B'C'} = v_0 = \text{const.}$$

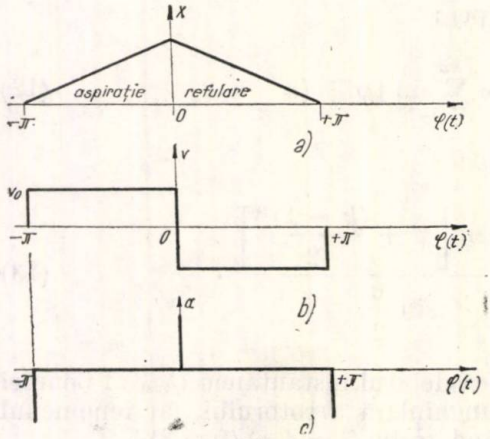


Fig. 4

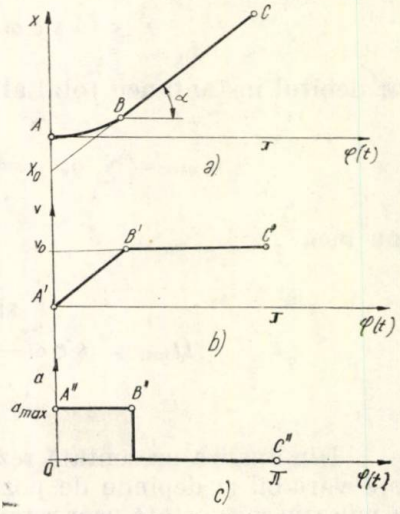


Fig. 5

și prin integrare spațiul parcurs de pistonaș devine

$$x_{BC} = v_0 t + x_0, \tag{17}$$

în care x_0 reprezintă constanta de integrare, adică tocmai tăietura dreptei BC pe axa verticală ox (vezi fig. 5 *a*).

În coordonate carteziene expresiile (15) și (17) reprezintă ecuațiile unei parabole și a unei drepte. Prin înfășurarea pe cerc a arcului $0-\pi$ se vor obține curbele transformate și anume (fig. 6): arcul A_1B_1 de parabolă înfășurată pe un anumit unghi φ_1 și segmentul de dreaptă BC înfășurat pe unghiul $\pi-\theta$, care devine un arc de spirală arhimedică B_1C_1 de ecuație $\rho = a\,\theta$.

Revenind la figura 5 se observă că pentru a obține graficul vitezei din figura 5 *b* este necesar ca arcul de parabolă AB să fie racordat cu dreapta BC, adică dreapta BC să fie tangentă în punctul B la parabolă.

Punînd condiția că dreapta BC, de ecuație

$$x = v_0 t + x_0, \tag{18}$$

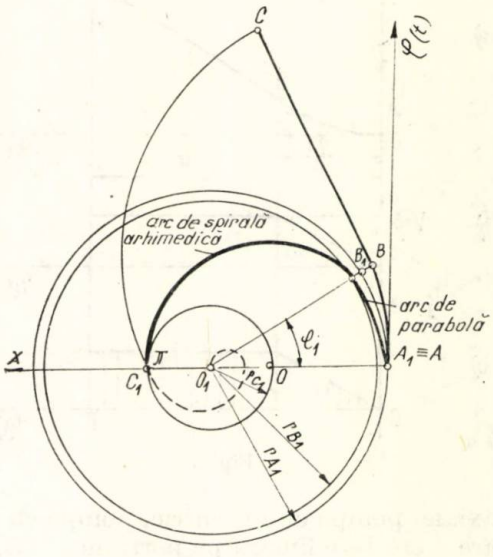


Fig. 6

să fie tangentă în punctul B al parabolei AB, de ecuație

$$x = \frac{at^2}{2}, \tag{19}$$

și derivînd, se obține $\dot{x} = at$, deci $\dot{x}(B) = at_s$.

Impunînd condiția $\dot{x}(B) = v_0$ (să fie coeficientul unghiular al dreptei BC), rezultă

$$at_s = v_s$$

sau

$$t_s = \frac{v_0}{a}. \tag{20}$$

Din legea mișcării circulare $\varphi = \omega t$ se obține $\varphi_B = \omega t_1$, sau

$$\varphi_B = \omega \frac{v_0}{a},$$

în care φ_B este arcul sub care se va subîntinde paraobola A_1B_1 pînă la racordarea cu segmentul de dreaptă BC devenit spirală arhimedică B_1C_1 (vezi fig. 6 și fig. 5).

Examinînd graficul vitezei din figura 5.*b* şi relaţia (9) ($q = sv$) se observă că debitul instantaneu q are aceeaşi alură de variaţie ca şi viteza pentru toate pompele la care $s = \text{const}$ (pompe cu pistonaşe radiale,

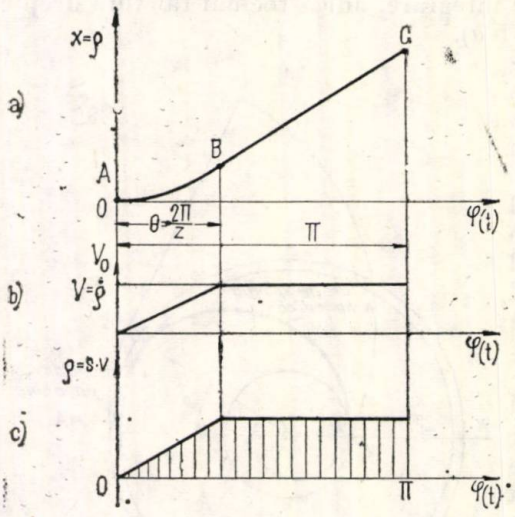


Fig. 7

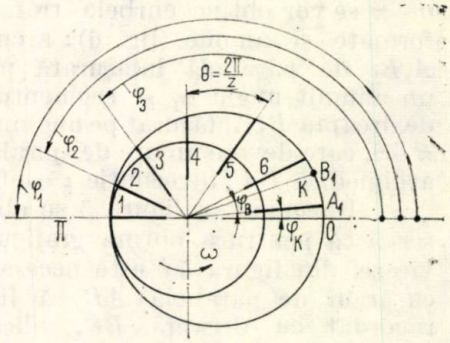


Fig. 8

axiale, pompe cu excentric, pompe cu plonjoare). Deci debitul instantaneu are o creştere liniară pe porţiunea AB, iar aria de sub curba 7 *c* reprezintă chiar volumul de lichid refulat de un pistonaş în timp ce parcurge întreaga zonă de refulare, în consecinţă, considerînd că rotorul pompei a efectuat o jumătate de rotaţie, poziţia pistonaşelor va fi cea reprezentată în figura 8. Fiecare pistonaş va parcurge un anumit spaţiu unghiular φ_1 astfel că debitele instantanee q_i şi volumele de lichid V_i, refulat pînă în momentul considerat, vor fi cele reprezentate în figura 9.

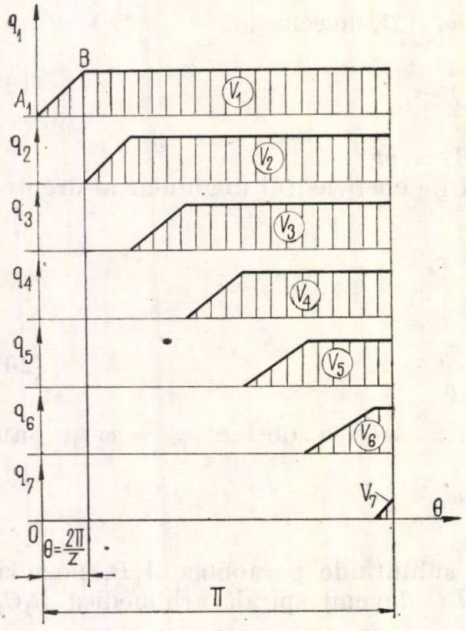


Fig. 9

Dacă se alege unghiul φ_B care subîntinde arcul de parabolă egal cu pasul unghiular $\theta = \frac{2\pi}{z}$, ca în figura 9, se vede că punctele de început de refulare, A_i vor cădea pe aceeaşi verticală cu punctele B_{i-1} corespunzătoare momentului intrării pe spirala arhimedică de viteză constantă a fiecărui pistonaş în parte.

Însumînd volumele V_i refulate de fiecare pistonaş în timp ce rotorul

pompei a efectuat o jumătate de rotație se obține volumul total pe 1/2 rotație (fig. 10):

$$V_t = \Sigma V_i, \tag{21}$$

din care se observă că volumul refulat de lichid în sistem are o variație liniară crescătoare în timp, deci

$$V_t = V_{inst} = a \cdot t. \tag{22}$$

Derivînd relația (22) în raport cu timpul, rezultă că debitul acestor pompe este constant $a = \frac{V}{t} = \text{const.}$, sau $Q_0 = \frac{V}{t} = \text{const.}$ și nu prezintă pulsații deoarece

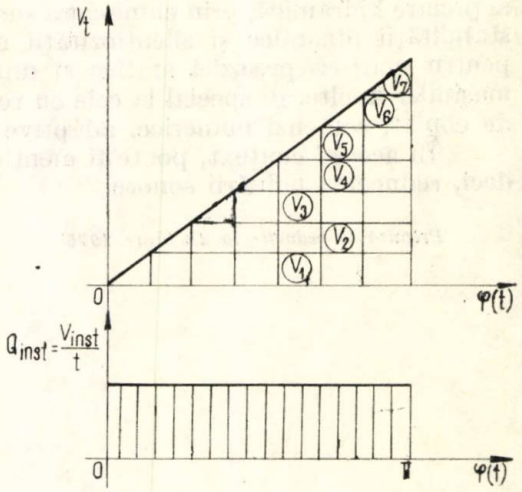


Fig. 10

$$\delta_\omega = \frac{Q_0 - Q_0}{Q_0} = 0 \tag{23}$$

conform relațiilor de restricție (2).

CONCLUZII

1. Pentru eliminarea pulsațiilor de debit la pompele cu $s = \text{const.}$ cu pistonașe axiale, radiale, cu excentric, cu came sau cu planjoare este necesar a se proiecta astfel cinematica lor încît să se asigure în zona de refulare o viteză de deplasare a pistonașelor liniar crescătoare pe un arc egal cu pasul unghiular $\theta = 2\pi/z$ (arc de parabolă), iar în continuare o viteză constantă pe porțiunea $\pi - \theta$ (arc de spirală arhimedică).

Legea de mișcare a pistonașelor din zona de aspirație nu influențează cu nimic caracterul pulsator al debitului, deci forma ei poate fi aleasă din considerente tehnologice.

2. Soluția propusă permite alegerea unui număr oarecare de pistonașe. Din considerente de execuție tehnologică ușoară se va prefera numărul par de pistonașe. Tehnologiile actuale permit cu suficientă ușurință profilarea statorului, excentricului, camei etc. după curbele indicate.

3. Metoda expusă este valabilă și pentru motoarele hidrostatice de același gen, deci se elimină pulsațiile de cuplu și putere la axul de ieșire.

4. Metodica prezentată are un mare grad de generalitate putînd fi aplicată practic la oricare tip de pompă sau motor hidrostatic dintre cele utilizate curent în sistemele de acţionare hidraulică.

5. Metodica şi soluţia de profilare prezentată are o importanţă deosebită pentru creşterea performanţelor dinamice ale sistemului de acţionare hidraulică, prin eliminarea sursei se oscilaţii forţate, prin mărirea stabilităţii dinamice şi silenţiozităţii mişcării, caracteristici determinate pentru mărirea preciziei statice şi dinamice în lanţurile cinematice ale maşinilor-unelte, în special la cele cu reglare automată (sisteme hidraulice de copiat, comenzi numerice, adaptive etc.).

În acelaşi context, poate fi menţionată şi diminuarea zgomotului şi, deci, reducerea poluării sonore.

Primită la redacţie la 28 iunie 1976

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 36, nr. 4 — iulie—august 1977

SUMAR

STUDII

Pag.

V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEŢUŞE, Efecte inerţiale în filme lubrifiante . . . 465

JULIETA FLOREA, VALERIU PANAITESCU, Studiul prin similitudine al curgerilor cu suprafaţă liberă cu pat mobil pe model distorsionat 485

SERGIU IVANCENCO, Calculul hidrodinamic al lagărului radial de alunecare, echipat cu cuzinet poros şi rezervor circular deschis 493

ŞT. ZAREA, M. POPESCU, I. JELEV, Calculul rezervoarelor de aer din sistemele hidraulice sub presiune, în ipoteza mişcării lent variabile 503

C. BUDA, ŞT. POPESCU, Algoritm şi program pentru dimensionarea hidraulică a camerelor spirale în beton 513

MIHAIL POPESCU, Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice şi staţiilor de pompare cu aducţiuni mixte prevăzute cu regulatoare automate . 521

CHR. PELECUDI, DAN IONESCU, Analiza structural-geometrică a mecanismelor singulare 4C—5C 531

D. CATRINA, Erori ale pasului elicei piesei, provocate de bătaia radială a roţilor dinţate din lanţul cinematic de filetare 541

D. BRATOSIN, Un model elastic neliniar pentru pămînturi 551

N. ŢOPA, Un algoritm de calcul al plăcilor plane cu rezemare elastică prin metoda elementelor finite 565

N. ATANASIU, Comportarea la deformare plastică a metalelor şi aliajelor în cîmp ultrasonic 579

I. CUCUREZEANU, P. SUCIU, R. CHIŞLEAG, Studiul deformaţiilor mecanice şi termice prin interferometrie holografică 591

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

I. DUMITRESCU, Simularea sistemelor fizice cu ajutorul calculatoarelor cu structură hibridă 597

RECENZII 617

EFECTE INERȚIALE ÎN FILME LUBRIFIANTE

de V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLETUȘE

Institutul politehnic București

Tranziția la scurgere superlaminară și turbulentă împreună cu influența forțelor de inerție formează probleme de importanță deosebită în legătură cu funcționarea lagărelor la numere Reynolds mari. Lucrarea se ocupă în principal de influența forțelor de inerție și intenționează a fi un rezumat al cercetărilor făcute în ultimii ani la Institutul politehnic București, România și Institutul politehnic Rensselaer, S.U.A., în baza unui contract de cooperare internațională.

Se pune mai întîi în evidență necesitatea elaborării unor metode aproximative convenabile pentru a determina calitativ efectele forțelor de inerție și a evalua ordinul de mărime al acestora. Dacă se dorește un studiu riguros, pornind de la ecuațiile generale ale scurgerii turbulent-vîscoase, aceasta este posibil numai prin metode numerice, însă vor apărea dificultăți importante legate atît de timpul necesar de calculator, cît și de capacitatea foarte mare necesară calculatorului.

În lucrare sînt prezentate metode analitice simple pentru evaluarea influenței forțelor de inerție convective și forțelor de inerție dependente direct de timp, precum și metode de evaluare a unor efecte speciale, datorite tot forțelor de inerție, la intrarea și ieșirea filmului de lubrifiant. Sînt prezentate cele mai importante rezultate obținute împreună cu unele verificări experimentale.

1. INTRODUCERE

Influența forțelor de inerție în lubrificația hidrodinamică reprezintă o problemă care a fost în atenția multor autori în ultimii ani. Deși o imagine completă și clară a importanței efectelor inerției asupra performanțelor lagărelor nu poate fi obținută fără a se efectua studii și analize detaliate, se poate presupune de la început că problema are importanță practică pentru aplicații la care numărul Reynolds al curgerii este relativ mare. Pe lîngă efectele cunoscute ce apar atunci cînd numărul Raynolds este mare, cum ar fi : curgere în regim de tranziție de la laminar la turbulent, curgere cu vîrtejuri Taylor, curgere în regim turbulent complet dezvoltat, forțele de inerție pot avea efecte în plus, care nu mai pot fi neglijate [1]—[4]. Ca aplicații la care pot apărea numere Reynolds mari pot fi amintite :

a) Lagăre folosind metale lichide ca lubrifiant, în aplicații nucleare [3] ($\mathcal{R}e \sim 5000$).

b) Instalații de lichefiere utilizînd gaze lichefiate ca lubrifiant [5] ($\mathcal{R}e \sim 50.000$).

c) Vehicule cu pernă de aer și aerotrenuri [6] ($\mathcal{R}e \sim 200.000$).

Efectele forțelor de inerție pot fi calitativ rezumate în :

1) O transformare parțială a presiunii statice în presiune dinamică în zona convergentă a filmului, unde curgerea este accelerată și invers în zona divergentă dacă nu apar alte fenomene cum ar fi separarea, ruperea filmului sau cavitație [1], [2].

2) Pentru cazul particular al variației în trepte a grosimii filmului poate apărea o accelerare (dacă raportul între grosimile înainte și după treaptă este relativ mic) și deci va exista o pierdere de presiune statică în dreptul treptei sau poate apărea o decelerare a scurgerii efective prin lagăr (pentru rapoarte mari ale grosimilor), iar în consecință va apărea o creștere a presiunii statice [7].

3) Pentru lagăre hidrostatice, pe lîngă scăderea presiunii statice în dreptul treptei (buzunarul de alimentare) pot apărea restricții suplimentare. Astfel, în apropierea buzunarului de alimentare, datorită schimbării rapide a vitezei medii, poate apărea o scădere puternică a presiunii și chiar presiune negativă (cavitație). Acest efect poate fi evitat dacă se utilizează un buzunar suplimentar de rază mai mare. Efectul forțelor de inerție asupra caracteristicilor globale ale lagărelor hidrostatice depind de tipul de alimentare [8] (debit constant sau presiune constantă).

4) Efecte de intrare. Cînd forțele de inerție sînt importante, presiunea dinamică a curgerii de alimentare devine de același ordin de mărime cu presiunea creată în film. În consecință, se poate presupune că presiunea la intrare va fi diferită de presiunea atmosferică, și anume mai mică dacă scurgerea este accelerată și cel mai probabil mai mare cînd scurgerea este decelerată sau cînd apare curgere inversată în film.

5) Efecte de ieșire. După cum se știe filmele lichide pot prezenta rupere sau cavitație spre ieșire, în special cînd filmul este divergent. În cazul lubrificației cu forțe de inerție, de asemenea, aceste fenomene pot apărea. În plus, în acest din urmă caz pot apărea efecte asemănătoare cu separarea stratului-limită, mai ales dacă lubrifiantul este aer sau un gaz oarecare.

6) Efecte dinamice ale forțelor de inerție convective și ale forțelor de inerție dependente direct de timp de forma $\rho\, \partial u/\partial t$, $\rho\, \partial w/\partial t$.

Pentru a se pune în evidență ordinul de mărime al efectului relativ al forțelor de inerție, ca o evaluare aproximativă, trebuie făcut raportul între acestea ($\rho u\, \partial u/\partial x$ din ecuația de mișcare $\sim \rho\, V^2/l$) și tensiunile de frecare ($\mu\, \partial^2 u/\partial y^2 \sim \mu\, V/h^2$), adică

$$\frac{\rho u \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \sim \frac{\rho\, Vh}{\mu} \frac{h}{l} = \mathcal{R}e \frac{h}{l} \tag{1}$$

în cazul curgerii în regim laminar. Pentru scurgere turbulentă, tensiunile vîscoase trebuie înlocuite cu tensiunile turbulente ($\bar{\tau}_0$ sau $k_x/12$ [2]), adică

$$\frac{\mathcal{R}e}{\bar{\tau}_0} \frac{h}{l} \quad \text{sau} \quad \frac{12}{k_x} \mathcal{R}e \frac{h}{l}. \tag{2}$$

Rezultă deci că forțele de inerție au influență apreciabilă atunci cînd numărul Reynolds este mare (> 1000) ca în cazul aplicațiilor amintite mai înainte, deoarece raportul h/l este normal mic, de ordinul 10^{-3}. În aceste cazuri forțele de inerție trebuie incluse în calcul, și pentru proiectare sînt necesare metode noi care să țină seama de efectele acestora.

2. ECUAȚIILE DE BAZĂ ÎN FILM

În cazul mișcării bidimensionale (scurgere longitudinală), ecuația de mișcare în direcția x poate fi integrată după grosimea filmului [2] și scrisă ca,

$$\rho \frac{\mathrm{d}I_{xx}}{\mathrm{d}x} + h\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \tau_0 - \tau_h = 0, \tag{3}$$

unde τ_0, τ_h sînt tensiunile de frecare pe cele două suprafețe ($y = 0$, h). S-a considerat suprafața $y = 0$ mobilă, cu viteza V și suprafața $y = h$ în repaus.

După cum s-a arătat în [2], alura profilelor de viteze nu este modificată mult de către forțele de inerție, astfel că integrala I_{xx} devine,

$$I_{xx} = \int_0^h u^2 \,\mathrm{d}y = \alpha U_m^2 h + \beta V^2 h - \gamma U_m V h, \tag{4}$$

unde

$$\begin{aligned} &\alpha = 1{,}2\,; \qquad \beta = 0{,}133\,; \qquad \gamma = 0{,}2 \text{ (laminar)}, \\ &\alpha = 1\,; \qquad \beta = \frac{0{,}885}{\mathcal{R}e^{\,0.367}}\,; \quad \gamma = 0 \text{ (turbulent).} \end{aligned} \tag{5}$$

Un rezultat asemănător cu acesta s-a obținut și pe altă cale. Ecuația de mișcare, împreună cu ecuația de continuitate au fost integrate numeric [2], [9], considerînd o curgere pentru care

$$v = u\frac{y^2}{h^2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

Relația (6) este o extindere a ipotezei Hammel folosită la scurgeri în canale convergente sau divergente. Rezultatele astfel obținute prin cele două metode sînt prezentate în figura 1, și se poate observa o foarte bună concordanță.

În același timp diferența $\tau_0 - \tau_h$ s-a determinat [2], [10], sub forma,

$$\tau_0 - \tau_h = k_x \frac{\mu V}{h}\left(\frac{U_m}{V} - \frac{1}{2}\right) - \delta \frac{\mu V}{h}\mathcal{R}e\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\left(\frac{U_m}{V}\right)^2, \tag{7}$$

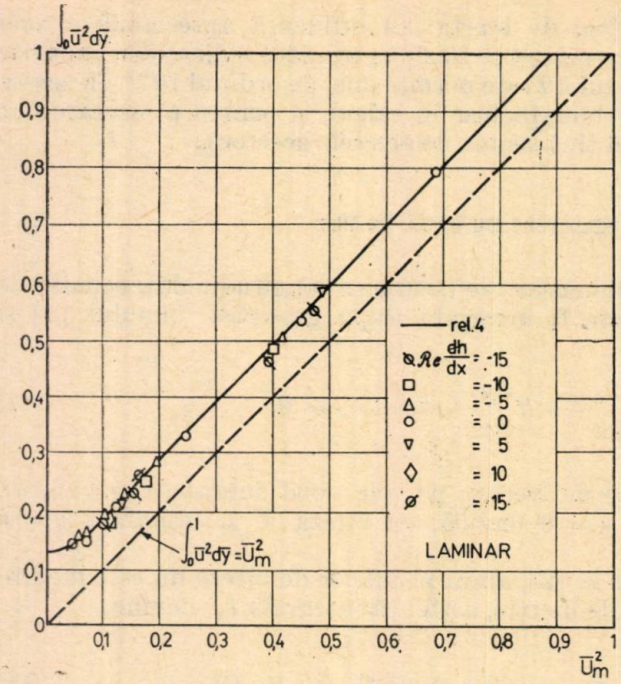
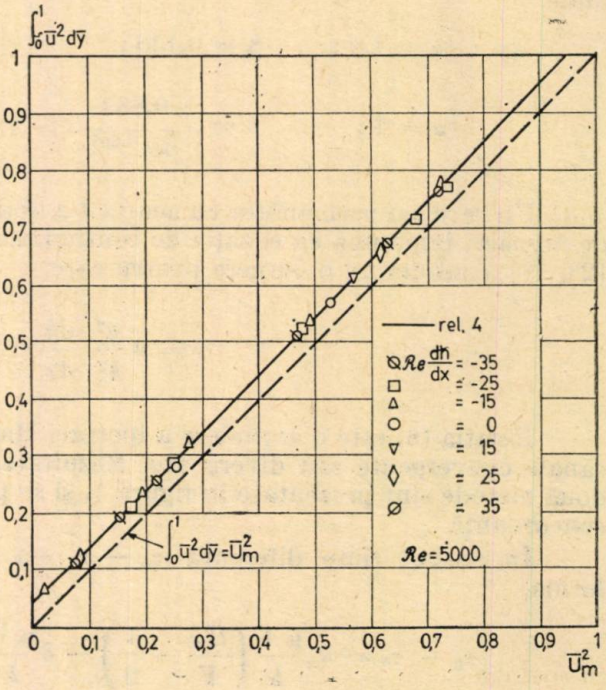


Fig. 1. — Integrala de impuls după grosimea filmului : *a*) laminar ; *b*) turbulent, $\mathcal{R}e = 5000$.



unde

$$k_x = 12\,; \qquad \delta = 0{,}133 \text{ (laminar)},$$

$$k_x = 12 + 0{,}0136\,\mathcal{R}e^{0{,}9}, \qquad \delta = \frac{1{,}95}{\mathcal{R}e^{0{,}43}} \text{ (turbulent)}. \tag{8}$$

Ținînd seama de relațiile (4), (7) și de asemenea de ecuația de continuare $Q = U_m h = \text{const.}$, ecuația de mișcare (3) poate fi scrisă ca o ecuație diferențială a presiunii,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{6\mu V}{h^2}\left(1 - \frac{2Q}{Vh}\right) + (\alpha + \delta)\frac{\rho Q^2}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \beta\frac{\rho V^2}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \quad \text{(laminar)},$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = k_x\frac{\mu V}{2h^2}\left(1 - \frac{2Q}{Vh}\right) + (\alpha + \delta)\frac{\rho Q^2}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - 0{,}633\,\beta\frac{\rho V^2}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \text{ (turbulent)}. \tag{9}$$

În cazul curgerii tridimensionale, ecuațiile de mișcare în direcțiile x și z se pot scrie [2] astfel :

$$\rho\frac{\partial I_{xx}}{\partial x} + \rho\frac{\partial I_{xz}}{\partial z} + h\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{k_x}{h}\left(U_m - \frac{V}{2}\right) = 0,$$

$$\rho\frac{\partial I_{xz}}{\partial x} + \rho\frac{\partial I_{zz}}{\partial z} + h\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{k_z}{h}W_m = 0, \tag{10}$$

unde

$$I_{xx} = \int_0^h u^2\,\mathrm{d}y\,; \quad I_{xz} = \int_0^h u\,w\,\mathrm{d}y\,; \quad I_{zz} = \int_0^h w^2\,\mathrm{d}y \tag{11}$$

și au expresiile

$$I_{xx} = \alpha\,U_m^2\,h + \beta\,V^2 h - \gamma\,U_m V h,$$

$$I_{xz} = \alpha\,U_m\,W_m h - \frac{\gamma}{2}\,V\,W_m h, \tag{12}$$

$$I_{zz} = \alpha\,W_m^2\,h,$$

cu coeficienții α, β, γ dați de (5).

În consecință, sistemul (10) este

$$\rho \frac{\partial}{\partial x}(\alpha U_m^2 h + \beta V^2 h - \gamma U_m V h) + \rho \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha U_m W_m h - \frac{\gamma}{2} V W_m h\right) +$$

$$+ h \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{k_x}{h}\left(U_m - \frac{V}{2}\right) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha U_m W_m h - \frac{\gamma}{2} V W_m h\right) + \rho \frac{\partial}{\partial z}(\alpha W_m^2 h) + h \frac{\partial p}{\partial z} + \tag{13}$$

$$+ \mu \frac{k_z}{h} W_m = 0,$$

în care $k_z = 12$ pentru regim laminar, și $k_z = 12 + 0{,}0043\, \mathcal{R}e^{0.96}$ pentru regim turbulent [2].

3. LAGĂRE ÎN TREPTE

În cazul cînd grosimea stratului de lubrifiant prezintă o scădere bruscă, ca, de exemplu, într-un lagăr în trepte (fig. 2), efectul forțelor de inerție este concentrat în regiunea din vecinătatea treptei și se manifestă printr-un salt de presiune.

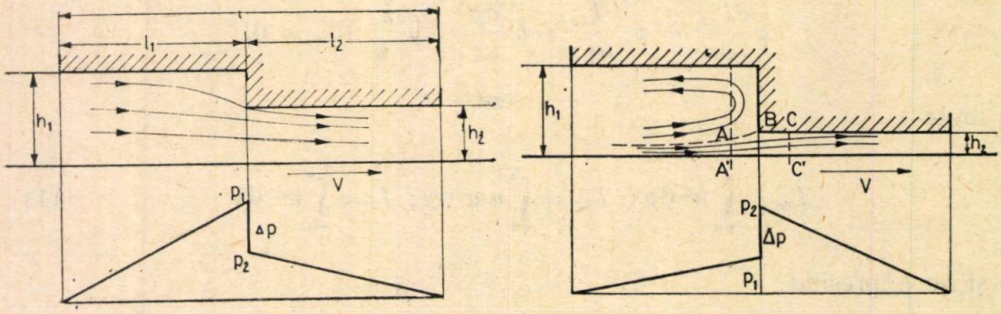


Fig. 2. — Lagăr în trepte. Notații :
a) scurgere fără întoarcere ; *b*) scurgere cu întoarcere.

Dealtfel, scurgerea rămîne fără forțe de inerție în ambele părți ale lagărului ($dh/dx = 0$), astfel că distribuția de presiuni în ambele părți rămîne în continuare liniară, dar dacă se consideră efectul forțelor de inerție în dreptul treptei, cele două presiuni la stînga p_1 și la dreapta p_2 nu vor mai fi egale. În acest caz va exista un salt $\Delta p = p_1 - p_2$ pentru determinarea căruia mai trebuie dedusă o ecuație care să lege parametrii mișcării în cele două regimuri în genul ecuației de mișcare, sau o ecuație

echivalentă de impuls sau, eventual, o relație energetică. O asemenea relație va exprima diferența de presiune Δp în funcție de vitezele medii, respectiv debit și de viteza suprafeței mobile[7].

UTILIZAREA DIRECTĂ A ECUAȚIEI DE MIȘCARE ÎN REGIUNEA SALTULUI

Așa după cum s-a menționat și în lucrările [2], [7], se poate considera că distribuția generală de presiuni nu va fi sensibil alterată dacă în locul unui salt brusc în variația grosimii h se va considera o variație rapidă dar continuă pentru grosimea h de la h_1 la h_2 pe o lungime Δx foarte mică în comparație cu celelalte dimensiuni.

În asemenea condiții s-ar putea considera aproximativ că ecuația presiunii (9) sau ecuația de mișcare (3) sînt valabile și în regiunea saltului. De exemplu, ecuația (3) poate fi scrisă sub forma,

$$\rho \frac{dI_{xx}}{h} + dp + \frac{\tau_0 - \tau_h}{h} dx = 0. \tag{14}$$

Ținînd seama de expresiile (4), (5), (7) pentru I_{xx} și $(\tau_0 - \tau_h)$, ecuația (14) poate fi integrată pe domeniul Δx. Trecînd după aceasta la limită pentru $\Delta x \to 0$, se obține expresia saltului de presiune sub forma :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\alpha + \delta) \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) - \beta \rho V^2 \ln \frac{h_1}{h_2} \tag{15}$$

sau

$$\Delta p = 1{,}333 \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) - 0{,}133 \rho V^2 \ln \frac{h_1}{h_2} \qquad \text{(laminar)},$$

$$\Delta p = \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) + 0{,}803 \rho Q^2 \left(\frac{1}{h_2^2 \mathcal{R}e_2^{0,43}} - \frac{1}{h_1^2 \mathcal{R}e_1^{0,43}} \right) - \tag{16}$$

$$- 1{,}527 \rho V^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}e_2^{0,367}} - \frac{1}{\mathcal{R}e_1^{0,367}} \right) \qquad \text{(turbulent)}.$$

Se poate observa că relațiile (16) dau pentru valori mici ale raportului $K = h_1/h_2$ un salt de presiune pozitiv, adică o cădere de presiune (scurgere accelerată), iar pentru valori mai mari ($K > 4$ pentru laminar și cazul concret de geometrie de lagăr precizat în figura 3) saltul de presiune schimbă de semn, avînd deci o creștere de presiune (scurgere frînată).

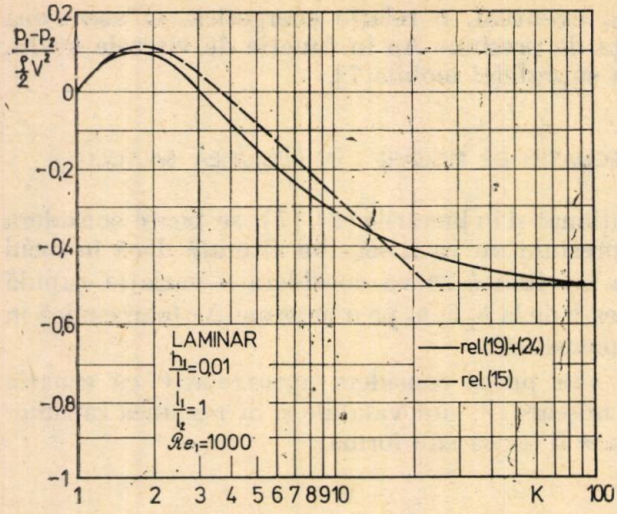


Fig. 3. — Saltul de presiune în dreptul treptei.

UTILIZAREA ECUAȚIEI ENERGIEI PENTRU ZONA SALTULUI

O a doua cale posibilă de deducere a unei legături între parametrii mișcării înainte și după salt este să se scrie o ecuație a energiei în sens mecanic pentru regiunea saltului așa cum se sugerează în lucrarea [11]. Astfel în cazul mișcării bidimensionale, pentru rapoarte K nu prea mari (modelul scurgerii din fig. 2*a*), ecuația energiei înainte și după treaptă se poate scrie, dacă se neglijează contribuția termenilor de frecare în dreptul treptei,

$$\left[\int_0^h u\left(\frac{\rho u^2}{2}+p\right)\mathrm{d}y\right]_1=\left[\int_0^h u\left(\rho\frac{u^2}{2}+p\right)\mathrm{d}y\right]_2 \tag{17}$$

și ținînd seama de continuitatea debitului, rezultă

$$\Delta p=p_1-p_2=\frac{\rho}{2Q}\left\{\left[\int_0^h u^3\,\mathrm{d}y\right]_2-\left[\int_0^h u^3\,\mathrm{d}y\right]_1\right\}. \tag{18}$$

Ecuația energiei (17) are avantajul că nu se cer informații despre distribuția de presiuni pe față verticală 1—2.

În cazul scurgerii laminare, integralele din relația (18) pot fi calculate direct admițînd o distribuție de viteze parabolică, imediat înainte și după treaptă. Rezultă în acest fel, pentru saltul de presiune Δp, expresia

$$\Delta p=\frac{\rho V^2}{2}\frac{6}{35}\left(1-\frac{h_2}{h_1}\right)\left[\left(1+\frac{h_2}{h_1}\right)\left(\frac{3Q}{Vh_2}\right)^3-\left(\frac{3Q}{Vh_2}\right)^2-\frac{h_1}{h_2}\right]\left(\frac{Vh_2}{3Q}\right), \tag{19}$$

care poate fi folosită atît timp cît

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h_1}\leqslant 0,\quad Q\geqslant\frac{Vh_1}{3}. \tag{20}$$

Atunci cînd condițiile (20) nu mai sînt îndeplinite, adică pentru valori K mari, cînd apare o mișcare cu scurgere inversată (modelul din fig. 2*b*), ecuația energiei trebuie aplicată pe o arie de control $ABCC'A'$ (fig. 2*b*). În acest caz neglijarea frecării pe suprafața $A'C'$ este compensată de frecarea pe suprafața AB, astfel că eroarea va fi mai mică.

În consecință, se poate acum scrie

$$\left[\int_0^{\xi h} u\left(\frac{\rho u^2}{2}+p\right)\mathrm{d}y\right]_1=\left[\int_0^{h} u\left(\frac{\rho u^2}{2}+p\right)\mathrm{d}y\right]_2, \tag{21}$$

unde necunoscuta în plus ξ rezultă din

$$\left[\int_0^{\xi h} u\,\mathrm{d}y\right]_1=\left[\int_0^{h} u\,\mathrm{d}y\right]_2=Q. \tag{22}$$

Pentru regim laminar, de exemplu, utilizînd profilul parabolic de viteze, rezultă în primul rînd

$$\xi=\frac{Q}{Vh_1}\frac{1}{1-\dfrac{2Q}{Vh_1}} \tag{23}$$

și saltul de presiune Δp,

$$\begin{aligned}\Delta p=\frac{\rho V^2}{2}\Bigg\{&\frac{1}{\bar{Q}}\left[\frac{1}{2}+\frac{9}{10}(\bar{Q}-1)+\frac{9}{10}(\bar{Q}-1)^2+\frac{27}{70}(\bar{Q}-1)^3\right]-\\&-\left[\frac{1}{1-\dfrac{\bar{Q}}{K}}\left(1-\frac{9}{4}\frac{\bar{Q}}{K}+\frac{9}{4}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^2-\frac{27}{32}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^3\right)-\right.\\&-\frac{\dfrac{3}{4}\dfrac{\bar{Q}}{K}}{\left(1-\dfrac{\bar{Q}}{K}\right)^2}\left(1-3\frac{\bar{Q}}{K}+\frac{27}{8}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^2-\frac{27}{20}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^3\right)+\\&+\frac{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\bar{Q}}{K}\right)^2}{\left(1-\dfrac{\bar{Q}}{K}\right)^3}\left(1-\frac{27}{8}\frac{\bar{Q}}{K}+\frac{81}{20}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^2-\frac{27}{16}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^3\right)+\\&\left.+\frac{\dfrac{1}{32}\left(\dfrac{\bar{Q}}{K}\right)^3}{\left(1-\dfrac{\bar{Q}}{K}\right)^4}\left(1-\frac{18}{5}\frac{\bar{Q}}{K}+\frac{27}{6}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^2-\frac{27}{14}\left(\frac{\bar{Q}}{K}\right)^3\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{24}$$

unde

$$\bar{Q} = \frac{2Q}{Vh_2}, \qquad K = \frac{h_1}{h_2}. \tag{25}$$

O tratare absolut asemănătoare poate fi făcută pentru regimul turbulent prin integrare numerică.

O comparație între rezultatele obținute prin folosirea relației simple (16) și ecuația energiei (19) și (24) este dată în figura 3. Se poate observa că formula simplă (16) poate fi folosită pentru toate cazurile practice, deoarece cele două metode dau rezultate comparabile pînă la o valoare destul de mare a lui K ($K \sim 20$ pentru cazul din fig. 3). Pentru valori și mai mari ale raportului K, saltul de presiune poate fi considerat $\Delta p \sim -0{,}5$, aceasta fiind de fapt și limita către care trebuie să tindă valoarea saltului [7]. O concordanță și mai apropiată între cele două metode este de presupus pentru regim turbulent.

În continuare, pentru verificarea relațiilor analitice sînt prezentate în figura 4 rezultate experimentale [7] în comparație cu valorile teoretice

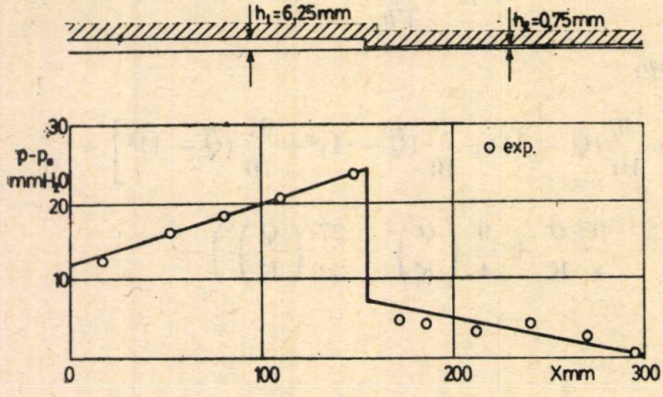


Fig. 4. — Distribuția de presiune pentru un lagăr în trepte.

obținute utilizînd expresia (16) pentru calculul saltului Δp. Pentru condiții la limită s-au utilizat valorile presiunilor la intrare și ieșire rezultate din experiență.

4. CONDIȚIILE DE INTRARE

Așa cum s-a arătat mai înainte, cînd forțele de inerție devin importante, presiunea la intrarea p_e va fi diferită de presiunea atmosferică p_a (fig. 5). În plus, asemănător cu intrarea la conducte, se poate aștepta la o formare de tip strat limită pe o zonă AB, pentru care profilul de viteză și distribuția de presiuni vor fi diferite de cele tipice pentru lubrificație. Pentru a se obține rezultate suficient de simple utilizabile în aplicațiile inginerești se poate considera că scurgerea de tip lubrificație se formează foarte aproape de intrare, încă de la punctul A' (fig. 5) spre exemplu.

Atunci, pentru zona $A'B$ distribuția de presiuni trebuie să fie înlocuită cu una fictivă. Presiunea p'_e, care va fi utilizată ca o condiție la limită, poate fi mai mare decît p_e așa cum se arată în figura 5 sau mai mică în cazul scurgerilor de tip Poiseuille.

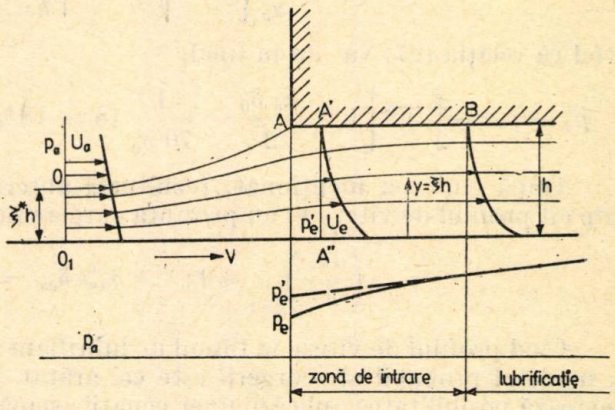


Fig. 5. — Scurgerea la intrare, fără întoarcere.

Relații empirice pentru presiunea de intrare p'_e au fost propuse în lucrările [3], [12]. Mai recent, C.H.T. Pan [11] a făcut un studiu interesant pentru a explica creșterea presiunii de intrare cu rezultate aplicabile pentru curgeri care nu implică întoarcerea curentului în film.

Considerînd un profil de viteze cunoscut al curgerii de intrare $u_a(\xi)$, de exemplu unul liniar,

$$u_a = V(1 - \alpha_a \xi); \qquad \xi = \frac{y}{h}, \tag{26}$$

unde h este grosimea filmului la intrare.

Dacă profilul de viteze al scurgerii în filmul de lubrifiant nu prezintă întoarcere, modelul curgerii poate arăta ca în figura 5. Considerînd un volum de control $O_1 O A A'A''$ și aplicînd teorema energiei, se obține

$$h \int_0^{\xi^*} u_a \left(\rho \frac{u_a^2}{2} + p_a \right) \mathrm{d}\xi = h \int_0^1 u_e \left(\rho \frac{u_e^2}{2} + p'_e \right) \mathrm{d}\xi, \tag{27}$$

unde s-a neglijat lucrul mecanic al tensiunilor de frecare în ipoteza că secțiunile $O_1 O$ și $A'A''$ sînt suficient de aproape așa fel ca această aproximație să poată fi făcută.

Ecuația de continuitate este

$$Q = \frac{Vh}{2} \delta_0 = h \int_0^1 u_e \, \mathrm{d}\xi = h \int_0^{\xi^*} u_a \, \mathrm{d}\xi. \tag{28}$$

Pentru scurgerea laminară, profilul de viteze u_e poate fi aproximat ca și mai înainte printr-unul parabolic, și ținînd seama de relația (26), se obține din (28)

$$\xi^* = \frac{1}{\alpha_a}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2Q\,\alpha_a}{Vh}}\right], \tag{29}$$

astfel că relația (27) va da în final,

$$p'_e - p_a = \frac{\rho}{2} V^2 \left[1 - \frac{\alpha_a\,\delta_0}{2} - \frac{1}{70\,\delta_0}(8 + 18\delta_0 - 18\,\delta_0^2 + 27\delta_0^3)\right]. \tag{30}$$

După cum s-a menționat, rezultatul anterior (30) este corect atîta timp cît profilul de viteze u_e nu prezintă curgere inversată, adică

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi}\right)_{\xi=1} \leqslant 0\,; \qquad \delta_0 \geqslant \delta_{0s} = \frac{2}{3}. \tag{31}$$

Cînd profilul de viteze în filmul de lubrifiant prezintă curgere inversată, modelul probabil al scurgerii este cel arătat în figura 6. Acest model sugerează posibilitatea aplicării unei ecuații asemănătoare cu (27) dar pe un volum de control $O_1 O F F' A''$ sau pe un volum $O_1 O F G G' A A' F' A''$. În primul caz rezultă că debitul total ce intră în film va fi

$$Q_i = Q + |Q_r|, \tag{32}$$

unde Q_r este debitul curgerii inversate, care, pentru regim laminar, va fi

$$|Q_r| = h\int_{\xi_r}^{1} u_e\,\mathrm{d}\xi = \frac{(2 - 3\,\delta_0)^3}{54(1 - \delta_0)^2}\,; \quad \xi_r = \frac{1}{3(1 - \delta_0)} \tag{33}$$

și în funcție de debitul adimensional δ_0, debitul total de intrare va fi

$$Q_i = \frac{8 - 9\,\delta_0}{54(1 - \delta_0)^2}\,Vh, \tag{34}$$

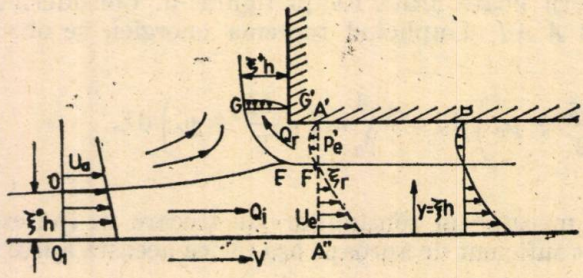


Fig. 6. — Scurgerea la intrare, cu întoarcere.

iar grosimea ξ^* rezultă din

$$Q_i = Vh\int_0^{\xi^*}(1 - \alpha_a\xi)\,\mathrm{d}\xi = Vh\left(\xi^* - \frac{\alpha_a}{2}\,\xi^{*2}\right). \tag{35}$$

Ecuația energiei asemănătoare cu (27) poate fi scrisă ca,

$$h\int_0^{\xi^*} u_a\left(\rho\frac{u_a^2}{2}+p_a\right)\mathrm{d}\xi = h\int_0^{\xi_r} u_e\left(\rho\frac{u_e^2}{2}+p_e'\right)\mathrm{d}\xi \tag{36}$$

și va rezulta în final

$$p_e'-p_a=\frac{\rho V^2}{2}\left\{1-\alpha_a\frac{8-9\delta_0}{54(1-\delta_0)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6(1-\delta_0)^2(8-9\delta_0)}\left[27(1-\delta_0)^3-\frac{27}{5}(1-\delta_\theta)^2+\frac{3}{5}(1-\delta_0)-\frac{1}{35}\right]\right\}. \tag{37}$$

Dacă se aplică ecuația energiei pe volumul de control $O_1\,O\,F\,G\,G'A'\,A''$ și se neglijează pierderile în jurul colțului A, se obține același rezultat (37).

Rezultatele astfel obținute pentru regim laminar sînt prezentate în figura 7*a*, pentru cele două cazuri $\delta_0 \geqslant \delta_{0s}$ și $0 \leqslant \delta_0 \leqslant \delta_{0s}$.

Acest procedeu poate fi extins pentru orice profil de viteze al curgerii de sosire precum și pentru regim turbulent.

La regimul turbulent, dacă se consideră un profil de viteze oarecare u_a pentru curgerea de sosire, relațiile pentru cele două situații fără sau cu scurgere inversată vor fi,

$$p_e'-p_a=\frac{\rho V^3 h}{2Q}\left[\int_0^{\xi^*}\bar{u}_a^3\,\mathrm{d}\xi-\int_0^1\bar{u}_e^3\,\mathrm{d}\xi\right];\quad \delta_0\geqslant\delta_{0s},$$

$$p_e'-p_a=\rho\frac{V^3 h}{2Q_i}\left[\int_0^{\xi^*}\bar{u}_a^3\,\mathrm{d}\xi-\int_0^{\xi_r}\bar{u}_e^3\,\mathrm{d}\xi\right];\quad 0\leqslant\delta_0\leqslant\delta_{0s}, \tag{38}$$

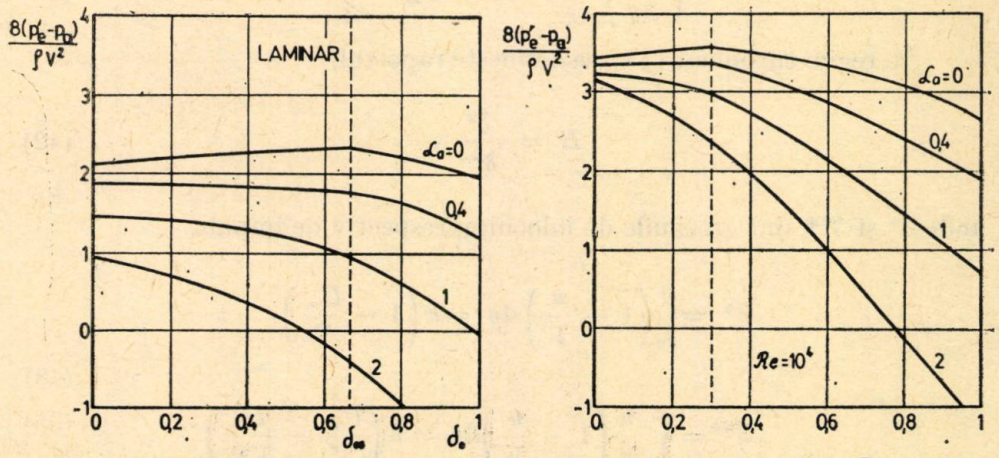


Fig. 7. — Presiunea la intrare, ca o funcție de debit : *a*) laminar ; *b* turbulent $\mathcal{R}e = 10^4$.

iar integralele care apar trebuie calculate numeric. Ca un exemplu se prezintă în figura 7 *b* rezultate obținute pentru regim turbulent cu $\mathcal{R}e = 10000$ și aceeași expresie (26) pentru profilul de viteze al scurgerii de sosire.

5. CONDIȚII DE IEȘIRE

După cum se știe, filmele lichide sînt supuse ruperii sau cavitației în zonele divergente. În cazul fără forțe de inerție, aceste efecte sînt luate în considerație fie prin înlocuirea distribuției de presiuni teoretice cu $p = p_c$, în zona unde aceasta este mai mică decît cea de cavitație ($p < p_c$) sau, mai corectă, impunînd condiții de tipul

$$p = p_c; \quad \frac{dp}{dx} = 0, \tag{39}$$

iar în cazul cînd apare rupere a filmului (cînd filmul poate fi în contact direct cu mediul înconjurător) presiunea p_c este înlocuită cu presiunea atmosferică p_a.

În cazul lubrificației, ținînd seama de forțele de inerție, aceste efecte pot de asemenea apărea, iar condițiile care trebuie impuse cer o mai atentă analiză. Presupunînd, din motive de continuitate, un profil de viteze Couette în regiunea de rupere, condiția

$$U_m = \frac{V}{2} \tag{40}$$

este mai indicată în locul ultimei condiții (39). Dealtfel, condițiile (40) și (39) devin identice pentru curgere fără forțe de inerție.

În plus, lubrificația cu forțe de inerție poate fi supusă unor efecte asemănătoare desprinderii stratului-limită, în special pentru filme de gaz. Atunci, condiția de separare pentru regim laminar va fi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} = 0; \quad U_m = \frac{V}{3}. \tag{41}$$

În regim turbulent [13], se definește raportul,

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}, \tag{42}$$

unde δ^* și δ^{**} sînt grosimile de înlocuire, respectiv de impuls,

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^h \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy = h\left(1 - \frac{U_m}{V}\right), \\ \delta^{**} &= \int_0^h \frac{u}{V}\left(1 - \frac{u}{V}\right) dy = h\left(\frac{U_m}{V} - \frac{I_{xx}}{V^2 h}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Ținînd seama de expresiile (4) și (5), parametrul H rezultă ca

$$H = (1 - \bar{U}_m)\left[\bar{U}_m - \bar{U}_m^2 - \frac{0{,}885}{\mathcal{R}e_2^{0{,}367}\,\bar{h}^{0{,}367}}\right]^{-1}. \tag{44}$$

Experiențe de strat-limită arată că separarea apare pentru o valoare certă $H = H_s$. Schlichting recomandă [13] $H_s = 1{,}8 - 2{,}4$, dar în alte lucrări [14] se menționează valori pînă la $H_s = 3$. Experiențe făcute de autori [10] pentru lubrificație cu film de aer au sugerat,

$$H_s = 2{,}69, \tag{45}$$

valoare apropiată de cele folosite în teoria stratului-limită turbulent.

Folosind expresiile (44) și (45) rezultă condiția pentru viteza medie $\bar{U}_{ms}$ la punctul de separare,

$$\bar{U}_{ms} = 0{,}186\left[3{,}69 - \sqrt{2{,}856 - \frac{25{,}6}{\mathcal{R}e_2^{0{,}367}\,\bar{h}_s^{0{,}367}}}\right]. \tag{46}$$

6. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

S-au făcut experiențe [10] pentru o geometrie arătată în figura 8 folosind aer ca lubrifiant. Suprafața în mișcare este un cilindru de diametru 1,004 m și lățime 0,25 m. Placa fixă a fost curbată pentru a simula curgerea între suprafețe paralele, avînd o protuberanță semicilindrică cu raza de 20 mm. Viteza maximă a suprafeței mobile a fost de 40 m/s. Sistemul a fost etanșat lateral pentru a simula scurgerea bidimensională (longitudinală). Un exemplu de distribuție de presiuni tipică obținută experimental este arătată în figura 9. Se poate observa că toate particularitățile menționate anterior sînt puse în evidență de aceste experiențe. Pentru a putea trasa teoretic distribuția de presiuni s-a determinat de asemenea experimental profilul de viteze al curgerii de sosire necesar calculării presiunii la intrare. Atunci calculul poate fi făcut în modul următor:

a) Presiunea la intrare este dată de una din ecuațiile (38).

b) Pentru regiunea $x < 0$, cu grosimea filmului constantă, va exista distribuția de presiuni liniară (fără forțe de inerție, $dh/dx = 0$).

c) În regiunea protuberanței, distribuția de presiuni va fi dată de ecuația (9) pînă la punctul de separare.

d) Se presupune că începe separarea de la $x = x_s$, $h = h_s$ conform condiției (46).

e) După separare se presupune, pentru o zonă relativ mică $x_s < x < 2r$, grosimea filmului constantă $h = h$ și distribuția de presiuni va fi din nou liniară (fără forțe de inerție). Se pune condiția la limită

$$p = p_{ex} \text{ pentru } x = 2r, \tag{47}$$

unde p_{ex} este presiunea măsurată experimental după protuberanță.

f) Bazat pe observațiile experimentale, se presupune presiunea constantă $p = p_{ex}$ pentru regiunea următoare după separare $x > 2r$, deși spre ieșire presiunea tinde rapid la $p = p_a$ (fig. 9).

Setul anterior de ecuații este suficient pentru a putea trasa distribuția de presiuni. O comparație completă este arătată în figura 9. și se poate vedea că concordanța este suficient de bună. Singura mărime necalculată teoretic a fost p_{ex} în zona după protuberanță. Această necunoscută poate fi eventual determinată cercetînd forma stratului-limită după protuberanță, creșterea sa în grosime și modul în care condiția la limită $p = p_a$ poate fi atinsă la ieșire. De exemplu, se vede din figura 9 că stratul-limită atinge suprafața fixă după o lungime de circa cinci ori raza protuberanței și apoi presiunea tinde către presiunea atmosferică. Ordinul de mărime al diferenței $p_a - p_{ex}$ va fi energia cinetică a curgerii după separare distribuită pe întreaga grosime h_1,

$$p_a - p_{ex} \sim \frac{\rho}{2} U_{ms}^2 \frac{h_s}{h_1}. \tag{48}$$

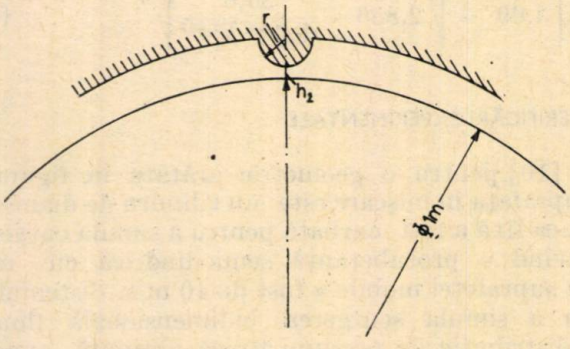


Fig. 8. — Modelul experimental pentru o scurgere între suprafețe paralele cu o protuberanță circulară.

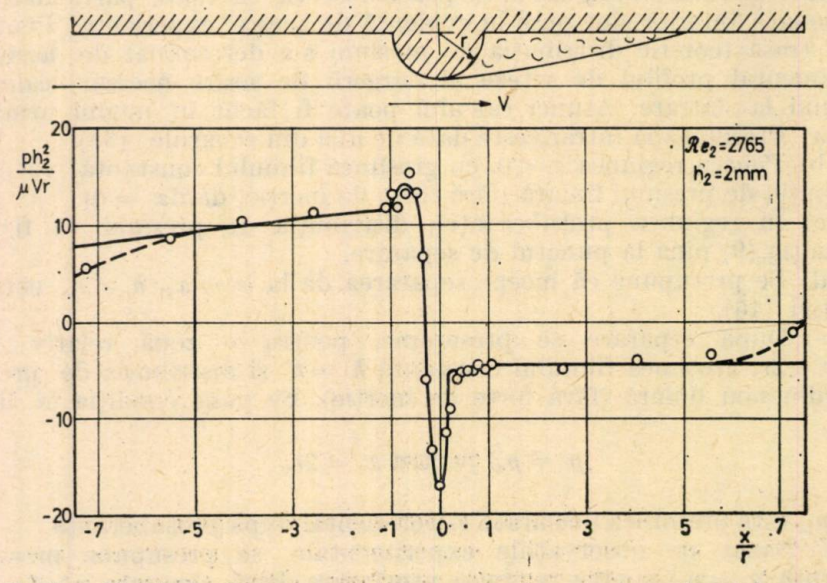


Fig. 9. — Distribuția de presiuni pentru o scurgere în prezența unei protuberanțe cilindrice.

De exemplu, în cazul experimental din figura 9, relația (48) dă $p_a - p_{ex} = 10$ N/m², în timp ce din figura 9 rezultă $p_a - p_{ex} = 7{,}2$ N/m². În realitate, trebuie făcută o analiză mai atentă aplicînd teorema energiei la regiunea de separare.

7. EFECTE DINAMICE

În lubrificația nestaționară [1], [15], apar efecte dinamice suplimentare datorită forțelor de inerție convective și termenilor de forma $\rho\, \partial u/\partial t$, $\rho\, \partial w/\partial t$ din ecuațiile de mișcare (efect al masei filmului de lubrifiant). Dacă peste soluția scurgerii staționare se suprapune numai o vibrație de mică amplitudine se obține un sistem liniar cu ajutorul căruia se poate determina răspunsul dinamic. Calitativ, forțele de inerție convective micșorează rigiditatea și duc la o creștere a amortizării filmului. O scădere suplimentară a rigidității este dată de forțele de inerție dependente direct de timp. Ordinul de mărime al acestui ultim efect este

$$\Delta K_r = -\frac{\rho\, \nu\, h^e_{m0}}{\mu\, (k_x)_0} B, \tag{49}$$

unde ν este frecvența oscilațiilor de amplitudine mică, B — forța de amortizare, în timp ce h_{m0}, $(k_x)_0$ sînt valorile medii pentru grosimea filmului și parametrul k_x. Cum B este proporțional cu ν, rezultă $\Delta K_r \sim \nu^2$ astfel că oscilații de frecvență mare pot duce chiar la rigiditate negativă.

8. CONCLUZII

Concluzia importantă care poate fi arătată este că filmele fluide lucrînd la numere Reynolds mari sînt supuse nu numai fenomenelor de tranziție și turbulență dar și efectelor de inerție. Prin urmare, cînd se proiectează lagăre funcționînd la numere Reynolds mari cu ajutorul metodelor ce nu țin seama de forțele de inerție, se poate înțelege că sînt introduse unele erori. Cum în momentul actual procedee numerice de calcul care să includă atît efectele tranziției, turbulenței și inerției nu există (sau sînt foarte greu de utilizat din cauza timpului de calculator prea mare sau capacității prea mari necesare a calculatorului), este foarte important de a putea măcar cunoaște calitativ efectele forțelor de inerție și de a evalua ordinul de mărime al acestor efecte. În lucrare sînt tocmai puse în evidență aceste efecte și sînt deduse relații simple pentru evaluarea lor.

Primită la redacție la 11 septembrie 1976

NOTAȚII

k_x, k_z — parametri depinzînd de numărul Reynolds,

$\bar{\tau}_c = \dfrac{h\tau_c}{\mu V}$ — tensiune de frecare adimensională Couette,

$\tau_{0,h}$ — tensiuni de frecare pe cele două suprafețe,
I_{xx}, I_{xz}, I_{zz} — integrale de impuls după grosimea filmului,
K_r — rigiditate,
B — forță de amortizare,
u, v, w — componentele vitezei locale,
x, y, z — coordonatele,
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — coeficienți, eventual depinzînd de numărul Reynolds pentru regim turbulent.
α_a — panta profilului de viteze de sosire,
V — viteza suprafeței mobile,
U_m, W_m — viteze medii după grosimea filmului,
$\bar{U}_m = \frac{U_m}{V}$ — viteza medie adimensională,
Q — debit,
Q_i — debit total de intrare,
Q_r — debitul scurgerii inversate,
$\bar{Q} = \frac{2Q}{Vh_2}$ — debit adimensional,
$\delta_0 = \frac{2Q}{Vh}$ — debit adimensional,
δ_{0s} — valoare a lui δ_0 cînd $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)_{y=h} = 0$,
h — grosimea filmului,
h_2 — grosimea minimă a filmului,
$\bar{h} = \frac{h}{h_2}$ — grosimea filmului adimensional,
$\xi = \frac{y}{h}$ — distanța adimensională de la suprafața mobilă,
r — raza protuberanței,
p — presiune,
ρ — densitate,
μ — viscozitate,
$\mathcal{R}e = \frac{\rho V h}{\mu}$ — număr Reynolds,
$\mathcal{R}e_2 = \frac{\rho V h_2}{\mu}$ — număr Reynolds bazat pe grosimea minimă a filmului.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *On the Influence of the Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self-Acting Films*, Journal of Lubrication Technology. Trans. ASME, Series F, **93**, *3*, 473–481 (1970).
2. V. N. Constantinescu, S. Gălețușe *On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of the Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **96**, *1*, 69–77 (1974).

3. A. I. Smalley, I. H. Vohr, V. Castelli, C. Wachmann, *An Analytical and Experimental Investigation of Turbulent Flow in Bearing Films Including Convective Fluid Inertia Forces*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **96**, *1*, 151—157 (1974).
4. R. A. Burton, *Approximations in Turbulent Film Analysis*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **96**, *1*, 103—109 (1974).
5. J. M. Redecliff, J. H. Vohr, *Hydrostatic Bearings for Cryogenic Rocket Engine Turbopumps*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **91**, *3*, 557—575 (1969).
6. C. M. Taylor, D. Dowson, *Turbulent Lubrication Theory-Application to Desing*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **96**, *1*, 36—46 (1974).
7. V. N. Constantinescu, S. Gălețușe, *Pressure Drop Due to Inertia Forces in Step Bearing*, Conference on Turbulent Lubrication, INSA, Sept. 1975.
8. V. N. Constantinescu, *On the Influence of Inertia Forces in Hydrostatic Turbulent Lubrication*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **XVIII**, *2*, 283—310 (1973).
9. S. Gălețușe, *Un tip ipotetic de curgere visco-inerțială*, St. cerc. mec. apl., **32**, *6*, 1163—1178 (1973).
10. V. N. Constantinescu, S. Gălețușe, F. Kennedy, *On the Comparasion Between Lubrication Theory, Including Turbulence and Inertia Forces, and Some Existing Experimental Data*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, 74-Lub.-26.
11. C. H. T. Pan, *Calculation of Pressure, Shear and Flow in Lubricating Film for High-Speed Bearings*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **96**, *1*, 80—94 (1974).
12. R. A. Burton, J. H. Carper, *An Experimental Study of Annular Flows with Applications in Turbulent Film Lubrication*, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F, **89**, *3*, 381—389 (1967).
13. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Springer, Berlin, 1960.
14. W. D. Mc Nolly, *Fortran Program for Calculating Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layer in Arbitrary Pressure Gradients*, NASA-TND-5683, 1970.
15. V. N. Constantinescu, *Dynamic Inertia Effects in Turbulent Lubrication*, Conference on Turbulent Lubrication, INSA-Lyon, sept. 1975.

STUDIUL PRIN SIMILITUDINE AL CURGERILOR CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ CU PAT MOBIL PE MODEL DISTORSIONAT

de JULIETA FLOREA și VALERIU PANAITESCU

Institutul politehnic București

Se propune un model pentru studiul prin similitudine al curgerilor cu suprafață liberă cu pat mobil. Modelarea propusă este fundamentată pe principiile teoriei similitudinii, pe baza analizei ecuațiilor diferențiale ale curgerii și a folosirii principiilor de analiză dimensională. Stabilirea criteriilor de similitudine se realizează pornind de la ecuațiile de mișcare, iar alegerea materialului, care constituie patul mobil al modelului, se face impunînd respectarea condițiilor de similitudine a pierderilor de sarcină și de similitudine a vitezelor de început de antrenare.

1. INTRODUCERE

Proiectarea și exploatarea rațională a obiectivelor hidrotehnice construite pe rîuri cu albii erodabile, cu transport solid neneglijabil, ridică probleme a căror rezolvare nu poate fi dată teoretic pe baza actualelor cunoștințe de hidrodinamică și teoria aluviunilor, impunîndu-se cercetarea pe modele a unui șir de fenomene. Majoritatea acestor fenomene sînt deosebit de complicate, incluzînd probleme spațiale de dinamica rîurilor. Modelarea dă o imagine calitativă suficient de completă a curgerilor cu suprafață liberă cu pat mobil și, la fundamentare corespunzătoare, o evaluare cantitativă satisfăcătoare.

Modelarea trebuie fundamentată pe principiile teoriei similitudinii, pe baza analizei ecuațiilor diferențiale ale curgerii și a folosirii principiilor de analiză dimensională.

2. DISTORSIUNEA GEOMETRICĂ A MODELULUI

Una din condițiile de bază de similitudine a două fenomene este similitudinea geometrică între model și natură. Există însă cazuri în care posibilitățile de realizare practică a modelului impun cu necesitate unele abateri de la similitudinea geometrică, realizîndu-se modele distorsionate sau deformate.

În studiul prin similitudine al curgerilor în rîuri, folosirea modelelor distorsionate este practic obligatorie. Acest lucru poate fi demonstrat arătînd imposibilitatea realizării pe model nedistorsionat a egalității coeficienților de rezistență din laborator și din natură. Astfel, după experiențele lui A. P. Zegjda [1], rugozitatea echivalentă a modelelor de beton este dată de valoarea $k_1=0{,}75$ mm, iar pentru betoane turnate foarte îngrijit, cu cofraje metalice, de valoarea $k_2 = 0{,}6-0{,}65$ mm ; pentru adîn-

cimi de ordinul a 5—10 cm, obişnuite pentru modele de rîuri, raportul dintre raza hidraulică şi rugozitatea echivalentă, R/k, are ordinul de mărime 80—160, ceea ce corespunde valorii coeficientului lui Chézy, $C = 57—53$, sau valorii coeficientului pierderilor liniare de sarcină, $\lambda = 0{,}006—0{,}008$. În natură există numeroase rîuri cu pat cu nisip de granulaţie relativ mică, mîlos, cu depuneri de aluviuni care netezesc albia sau rîuri cu patul argilonisipos (situaţie întîlnită la multe rîuri din ţară, mai ales pe cursurile mijlocii şi inferioare [2]). În aceste condiţii, $C = 65—80$ şi $\lambda = 0{,}0035—0{,}005$ (adică modelul prezintă un coeficient λ de 1,5—2,0 ori mai mare). Prin urmare, pentru astfel de rîuri, modelele nedistorsionate de beton, chiar foarte netede, prezintă o rezistenţă hidraulică mărită, ceea ce duce la nerespectarea similitudinii. În practică, în astfel de situaţii, se recurge la realizarea modelelor distorsionate, construite după o scară în plan orizontal şi după altă scară, mai mare, în plan vertical. Dacă modelul ar fi construit cu respectarea riguroasă a similitudinii geometrice, adîncimea apei pe model ar fi prea mică, ceea ce ar îngreuna mult experienţele şi în plus ar trebui să se ţină seama şi de influenţa viscozităţii şi, chiar, a tensiunii superficiale.

Folosirea modelelor distorsionate îndepărtează dificultăţile semnalate.

3. STABILIREA CRITERIILOR DE SIMILITITUDINE ŞI ANALIZA LIMITELOR DISTORSIUNII GEOMETRICE

Dintre metodele cunoscute în literatură de determinare a criteriilor de similitudine se consideră indicată metoda care se bazează pe considerarea independenţei structurii ecuaţiei de mişcare de scara mărimilor fizice care intră în ecuaţii.

Teorema impulsului aplicată unei mase m de fluid de lungime dx care se deplasează cu viteza $\boldsymbol{v}$ într-un canal (rîu) se scrie sub forma

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \Sigma \boldsymbol{F}_e, \tag{1}$$

în care $\Sigma \boldsymbol{F}_e$ se compune din forţa gravitaţională şi forţa de frecare, considerată — pentru simplificare — doar la pereţii canalului. Se adoptă un sistem rectangular de axe, cu axa x orientată în sensul curgerii, în lungul

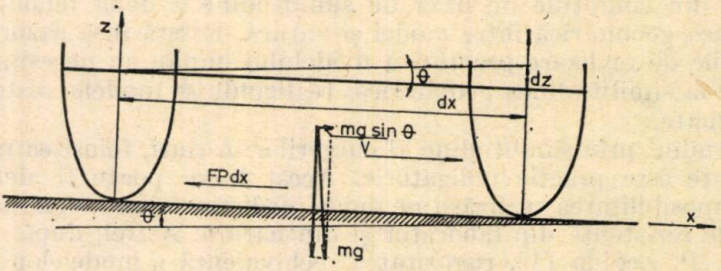


Fig. 1

talvegului (fig. 1) şi se notează cu A — secţiunea transversală a curentului, cu P — perimetrul udat al secţiunii A, cu F — forţa de frecare pe unitatea

de suprafață și cu α — unghiul dintre axa x și orizontală. Se proiectează ecuația (1) pe axa x și rezultă

$$m\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = mg \sin \alpha - FP\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Se împarte această ecuație cu $m = \rho A\mathrm{d}x$ și se ține seama de expresiile razei hidraulice $R = \frac{A}{P}$ și a forței de frecare $F = f\frac{v^2}{2}$ (unde f este coeficientul de frecare); se obține ecuația de mișcare

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{f}{2}\frac{v^2}{R}. \tag{3}$$

Trecînd de la fenomenul pe model descris de ecuația (3) la fenomenul din natură, fiecare mărime fizică se multiplică de un număr de ori, de exemplu lungimile orizontale de k_x ori, lungimile verticale de k_z ori, vitezele de k_v ori etc. Fenomenul din natură fiind descris de o ecuație cu aceeași structură, rezultă șirul de egalități

$$\frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_x} = \frac{k_g k_z}{k_x}\frac{k_f k_v^2}{k_R}, \tag{4}$$

care conduce la stabilirea criteriilor de similitudine.

Din egalarea raportului al doilea cu al treilea și cu primul rezultă relațiile

$$\frac{k_v^2}{k_g k_z} = 1, \quad \frac{k_v k_t}{k_x} = 1 \tag{5}$$

care corespund criteriilor de similitudine Froude și Strouhal.

Stabilindu-se scările k_x și k_z, deci implicit și raportul de distorsiune

$$\delta = \frac{k_z}{k_x}, \tag{6}$$

din criteriile (5) rezultă scările pentru vitezele orizontale și pentru timp (în ipoteza $k_g = 1$):

$$k_v = k_z^{1/2}, \quad k_t = k_x k_z^{-1/2}. \tag{7}$$

Cu ajutorul relațiilor (7) se pot stabili și celelalte scări care interesează, de exemplu scara presiunilor $k_p = k_z$ (în ipoteza $k_\rho = 1$), scara debitelor $k_Q = k_x k_z^{3/2}$ etc.

Din expresia pantei $I = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, rezultă

$$k_I = \frac{k_z}{k_x}, \tag{8}$$

ceea ce arată că scara pantelor este egală cu raportul de distorsiune și, prin urmare, panta pe un model distorsionat crește odată cu distorsiunea modelului.

Este necesar să se efectueze o analiză a limitelor distorsiunii geometrice. În literatură se recomandă pentru raportul de distorsiune (6) valori cuprinse între 1 : 3 și 1 : 10; în mod excepțional acesta poate să scadă pînă la 1 : 25, [3], [4]. De exemplu, pentru modele de rîuri se poate lua $k_z = 100$ și $k_x = 1000$ și rezultă $\delta = 1 : 10$. Raportul de distorsiune nu se poate adopta oricît de mic, existînd o limită a distorsiunii geometrice care se impune modelului pentru a-i asigura o funcționare satisfăcătoare.

Din egalarea rapoartelor al doilea și al patrulea din șirul de egalități (4), considerînd $k_R \cong k_z$ (pentru albiile late de formă dreptunghiulară $R \cong h$, iar pentru cele de formă parabolică $R \cong \frac{2}{3} h$), rezultă

$$k_f = \frac{f}{f_m} \cong \frac{k_z}{k_x} = \delta, \tag{9}$$

deci k_f este aproximativ egal cu raportul de distorsiune. Coeficientul de frecare pe model f_m crește într-o oarecare măsură atunci cînd distorsiunea crește, deoarece odată cu distorsiunea crește atît turbulența, cît și formarea de remuuri (crescînd panta I). Coeficientul f_m nu poate crește însă oricît de mult și deci există o limită a distorsiunii modelului, necesară pentru funcționarea corespunzătoare a acestuia.

Distorsiunea geometrică a modelului este necesară de fiecare dată cînd dimensiunile verticale ale fenomenului sînt mici în raport cu dimensiunile orizontale, deci componentele verticale ale vitezelor sînt mici față de componentele orizontale. Prin urmare se neglijează influența componentelor verticale și se consideră că viteza se reduce doar la componenta sa orizontală. Trebuie remarcat însă că local această aproximație nu poate fi considerată totdeauna satisfăcătoare, de exemplu dacă există praguri deversante (al căror coeficient de debit este influențat într-o oarecare măsură de distorsiune).

Pe baza acestei analize se consideră că este indicat să se adopte pentru raportul de distorsiune valori cuprinse între 1 : 2 și 1 : 8.

4. STABILIREA RELAȚIILOR HIDRODINAMICE PENTRU ALEGEREA MATERIALULUI PATULUI MOBIL AL MODELULUI

Studiul pe model al curenților în albii deschise se poate face pe modele cu pat fix sau cu pat mobil. Modelele cu pat mobil sînt absolut necesare în studiul problemelor la care aspectul morfologic al procesului este important, de exemplu în studiul fenomenelor de eroziune, de transport de aluviuni și de sedimentare a acestora.

Alegerea materialului care constituie patul mobil al modelului este o operație delicată. Caracteristicile geometrice și fizice ale materialului aluvionar pe model trebuie așa fel alese, încît antrenarea lui să se producă la viteze și niveluri corespunzătoare celor din natură, creșterea debitului solid în raport cu debitul de apă să fie asemenea pe model și în natură, iar coeficientul de scară al timpului morfologic să fie rațional pentru ca durata de desfășurare a fenomenului pe model să nu fie prea îndelungată.

Materialele care constituie patul mobil al modelului trebuie să respecte două condiții : similitudinea pierderilor de sarcină și similitudinea vitezelor de început de antrenare ; în acest fel se deduc legile care permit determinarea dimensiunilor și naturii acestor materiale.

4.1. *Similitudinea pierderilor de sarcină.* Expresia vitezei medii a curentului se deduce din formula lui A. de Chézy, $V = C\sqrt{RJ}$, în care coeficientul C este dat de formula lui R. Manning, $C = \frac{1}{n} R^{1/6} = KR^{1/6}$,

$$V = KR^{2/3}J^{1/2}. \tag{10}$$

Pentru coeficientul K se propune folosirea formulei lui A. Strickler

$$K = \frac{A}{D^{1/6}}, \tag{11}$$

A este o constantă (egală cu 26, după A. Strickler, sau avînd diferite valori în jurul acesteia, în funcție de natura și forma materialului solid, de exemplu în conformitate cu A. Schoklitsch [5]). D este un element geometric caracteristic al materialului solid, de exemplu diametrul caracteristic al particulelor solide aluvionare sau dimensiunea rugozității peretelui ; în primul caz se recomandă să se ia $D = D_{90}$, adică o valoare aleasă astfel încît 90% din particule să aibă un diametru inferior acestei dimensiuni, iar în al doilea caz, $D = \Delta$, rugozitatea absolută.

Ținînd seama de scările stabilite în paragraful anterior, $k_R = k_z$, $k_v = k_z^{1/2}$ și $k_J = k_z k_x^{-1}$, rezultă, din formula (10),

$$k_K = k_x^{1/2} k_z^{-2/3}, \tag{12}$$

iar din formula (11),

$$k_D = k_x^{-3} k_z^4 = \left(\frac{k_z}{k_x}\right)^3 \cdot k_z = \delta^3 k_z. \tag{13}$$

În concluzie, păstrînd proporțiile, modelul este mai rugos decît albia naturală, iar particulele aluvionare cu atît mai mari, cu cît distorsiunea δ este mai mare.

4.2. *Similitudinea vitezelor de început de antrenare.* Este foarte important să se respecte similitudinea vitezelor de început de antrenare a aluviunilor, deoarece aceasta condiționează similitudinea paturilor mobile. Punctul de plecare în stabilirea relațiilor de similitudine îl constituie formulele de determinare a capacității de transport a aluviunilor de fund. Există o mare varietate de formule cu care se calculează debitul solid de fund, care pot fi clasate în formule bazate pe considerarea forței de tîrîre (Du Boys, Schoklitsch, Concearov, Levi, Bagnold, Meyer-Peter etc.) și formule bazate pe teoria statistică a turbulenței (Velikanov, Einstein, Shields, Kalinske, Yalin, Chang-Simons-Richardson etc.). În cele ce urmează se utilizează prima formulă a lui E. Meyer-Peter [6], deoarece

aceasta are o structură relativ simplă și a fost temeinic confirmată de numeroasele experiențe făcute la laboratorul Politehnicii din Zürich și ulterior, de alte cercetări teoretice și experimentale.

Se notează cu J — panta energetică a curgerii, q — debitul lichid pe unitate de lățime a curentului, D — diametrul caracteristic al materialului aluvionar (în general se ia $D = D_{35}$, adică un diametru pentru care 35% din particulele aluvionare au un diametru inferior acestei dimensiuni), γ_s — greutatea specifică a particulei sub apă și g_s — debitul solid în apă, pe unitatea de lățime. Formula lui Meyer-Peter, în care C_1 și C_2 sînt niște constante, este

$$\frac{Jq^{2/3}}{D_{35}\gamma_s^{10/9}} = C_1 + C_2 \frac{g_s^{2/3}}{D_{35}\gamma_s^{7/9}}. \tag{14}$$

Această formulă a fost dedusă pe baza unor cercetări experimentale (pentru curenți de apă de adîncimi 1 cm$\leqslant h \leqslant$120 cm și pante 0,0004$\leqslant I \leqslant$0,02 și pentru particule solide de diametre 0,4 mm$\leqslant D \leqslant$30 mm și greutăți specifice în apă 0,25$\leqslant\gamma_s\leqslant$3,2, din diferite materiale : lignit, cuarț, barită). Se menționează că experiențele executate au ținut seama de rugozitatea pereților laterali și de rugozitatea fundului nisipos. De asemenea, s-a ținut seama că din panta energetică totală J numai o parte J_r reprezintă pierderea de energie în transportul apei, iar o altă parte din energie se consumă în transportul materialului solid și din cauza dunelor care se formează pe fund. Se subliniază că ulterior, alți cercetători, au dedus formule care confirmă formula lui E. Meyer-Peter (se citează formulele lui R. A. Bagnold [7], dedusă pe baza unor considerații energetice, H. A. Einstein [8], [9], stabilită prin folosirea unor considerații probabilistice și M. S. Yalin [10], [11] obținută în urma analizei fluctuațiilor turbulente).

Formula (14) se scrie, în condițiile începutului antrenării, sub forma

$$\frac{Jq^{2/3}}{D_{35}\gamma_s^{10/9}} = C_1. \tag{15}$$

Dacă similitudinea începutului de antrenare este verificată, din formula (15) rezultă

$$k_s^{10/9} = k_q^{2/3} k_J k_{D_{35}}^{-1}. \tag{16}$$

Ținînd seama de expresiile scărilor $k_q = k_z^{3/2}$, $k_J = k_z k_x^{-1}$ și $k_{D_{35}} = \delta^3 k_z$ (ceea ce presupune identitatea curbelor granulometrice în natură și pe model) se obține

$$k_{\gamma_s} = \delta^{-9/5}. \tag{17}$$

Această relație permite determinarea greutății specifice a materialului aluvionar pe model.

5. REALIZAREA PRACTICĂ A MODELULUI UNEI CURGERI CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ CU PAT MOBIL

Pe baza considerațiilor dezvoltate în paragraful 3, se stabilesc scările k_x și k_z și, prin urmare, distorsiunea $\delta = \frac{k_z}{k_x}$. Panta modelului rezultă din relația (8). Rugozitățile peretelui pe model se stabilesc prin similitudine cu cele din natură, pe baza relației (13). Dimensiunile și natura fizică a particulelor materialului aluvionar se determină cu ajutorul formulelor (13) și (17).

Toate elementele care definesc modelul se calculează în funcție de scările orizontală k_x și verticală k_z a lungimilor.

De exemplu pentru $k_x = 100$ și $k_z = 40$, deci pentru un raport de distorsiune $\delta = \frac{1}{2{,}5}$, rezultă scările pantei modelului $k_I = \delta = \frac{1}{2{,}5}$, a vitezelor (orizontale) $k_v = k_z^{1/2} = 6{,}33$, a timpilor $k_t = k_x k_z^{-1/2} = 15{,}8$, a debitelor $k_Q = k_x k_z^{-1/2} = 4000$, a razei hidraulice $k_R = k_z = 40$, a coeficientului lui Chézy $k_C = k_x^{1/2} k_z^{-1/2} = 1{,}58$, a rugozităților $k_n = k_x^{-1/2} k_z^{2/3} = 1{,}17$, a diametrului particulei solide aluvionare $k_D = k_x^{-3} k_z^4 = \delta^3 k_z = 2{,}56$, a macrorugozităților albiei $k_\Delta = k_x^{-3} k_z^4 = \delta^3 k_z = 2{,}56$, a greutății specifice a particulelor aluvionare sub apă $k\gamma_s = \delta^{-9/5} = 5{,}21$. De exemplu, greutatea specifică a particulelor aluvionare variază între 2,2—2,8 tf/m³; în mod obișnuit se ia 2,65 tf/m³ (greutatea specifică a cuarțului, mineral predominant în nisip) și în acest caz greutatea specifică (în apă) a materialului particulelor pe model este $\gamma_s = \frac{2{,}65 - 1}{5{,}21} = 0{,}317$ tf/m³, deci rezultă pentru greutatea specifică a materialului patului mobil valoarea 1,317 tf/m³.

Trebuie subliniat că relațiile (13) și (17) nu trebuie considerate absolut riguroase. Astfel, la stabilirea relației (13) s-a considerat că mărimea A din formula (11) a lui Strickler este o constantă absolută, ceea ce nu este întru totul adevărat. Pe de altă parte fenomenul de antrenare a materialului aluvionar este foarte complicat și pînă în prezent puțin cunoscut. Formula (14) a lui Meyer-Peter care a stat la baza stabilirii relației (17), deși apreciată favorabil și utilizată de un număr mare de cercetători, nu este capabilă să calculeze cu precizie condițiile de început de antrenare (de exemplu nu ține cont cu precizie de abaterile de granulometrie a particulelor aluvionare și de coeziunea dintre ele).

Datorită inconvenientelor semnalate, realizarea definitivă a modelului nu poate fi făcută decît după o etalonare corespunzătoare. Se recurge la modificări prin tatonări succesive, în jurul valorilor indicate de relațiile (13) și (17) a dimensiunilor rugozităților pereților și a dimensiunilor și densității particulelor materialului aluvionar, studiind de fiecare dată comportamentul patului mobil în diferite condiții similare celor care pot apărea în natură.

De exemplu, etalonarea modelului poate fi condiționată de apariția unor fenomene parazite pe model, cum ar fi apariția dunelor, în cazul în care materialul este prea fin. În acest caz se preferă o abatere voită de la legile de similitudine, mărind dimensiunea particulelor aluvionare

pentru a evita formarea acestor configurații parazite. Rezultă că este necesar să se micșoreze corespunzător densitatea materialului aluvionar pentru a respecta similitudinea începutului antrenării și pentru a ține seama de faptul că pierderile de sarcină cresc.

Apariția și propagarea viiturilor este un fenomen strîns legat de cele trei faze ale mișcării aluviunilor : eroziunea, transportul și sedimentarea materialului solid și de aceea trebuie prins și studiat pe model. Și în acest caz trebuie procedat la o etalonare a modelului. Se caută să se realizeze pe model un ciclu de viituri care în timpul unei durate de timp T_m conduce la o evoluție a patului mobil identică celei constatate în natură în timpul unei perioade T. Se determină astfel scara timpului $\frac{T}{T_m}$, care poate fi uneori mult diferită de scara timpului determinată prin considerații de similitudine hidrodinamică, $k_t = k_x k_z^{-1/2}$.

Datorită complexității fenomenelor legate de curgerile cu suprafață liberă cu pat mobil, etalonarea modelului este obligatorie. Etalonarea necesită o cunoaștere detaliată a desfășurării fenomenului din natură.

6. CONCLUZII

Realizarea practică a modelului unei curgeri cu suprafață liberă cu pat mobil este legată nemijlocit de respectarea a două condiții : similitudinea pierderilor de sarcină și similitudinea vitezelor de început de antrenare a aluviunilor. Relațiile hidrodinamice obținute în acest caz permit, printre altele, estimarea densității materialelor care trebuie să constituie patul mobil al modelului precum și a geometriei particulelor aluvionare și a rugozităților pereților modelului. Folosirea acestor relații, deduse pe cale teoretică, conduce la scurtarea duratei operației de etalonare și la realizarea unui model corect, capabil să furnizeze informațiile dorite. Precizia rezultatelor furnizate de model este funcție directă de grija cu care a fost executat și etalonat modelul.

Primit la redacție la 16 decembrie 1976.

BIBLIOGRAFIE

1. A. P. Zegjda, *Ghidravliceskie poteri na trenie v kanalah i truboprovodah*, Moskva, Gosenergoizdat, 1957.
2. C. Diaconu, *Probleme ale scurgerii de aluviuni a rîurilor României*, Institutul de meteorologie și hidrologie, București, 1971.
3. C. Mateescu, *Hidraulica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1963.
4. A. A. Vasilescu, *Analiza dimensională și teoria similitudinii*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România, București, 1969.
5. A. Schoklitsch, *Handbuch des Wasserbaues*, Erster Band, Springer-Verlag, Wien, 1950.
6. E. Meyer-Peter, R. Müller, *Formulas for bed-load transport*, Proc. 2nd Congress IAHR, Stockholm, June, 1948.
7. R. A. Bagnold, *The flow of cohesionless grains in fluids*, Philosophical Trans. Roy. Soc. London, A, **249**, *964* (Dec. 1956).
8. H. A. Einstein, *The bed-load function for sediment transportation in open channel flows*, U. S. Dept. Agriculture, Soil Conservation Ser., Tech. Bull., *1026* (1950).
9. H. A. Einstein, *River sedimentation*, Handbook of applied hydrology, Section 17-II, Edit. Ven Te Chow, McGraw-Hill, 1964.
10. M. S. Yalin, *An expression for bed-load transportation*, Proc. ASCE 89, HY3 (May 1963).
11. M. S. Yalin, *Mechanics of sediment transport*, Pergamon Press, Oxford-New York, 1972.
12. J. Florea, V. Panaitescu, *Studiu de similitudine a curgerilor cu suprafață liberă cu pat mobil*, A IV-a Conferință națională de mecanică, București, 1975.

CALCULUL HIDRODINAMIC AL LAGĂRULUI RADIAL DE ALUNECARE, ECHIPAT CU CUZINET POROS ŞI REZERVOR CIRCULAR DESCHIS

de SERGIU IVANCENCO

Institutul politehnic Bucureşti

Teoria ungerii hidrodinamice a lagărelor radiale de alunecare echipate cu cuzineţi poroşi, prezentată în numeroase lucrări, se limitează la o anumită variantă constructivă a acestor lagăre, caracterizată de compactitatea suprafeţei exterioare a cuzinetului.
Utilizarea pe o scară tot mai largă în construcţia de maşini a lagărului radial de alunecare, echipat cu cuzinet poros şi rezervor de ulei de jur împrejurul cuzinetului, face necesară dezvoltarea teoriei ungerii hidrodinamice în acest caz, lucrarea de faţă reprezentînd din acest punct de vedere, un început.

Proprietăţile autolubrifiante ale materialelor poroase, binecunoscute astăzi, au determinat utilizarea pe o scară tot mai largă a acestor materiale în construcţia cuzineţilor ce echipează lagărele de alunecare. Evident, construcţia unor astfel de lagăre a făcut necesară extinderea teoriei ungerii hidrodinamice în acest caz.

Construcţia lagărelor radiale de alunecare echipate cu cuzineţi poroşi se realizează, în general, în două variante conform figurilor 1 şi 2, diferenţiate prin existenţa sau inexistenţa compactităţii suprafeţei exterioare a cuzinetului folosit [9]. Astfel, în al doilea caz, corpul lagărului a fost astfel prelucrat încît în jurul cuzinetului s-a creat un rezervor prin intermediul căruia se poate mări şi reface periodic rezerva de ulei din lagăr.

Ecuaţia Reynolds ce guvernează curgerea lubrifiantului în interstiţiul fus-cuzinet al unui lagăr radial de alunecare echipat cu cuzinet poros funcţionînd în regim hidrodinamic staţionar, în condiţiile considerării unei valori medii constante a viscozităţii lubrifiantului folosit şi neglijării vitezei de curgere a lubrifiantului prin porii cuzinetului în raport cu viteza sa de curgere în interstiţiul fus-cuzinet, are forma [2], [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z}\right) - 6 \cdot u \cdot \eta \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - 12 \cdot k \cdot \left.\frac{\partial p'}{\partial y'}\right|_{y'=H} = 0. \quad (1)$$

Notaţiile utilizate conform figurilor 1 şi 2 au următoarele semnificaţii :

p reprezintă presiunea în pelicula de lubrifiant,
p' — presiunea în peretele cuzinetului poros,
u — viteza relativă fus-cuzinet,

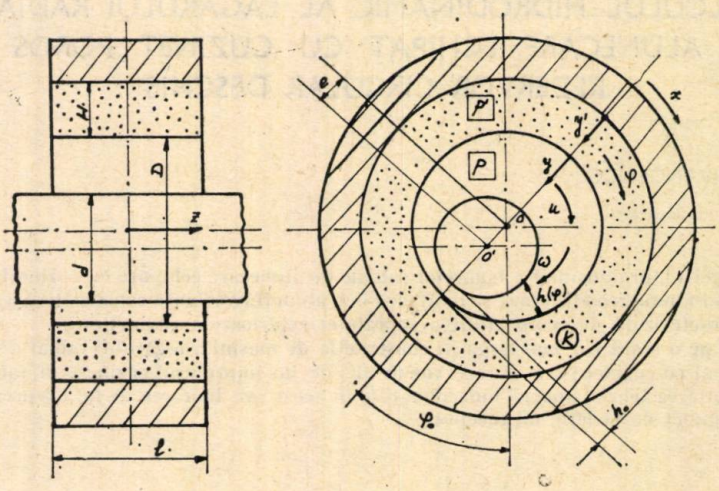


Fig. 1

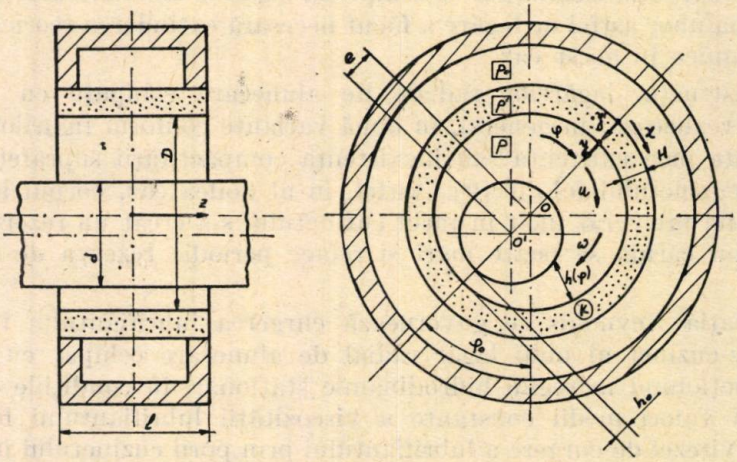


Fig. 2

η — viscozitatea dinamică a lubrifiantului,
h — grosimea peliculei de lubrifiant,
k — coeficientul de filtraţie al materialului cuzinetului,
H — grosimea peretelui cuzinetului,
x, y, y', z — variabilele sistemului de coordonate.

Curgerea lubrifiantului prin peretele poros al cuzinetului este guvernată de legea lui Darcy, care, pentru cele trei direcții ale axelor de coordonate, în cazul unui mediu poros omogen, are forma :

$$v'_x = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} \; ; \; v'_y = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y'} \; ; \; v'_z = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{\partial p'}{\partial z}, \tag{2}$$

unde v'_x, v'_y, v'_z sînt componentele vitezei de curgere a lubrifiantului prin mediul poros.

Pentru obținerea ecuației diferențiale de curgere a lubrifiantului prin peretele poros al cuzinetului, se asociază relațiile (2) ecuației de continuitate, rezultînd în final [2], [7] :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

În vederea rezolvării ecuațiilor diferențiale (1) și (3) se utilizează binecunoscuta ipoteză a „lagărului foarte scurt" a cărei expresie matematică este [2], [7]

$$\frac{\partial p}{\partial z} \gg \frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0. \tag{4}$$

În condiția (4), ecuațiile (1) și (3) devin :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{6 \cdot u \cdot \eta}{h^3} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \frac{12 \cdot k}{h^3} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y'}\bigg|_{y'=H} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale (5) și (6) în cazul lagărului radial de alunecare hidrodinamic, echipat cu cuzinet poros cu suprafață exterioară compactă, este prezentată în numeroase lucrări [1] — [8], aproximațiile și condițiile la limită utilizate fiind următoarele :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial y'^2} = \text{const.} \; ; \; y' = 0 : \frac{\partial p'}{\partial y'} = 0. \tag{7}$$

În lucrarea de față ne propunem rezolvarea ecuațiilor diferențiale (5) și (6) în cazul lagărului radial de alunecare hidrodinamic echipat cu cuzinet poros și rezervor circular de ulei. În acest caz, avînd în vedere grosimea relativ mică a peretelui cuzinetului, este posibilă neglijarea curgerii lubrifiantului prin peretele acestuia pe direcțiile x și z ale axelor de coordonate în raport cu curgerea pe direcția y, ceea ce, matematic, se exprimă prin

$$v'_y \gg v'_x \simeq v'_z \simeq 0. \tag{8}$$

De asemenea, în cazul acestei rezolvări, presiunea p_0 din rezervorul circular va fi considerată egală cu presiunea atmosferică, avînd în vedere faptul că etanşarea acestui rezervor în raport cu mediul înconjurător este dificil de realizat perfect şi nu se practică întotdeauna.

Prin rezolvarea în condiţia (8) a ecuaţiei diferenţiale (6) se obţine

$$p' = \frac{p}{H} \cdot y'. \tag{9}$$

Condiţiile la limită utilizate în această rezolvare au fost :

$$y' = 0 : p' = p_0 \simeq 0 \; ; \; y' = H : p' = p. \tag{10}$$

Prin introducerea expresiei (9) în ecuaţia diferenţială (6) se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}z^2} - \left[\frac{12 \cdot k}{H \cdot h^3} \cdot p + \frac{6 \cdot u \cdot \eta}{h^3} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right] = 0. \tag{11}$$

În ecuaţia diferenţială (11) se face schimbarea de variabilă :

$$f = \frac{12 \cdot k}{H \cdot h^3} \cdot p + \frac{6u\eta}{h^3} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}. \tag{12}$$

Astfel, ecuaţia (11) devine :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - \lambda . f = 0, \tag{13}$$

unde

$$\lambda = \frac{12 \cdot k}{H \cdot h^3}. \tag{14}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (13) are forma

$$f(z) = C_1 \cdot \mathrm{ch} \sqrt{\lambda} z + C_2 . \mathrm{sh} \sqrt{\lambda} z. \tag{15}$$

Condiţiile la limită utilizate pentru determinarea valorilor constantelor C_1 şi C_2 sînt

$$z = 0 : \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \; ; \; z = \frac{l}{2} : \; p = 0. \tag{16}$$

În aceste condiţii, ţinînd seama de notaţia (12), relaţia (15) devine :

$$p = \frac{6 \cdot u \cdot \eta}{h^3 \cdot \lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \cdot \left(\frac{\mathrm{ch} \sqrt{\lambda} . z}{\mathrm{ch} \sqrt{\lambda} \cdot \frac{l}{2}} - 1 \right). \tag{17}$$

Prin utilizarea notației (14) a coordonatelor cilindrice conform figurii 2 și a unor mărimi adimensionale, expresia (17) a presiunii din pelicula de lubrifiant devine :

$$p^* = \frac{p \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega}\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{6 \cdot \varepsilon \cdot \sin\varphi}{\Phi} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\dfrac{\Phi}{(1+\varepsilon \cdot \cos\varphi)^3}} \cdot \dfrac{2 \cdot z}{l}}{\operatorname{ch} \sqrt{\dfrac{\Phi}{(1+\varepsilon \cdot \cos\varphi)^3}}} \right), \quad (18)$$

unde p^* reprezintă presiunea adimensională în pelicula de lubrifiant,

ω — viteza unghiulară a fusului,

$\psi = \dfrac{\Delta r}{r}$ — jocul relativ fus-cuzinet,

$\varepsilon = \dfrac{e}{\Delta r}$ — excentricitatea relativă fus-cuzinet,

$\Delta r = R - r$ — jocul fus-cuzinet (diferența între razele cuzinetului și fusului),

d — diametrul fusului,

l — lungimea fusului,

$\Phi = \dfrac{24 \cdot k \cdot l^2}{H \cdot d^3 \psi^3}$ — permeabilitatea cuzinetului,

$h = \Delta r\ (1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)$ — relația geometrică dintre grosimea peliculei de lubrifiant și jocul fus-cuzinet.

Reprezentarea grafică a expresiei (18) pentru $z = 0$ este redată în figura 3, iar reprezentarea grafică a valorii și poziției maximului acestei expresii sînt redate în figurile 4 și 5.

Prin utilizarea condițiilor la limită tip Gumbel-Everling constînd în considerarea existenței unei presiuni hidrodinamice în interstițiul fus-cuzinet diferite de zero numai în intervalul $(0, \pi)$ de variație al coordonatei φ, și folosind calculatorul electronic, se obține portanța și unghiul de poziție al fusului în cuzinet pentru lagărul radial de alunecare hidrodinamic echipat cu cuzinet poros și rezervor circular de ulei deschis,

$$S_0 = \frac{\dfrac{P_0}{d \cdot l} \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega}\ ;\quad P_0 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}\ ;\quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{P_2}{P_1}\ , \quad (19)$$

unde S_0 este portanța adimensională Sommerfeld,

P_0 — portanța,

φ_0 — unghiul dintre direcția portanței și linia centrelor fus-cuzinet,

$P_1 = 2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{l/2} p \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot dz$ — componenta portanței pe direcția liniei centrelor fus-cuzinet,

$P_2 = 2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{l/2} p \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot dz$ — componenta portanței pe direcția perpendiculară pe linia centrelor fus-cuzinet.

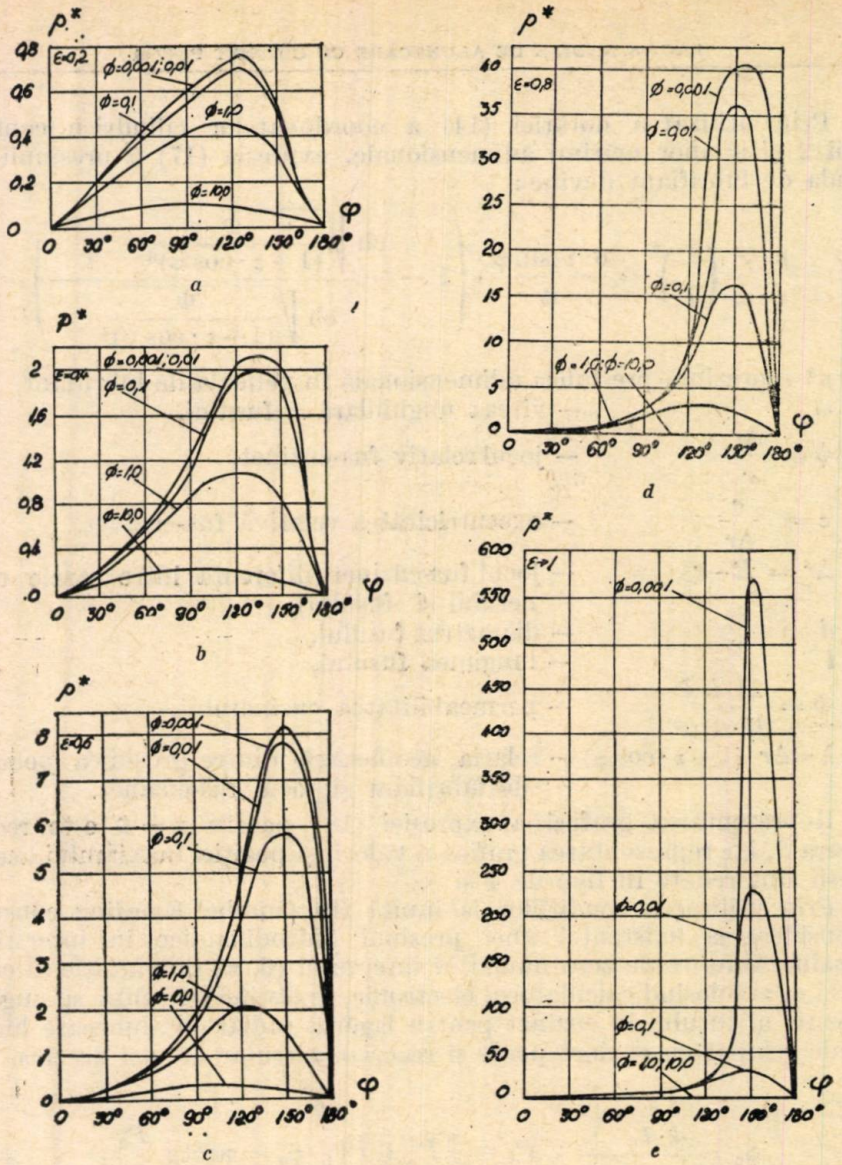


Fig. 3

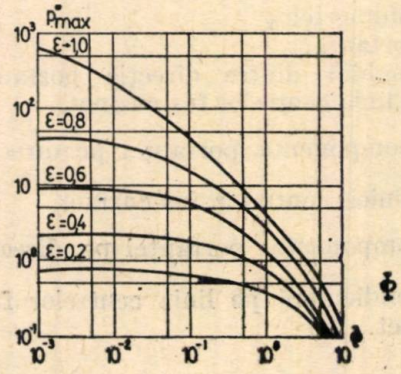


Fig. 4

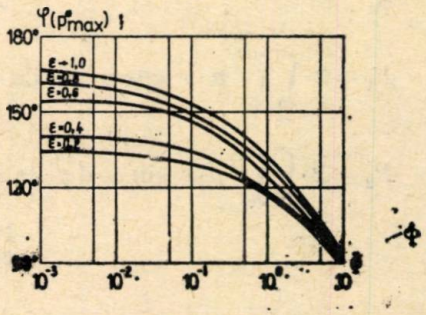


Fig. 5

Diagramele de variație în raport cu diverși factori a parametrilor S_0 și φ_0 se prezintă în figurile 6 și 7.

Pentru determinarea coeficientului de frecare fluidă se recurge la integrarea, în acest caz, a cunoscutei relații a lui Newton și raportarea

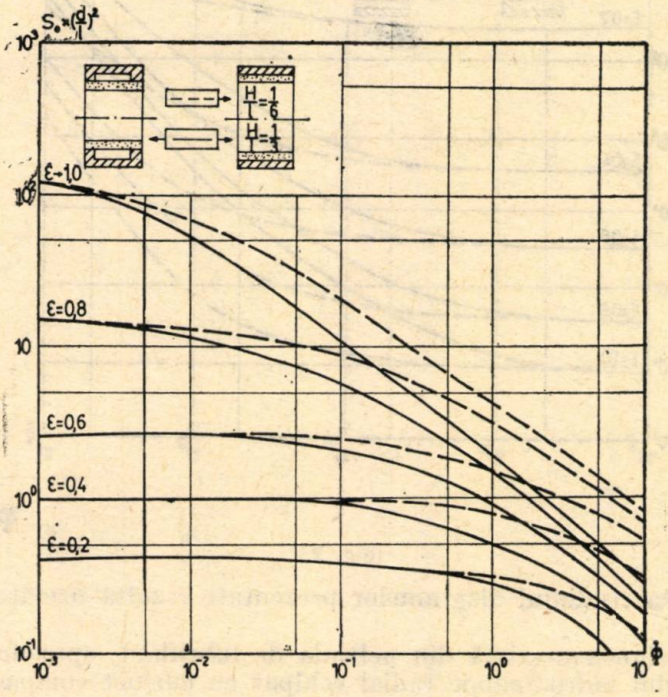


Fig. 6

forței de frecare astfel obținute la portanță, ajungîndu-se în final la relația [2], [7]:

$$\frac{\mu_l}{\psi} = \frac{\pi}{S_0 \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \tag{20}$$

Diagrama de variație a coeficientului de frecare fluidă conform relației (20) este prezentată în figura 8.

Pentru comparație, în toate diagramele prezentate au fost trasate curbele corespunzătoare de variație în raport cu aceeași factori a parametrilor lagărului radial de alunecare hidrodinamic echipat cu cuzinet poros cu suprafață exterioară compactă. Utilizarea aceluiași factor de permeabilitate în cazul ambelor tipuri de lagăre radiale de alunecare hidrodinamice echipate cu cuzineți porоși, are ca urmare dependența parametrilor lagărului a cărui cuzinet are suprafață exterioară compactă și de factorul H/l. Astfel, expresia presiunii din pelicula de lubrifiant a acestui ultim tip de lagăr are forma adimensională:

$$p^* = \frac{p \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{3 \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^3 + 4 \cdot \Phi \cdot \left(\frac{H}{l}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{l^2}\right). \tag{21}$$

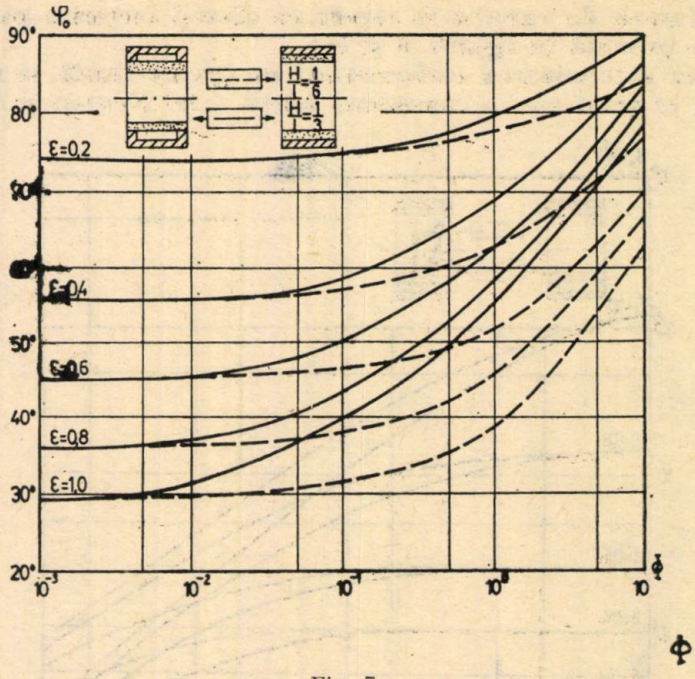


Fig. 7

Pe baza studiului diagramelor prezentate rezultă următoarele concluzii :

1. Presiunea maximă din pelicula de lubrifiant, spre deosebire de cazul lagărului hidrodinamic radial echipat cu cuzinet compact [7], are valoare finită, scăzînd și depărtîndu-se de poziția grosimii minime a peli-

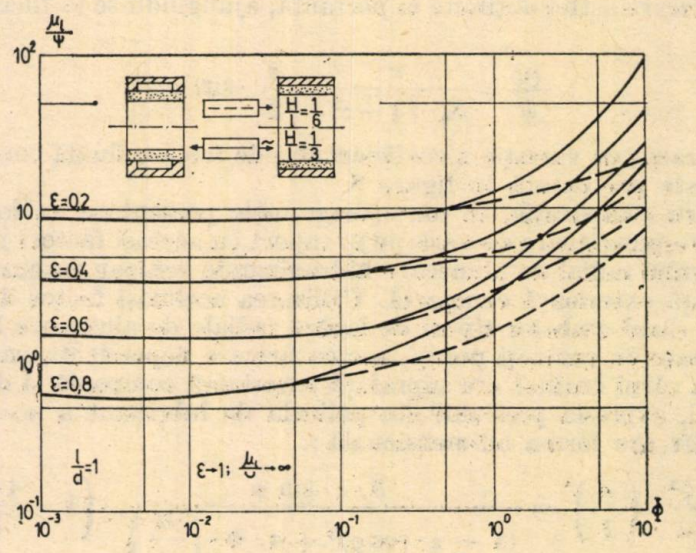


Fig. 8

culei de lubrifiant o dată cu creşterea permeabilităţii cuzinetului şi scăderea excentricităţii relative fus-cuzinet.

2. Portanţa scade o dată cu creşterea permeabilităţii cuzinetului şi scăderea excentricităţii relative fus-cuzinet. La excentricităţi relative fus-cuzinet mari, scăderea portanţei ca urmare a creşterii permeabilităţii cuzinetului este mai accentuată.

3. Portanţa lagărului echipat cu rezervor circular deschis este mai mică decît a lagărului, avînd suprafaţa exterioară a cuzinetului compactă dacă acesta din urmă este construit în limitele uzuale ale raportului H/l. Această diferenţă între portanţe se accentuează cu creşterea permeabilităţii cuzinetului. Prin creşterea raportului H/l, portanţa lagărului avînd suprafaţa exterioară a cuzinetului compactă, scade, ajungînd, pentru $H/l = 1/3$, aproximativ egală cu portanţa lagărului echipat cu rezervor circular deschis.

4. Unghiul dintre direcţia portanţei şi linia centrelor fus-cuzinet creşte o dată cu creşterea permeabilităţii cuzinetului şi scăderea excentricităţii relative fus-cuzinet. Valoarea acestui unghi este mai mare în cazul lagărului echipat cu rezervor circular deschis decît în cazul lagărului cu suprafaţă exterioară a cuzinetului compactă, dacă valorile raportului H/l pentru acest ultim tip de lagăr se menţin în domeniul uzual. Această diferenţă se accentuează o dată cu creşterea permeabilităţii cuzinetului.

5. Coeficientul de frecare fluidă creşte o dată cu creşterea permeabilităţii cuzinetului, scăderea excentricităţii relative fus-cuzinet şi scăderea raportului l/d. Valoarea acestui coeficient de frecare este mai mare în cazul lagărului echipat cu rezervor circular deschis decît în cazul lagărului cu suprafaţă exterioară a cuzinetului compactă dacă valorile raportului H/l pentru acest ultim tip de lagăr se menţin în domeniul uzual. Această diferenţă se accentuează o dată cu creşterea permeabilităţii cuzinetului.

Primită la redacţie la 30 noiembrie 1976.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cameron, V. T. Morgan, A. E. Stainsby, *Critical condition for hydrodynamic lubrication of porous metal bearings*, The Inst. of Mech. Engng., Lubric. and Wear groop, London, 1962.
2. A. Cameron, *Basic lubrication theory*, Longman, 1970, cap. 11, p. 134—138.
3. V. T. Morgan, A. Cameron, *Mechanism of lubrication in porous metal bearings*, Conf. of Lubric. and wear, Inst. of Mech. Engng., London, 1957, Paper 89, p. 151—157.
4. A. D. Moşkov, *Poristie antifricţionie materiali*, Izd. Maşinostroienie, Moskva, 1968.
5. P. R. K. Murti, *Hydrodynamic lubrication of short porous bearings*, Wear, **19**, *1*, p. 17—25 (1972).
6. P. R. K., Murti, *Lubrication of narow porous bearings with arbitrary wall thickness*, Journal of Lubric. Techn. ASME Trans., october 1973, p. 511—517.
7. O. Pinkus, B. Sterlicht, *Theory of hydrodynamic lubrication*, McGraw — Hill Book Company, 1961.
8. C. A. Rhodes, W. T. Rouleau, *Hydrodynamic lubrication of narow porous metal bearing with sealed ends*, Wear, **8**, *6*, p. 474—486, (1965).
9. * * * *Tribology Handbook* edited by Neale M. J., Buttrworth, London, 1973, cap. 8 A (Porous metal bearings, by Morgan V.T.).

CALCULUL REZERVOARELOR DE AER DIN SISTEMELE HIDRAULICE SUB PRESIUNE, ÎN IPOTEZA MIȘCĂRII LENT VARIABILE

ȘT. ZAREA
Institutul politehnic București și Universitatea Mohamed V Rabat
M. POPESCU, I. JELEV
Institutul de cercetări hidrotehnice

Ideea de bază a lucrării constă în aceea că rezervoarele de aer sau castelele de echilibru atașate unui sistem hidraulic sub presiune transformă mișcările rapid variabile în mișcări lent variabile, calculul variațiilor de presiune în aceste cazuri putînd fi efectuat cu ecuațiile oscilației în masă în locul celor ale loviturii de berbec. Se prezintă ecuațiile oscilației în masă pentru o conductă prevăzută cu rezervor de aer într-o formă care permite prin particularizare regăsirea ecuațiilor pentru castele de echilibru.
Se propune o metodă de calcul numerică, se analizează comparativ cu alte metode rezultatele obținute prin aplicarea metodei propuse pe un caz concret și se exemplifică cu o aplicație practică.

1. INTRODUCERE

Studiul funcționării sistemelor hidraulice sub presiune (stații de pompare, instalații hidraulice industriale, uzine hidroelectrice ș.a.) în regimuri tranzitorii prezintă interes deosebit teoretic și practic, ceea ce explică numărul mare de lucrări consacrate în secolul nostru acestui subiect.

Pentru un sistem hidraulic sub presiune se studiază lovitura de berbec sau oscilația în masă a fluidului, după natura mișcării tranzitorii care apare. Dacă conductele sistemului hidraulic sînt prevăzute cu rezervoare de aer sau castele de echilibru, acestea determină o schimbare a caracterului mișcării nepermanente și anume transformă mișcarea rapid variabilă (lovitura de berbec) într-o mișcare lent variabilă (oscilație în masă). În consecință, bazați pe această constatare propunem ca determinarea suprapresiunii din sistemele hidraulice protejate cu rezervoare de aer sau castele de echilibru să fie efectuată folosind ecuațiile oscilației în masă și nu ale loviturii de berbec.

În lucrare se analizează acest aspect de importanță principială a problemei și se prezintă o metodă numerică de calcul al mișcării tranzitorii.

Totodată ecuațiile oscilației în masă pentru o conductă prevăzută cu rezervor de aer sînt scrise sub o formă care permite prin particularizare regăsirea ecuațiilor pentru castele de echilibru.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 4, 1977, P. 502 – 512

Sînt precizate definiţiile mişcării rapid şi lent variabile şi ale oscilaţiei în masă. Un exemplu de calcul ilustrează pe un caz concret atît ideea de bază a lucrării precum şi metoda de calcul preconizată.

2. MIŞCĂRI TRANZITORII LENTE ŞI RAPIDE

În sistemele hidraulice sub presiune, în mod obişnuit, mişcarea fluidelor are un caracter permanent, dar există şi situaţii în care aceasta este nepermanentă ca urmare a perturbaţiei introdusă de manevrarea vanelor din considerente impuse de exploatare sau datorită unor accidente.

În consecinţă, mişcările nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune sînt provocate de trecerea de la un regim de funcţionare la altul, fiind denumite şi regimuri tranzitorii.

Transformările energiei cinetice în energie de presiune şi reciproc, care apar într-un regim tranzitoriu sînt influenţate în mod diferenţiat cu oscilaţiile elastice ale sistemului şi cu transportul de masă al fluidului respectiv.

Într-un regim tranzitoriu mişcarea fluidului poate fi lent sau rapid variabilă, în funcţie de caracterul perturbaţiei, de caracteristicile elastice ale fluidului şi ale sistemului hidraulic respectiv, precum şi de sistemul de protecţie adoptat.

Mişcarea este considerată rapid variabilă dacă amplitudinea şi frecvenţa oscilaţiilor de presiune care apar sînt mari, efectele elastice fiind preponderente, transportul de masă neglijabil şi existînd pericol de producere a cavitaţiei. În mod uzual această clasă de mişcări este denumită : lovitură de berbec, şoc hidraulic sau mişcare ondulatorie.

Mişcările rapid variabile se datoresc perturbaţiei rapide $\left(\text{accident}\right.$ sau timp de manevră T_m al vanei inferior, spre exemplu, timpului de reflexie $T_r = \left.\frac{2L}{c}\right)$, cît şi caracteristicilor elastice ale ansamblului conductă-lichid. În acest caz, pentru calculul oscilaţiilor de presiune se utilizează ipoteza *modelului de fluid compresibil.*

Mişcările lent variabile ale unui fluid dintr-un sistem hidraulic sub presiune se caracterizează prin amplitudini şi frecvenţe mici ale oscilaţiilor de presiune, transportul de masă al fluidului putînd fi neglijat în unele cazuri, sau trebuind să fie luat în consideraţie în altele (mişcări de oscilaţie în masă). Pentru calculul oscilaţiilor de presiune în acest caz se poate utiliza ipoteza *modelului de fluid incompresibil.*

Oscilaţia în masă a fluidului într-un sistem hidraulic sub presiune este o mişcare lent variabilă în care transformarea de energie se face prin transportul în masă al fluidului respectiv, efectele elastice fiind neglijabile.

Pentru a proteja sistemele hidraulice de suprapresiunile mari care apar într-o mişcare rapid variabilă se prevăd sisteme de protecţie (rezervoare de aer, castele de echilibru), care transformă mişcarea rapid variabilă într-o mişcare de oscilaţie în masă, sau se poate considera că *elimină fenomenul loviturii de berbec,* înlocuindu-l cu oscilaţia în masă.

Calculele au pus în evidență că dacă perioada mișcării oscilatorii din tronsonul considerat al unui sistem hidraulic sub presiune, T_L, este mai mare decît cinci ori perioada mișcării rapid variabile, $T_R = \frac{4L}{c}$, $T_L > 5\ T_R$, pentru calculul oscilațiilor de presiune se poate utiliza sistemul de ecuații al oscilațiilor în masă, rezultatele fiind aceleași [11].

Mișcarea rapid variabilă a apei în sistemele sub presiune (lovitura de berbec) este descrisă de ecuațiile :

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g\omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + kQ\,|Q| = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g\omega}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

în care H este înălțimea piezometrică măsurată față de un plan orizontal de referință, Q — debitul, ω — aria secțiunii conductei, x — distanța la secțiunea curentă, t — timpul, g — accelerația gravitației, c — celeritatea, k — coeficient de pierdere de sarcină longitudinală în conductă.

Mișcarea lent variabilă a apei în sistemele sub presiune (oscilația în masă) este descrisă de următoarele ecuații, astfel :

În cazul sistemului hidraulic cu *castel de echilibru* (fig. 1 *a*) :

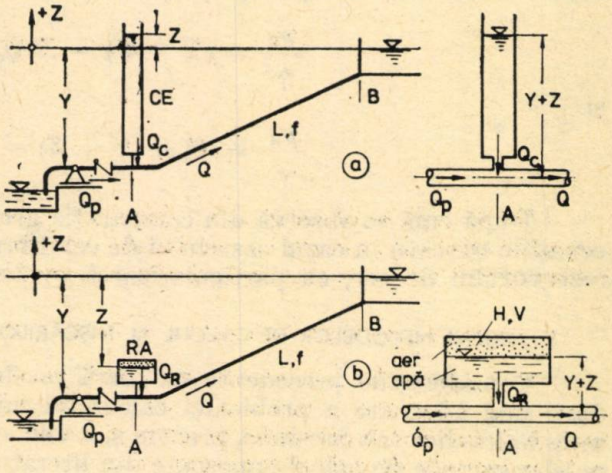


Fig. 1. — Schema unei stații de pompare prevăzute cu : *a*) castel de echilibru la bază *b*) rezervor de aer.

$$\frac{L}{gf}\frac{dQ}{dt} - Z + PQ\,|Q| + M\ Q_c\,|Q_c| = 0,$$
$$Q_p = F\frac{dZ}{dt} + Q, \tag{2}$$
$$Q_p = Q_p(t),$$

în care Z este cota nivelului apei din castel față de nivelul din rezervorul de refulare, socotită pozitivă în sus, Q — debitul în conductă, Q_c — debi-

tul de intrare-ieşire din castel, Q_p — debitul pompat, L — lungimea conductei, f — aria secţiunii conductei, F — aria secţiunii orizontale a castelului la oglinda apei, P — coeficient de pierdere de sarcină longitudinală pe conductă, M — coeficient de pierdere de sarcină locală în diafragma (strangularea) castelului, t — timpul, g — acceleraţia gravitaţiei.

În cazul sistemului hidraulic cu *rezervor de aer* (fig. 1 *b*) :

$$\begin{aligned} &\frac{L}{gf}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - (H + Z) + PQ\,|Q| + M\,Q_R\,|Q_R| = 0,\\ &Q_r = F\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + Q,\\ &(H + h_a)V = (H_0 + h_a)V_0 = K,\\ &Q_p = Q_p(t), \end{aligned} \tag{3}$$

în care, în plus, s-au făcut notaţiile : Z — cota nivelului apei din rezervorul de aer faţă de nivelul din rezervorul de refulare, socotită pozitivă în sus, Q_R — debitul de intrare-ieşire din rezervorul de aer, F — aria secţiunii orizontale a rezervorului de aer la onglinda apei, H — presiunea pernei de aer, V — volumul pernei de aer, h_a — presiunea atmosferică în m.c.a.

Presiunea apei din conducta de refulare în secţiunea castelului sau a rezervorului este dată, respectiv, de relaţiile :

$$\frac{p_A}{\gamma} = (Y + Z) - M\,Q_c\,|Q_c| \tag{4}$$

şi

$$\frac{p_A}{\gamma} = (H + Y + Z) - M\,Q_R\,|Q_R|. \tag{5}$$

După cum se observă din comparaţia grupurilor de ecuaţii (2) şi (3), ecuaţiile mişcării în cazul castelului de echilibru se pot obţine din ecuaţiile rezervorului de aer, cu particularizarea evidentă $H = 0$.

3. ASUPRA METODELOR DE CALCUL AL MIŞCĂRILOR LENT ŞI RAPID VARIABILE

Consideraţiile precedente ne oferă posibilitatea înţelegerii şi abordării mai adecvate a problemei calculului mişcării tranzitorii din sistemele hidraulice sub presiune, precum şi a unei clasificări sugestive a principalelor metode de calcul cunoscute din literatura de specialitate :

1) *Calculul loviturii de berbec:* metode analitice [1] — [4]; metode grafice [5], [6]; metode numerice [7] — [13].

2) *Calculul castelelor de echilibru:*

2.1. Cu ecuaţiile loviturii de berbec : metode analitice [4], [15]; metode grafice [6]; metode numerice [9], [10], [12], [16], [17].

2.2. Cu ecuaţiile oscilaţiei în masă : metode analitice [18], [20]; metode grafice [18], [21]; metode numerice [19], [21].

3) *Calculul rezervoarelor de aer:*

3.1. Cu ecuaţiile loviturii de berbec : metode analitice [14]; metode grafice [6], [22]; metode numerice [7], [9], [10], [12], [17].

3.2. Cu ecuaţiile oscilaţiei în masă : metode analitice [23]; metode grafice [24]; metode numerice [25].

După cum se observă, calculul hidraulic al castelelor de echilibru şi rezervoarelor de aer s-a dezvoltat pînă în prezent pe două căi şi anume, fie utilizînd ecuaţiile loviturii de berbec, fie pe cele ale oscilaţiei în masă.

4. EXPUNEREA METODEI

Calculul rezervoarelor de aer din sistemele hidraulice sub presiune, în ipoteza mişcării lent variabile, a fost tratat în literatura de specialitate, prin diferite metode. Astfel:

K. HAINDL în lucrarea [23] prezintă o serie de metode analitice, obţinînd rezultate analoge celor întîlnite în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru [18],

L. ESCANDE propune în lucrarea [24] o metodă grafică şi o exemplifică pe un caz concret, iar

A. SCHLAG a expus în lucrarea [25] o metodă numerică, aplicabilă prin calcule tabelare.

Metoda numerică pe care o prezentăm în lucrarea de faţă este analogă unei metode elaborată anterior pentru castele de echilibru [19].

În cadrul metodei se pleacă de la ecuaţiile generale ale mişcării scrise sub forma (3) şi se utilizează valorile medii ale variabilelor pe intervalul de timp Δt.

Pentru integrarea numerică a sistemului de ecuaţii (3) se foloseşte următoarea formă de scriere în diferenţe finite:

$$\begin{aligned} &\frac{L}{gf}\frac{\Delta Q}{\Delta t} - (H_m + Z_m) + PQ_m|Q_m| + M\,Q_{Rm}|Q_{Rm}| = 0,\\ &Q_{Pm} = F\frac{\Delta Z}{\Delta t} + Q_m,\\ &(H_m + h_a)V_m = K,\\ &Q_{Pm} = Q(t_m). \end{aligned} \tag{6}$$

Din aceste ecuaţii se pot deduce expresiile creşterilor ΔZ şi ΔQ:

$$\begin{aligned} \Delta Z = 2\Bigg[&\frac{L}{gf}\frac{\Delta Q}{\Delta t} + P\left(Q_i + \frac{\Delta Q}{2}\right)\left|Q_i + \frac{\Delta Q}{2}\right| +\\ &+ M\left(F\frac{\Delta Z}{\Delta t}\right)\left|F\frac{\Delta Z}{\Delta t}\right| - \left(\frac{K}{V_i - F\dfrac{\Delta Z}{2}} + Z_i - h_a\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Delta Q = 2\left(Q_{Pm} - F\frac{\Delta Z}{\Delta t} - Q_i\right).$$

Folosind o formă simplificată de scriere a sistemului algebric de mai sus

$$\begin{aligned} \Delta Z &= \Phi(\Delta Z, \Delta Q),\\ \Delta Q &= \Psi(\Delta Z), \end{aligned} \tag{8}$$

şi notaţiile

ΔZ_p — valoarea propusă pentru ΔZ;

ΔZ_c — valoarea calculată pentru ΔZ;

Δ_i, δ_i — notaţii simplificate pentru ΔZ, ΔQ,

se propune următorul algoritm de calcul, pe etape:

Etapa I:

$$\Delta Z_p = \Delta_1; \quad \Delta Q = \Psi(\Delta_1) = \delta_1; \quad \Delta Z_c = \Phi(\Delta_1, \delta_1),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_1| < \varepsilon.$$

Etapa a II-a:

$$|\Delta Z_p = \Delta_2; \ \Delta Q = \Psi(\Delta_2) = \delta_2; \ \Delta Z_c = \Phi(\Delta_2, \delta_2),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Etapa a III-a:

$$\Delta_p = \Delta_1 - \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\right)\varepsilon_1 = \Delta_3; \quad \Delta Q = \Psi(\Delta_3) = \delta_3,$$
$$\Delta Z_c = \Phi(\Delta_3, \delta_3); \quad |\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_3| < \varepsilon.$$

În procesul de iteraţie, ca primă valoare aleasă a creşterii ΔZ se ia valoarea sa de la timpul de calcul anterior, iar în primul pas de calcul pentru ΔZ se ia o valoare oarecare, acceptabilă, compatibilă cu fenomenul.

Dacă condiţia de precizie $|\Delta Z_p - \Delta Z_c| < \varepsilon$ este satisfăcută, calculul se consideră încheiat pentru pasul de calcul respectiv şi se trece la pasul de calcul următor. În caz contrar, calculul se reia de la etapa a III-a, considerînd ca etape I şi II, etapele II şi III parcurse anterior.

Soluţia numerică a problemei s-a dovedit a fi stabilă şi rapid convergentă.

Precizia rezultatelor este foarte bună pentru paşi de timp, Δt, egali ocu fracţiune, $\frac{1}{n} = \frac{1}{50} \ldots \frac{1}{100}$, din perioada oscilaţiilor ideale din rezervor:

$$\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{V_0 L}{gf(Y + h_a)}}. \tag{9}$$

Metoda poate fi scrisă cu uşurinţă într-un limbaj algoritmic şi folosită pe calculatoare de capacitate medie.

5. REZULTATE COMPARATIVE

S-a efectuat un studiu comparativ folosind mai multe metode şi ipoteze de calcul aplicate unei staţii de pompare, avînd schema din figura 2 şi următoarele caracteristici principale: $H_G = 48$ m, $Q_P = 10$ m³/s, $L = 1\,200$ m, $D = 1\,900$ mm.

Desfăşurarea fenomenului de lovitură de berbec, după o manevră de oprire totală a staţiei şi în ipoteza absenţei mijloacelor de protecţie, este ilustrată în figura 2 prin curbele de variaţie în timp a presiunii apei din cîteva puncte de pe traseul conductei de refulare.

Aplicarea metodei de calcul propuse s-a făcut în ipoteza de protecţie cu un rezervor de aer plasat lîngă staţie.

Oscilația în masă a apei care ia naștere după oprirea stației în sistemul astfel protejat a fost calculată atît cu ecuațiile loviturii de berbec, cît și cu ecuațiile oscilației în masă.

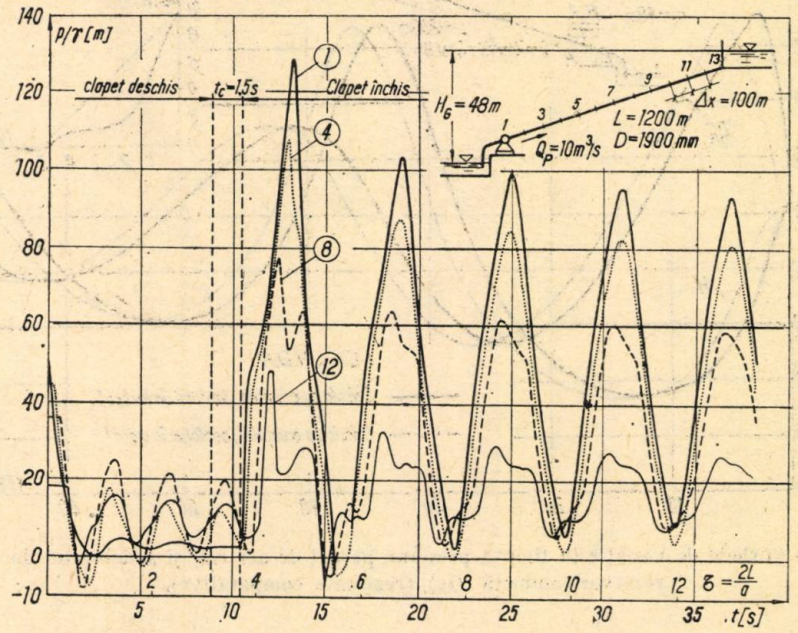


Fig. 2. — Curbele de variație în timp a presiunii apei din conducta de refulare, după oprirea stației, în ipoteza absenței mijloacelor de protecție.

Rezultatele obținute sînt prezentate în figurile 3 și 4, care conțin curbele de variație în timp a unor parametri principali ai mișcării.

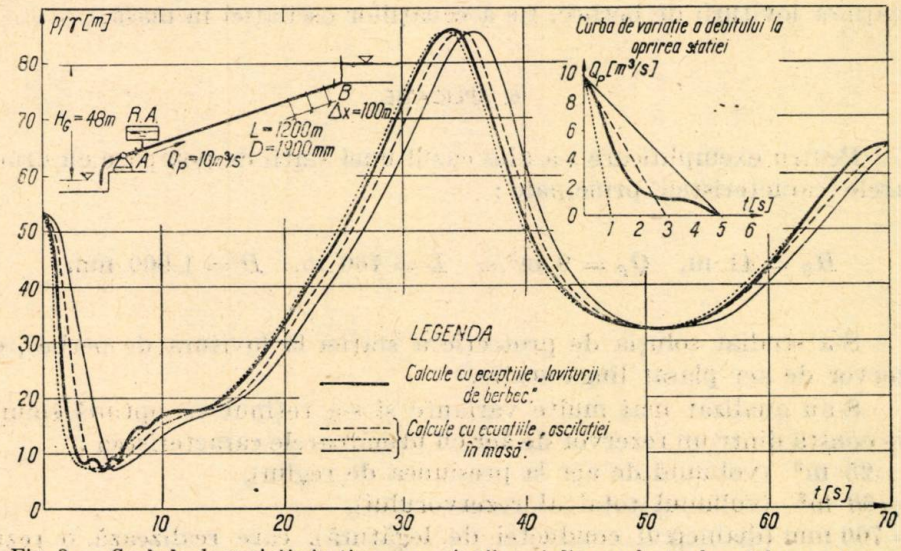


Fig. 3. — Curbele de variație în timp a presiunii apei din conducta de refulare — în secțiunea rezervorului, după oprirea stației (rezultate comparative).

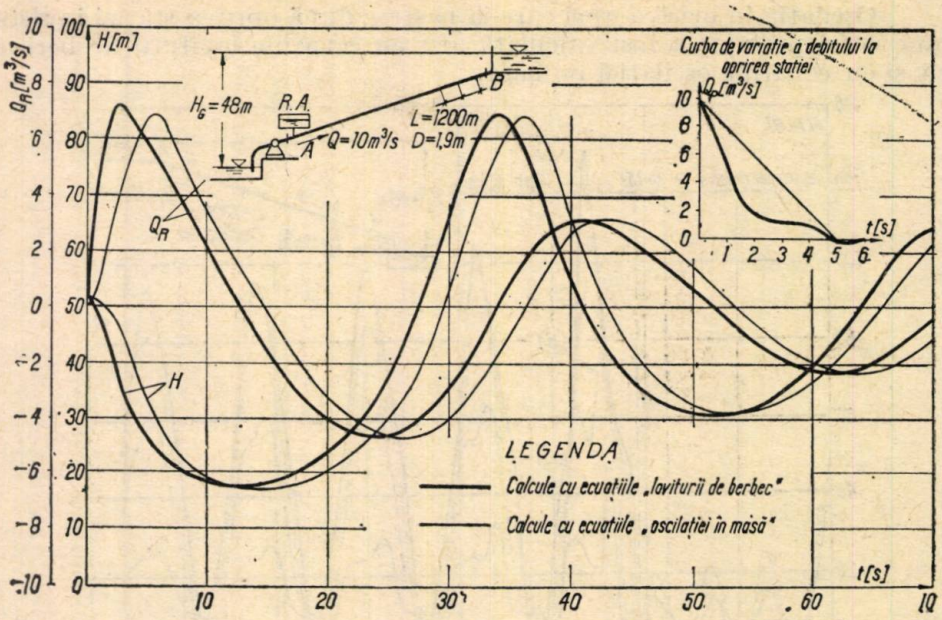


Fig. 4. — Curbele de variaţie în timp a presiunii pernei de aer (H) şi a debitului de schimb rezervor-conductă (Q_R), (rezultate comparative).

După cum se observă, rezultatele sînt foarte apropiate între ele şi justifică într-un fel dezvoltarea pe care au luat-o de-a lungul timpului metodele de calcul al mişcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune protejate cu castele şi rezervoare de aer, fie pe calea folosirii ecuaţiilor loviturii de berbec, fie a ecuaţiilor oscilaţiei în masă.

6. APLICAŢIE

Pentru exemplificare s-a ales cazul unei staţii de pompare cu următoarele caracteristici principale :

$$H_G = 41 \text{ m}, \quad Q_P = 9 \text{ m}^3/\text{s}, \quad L = 760 \text{ m}, \quad D = 1\,900 \text{ mm}.$$

S-a studiat soluţia de protecţie a staţiei la lovitura de berbec, cu rezervor de aer plasat lîngă staţie.

S-au analizat mai multe variante şi s-a reţinut ca optimă soluţia care constă dintr-un rezervor de aer cu următoarele caracteristici :

V_0=25 m³ (volumul de aer la presiunea de regim),

V_t=60 m³ (volumul total al rezervorului),

d= 700 mm (diametrul conductei de legătură), care realizează o rezistenţă hidraulică de valoare $R = 0{,}55\, Q_R^2$.

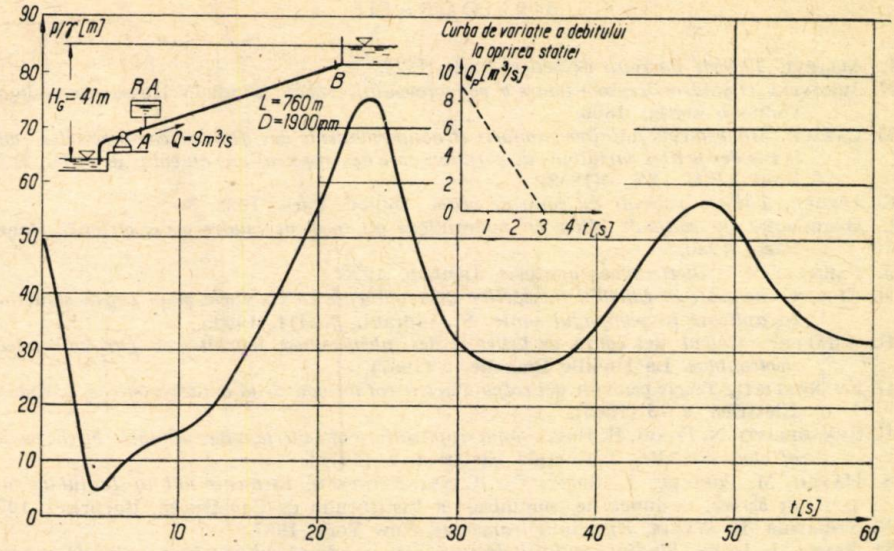


Fig. 5. — Curbele de variație în timp a presiunii apei din conducta de refulare — în secțiunea rezervorului, după oprirea stației.

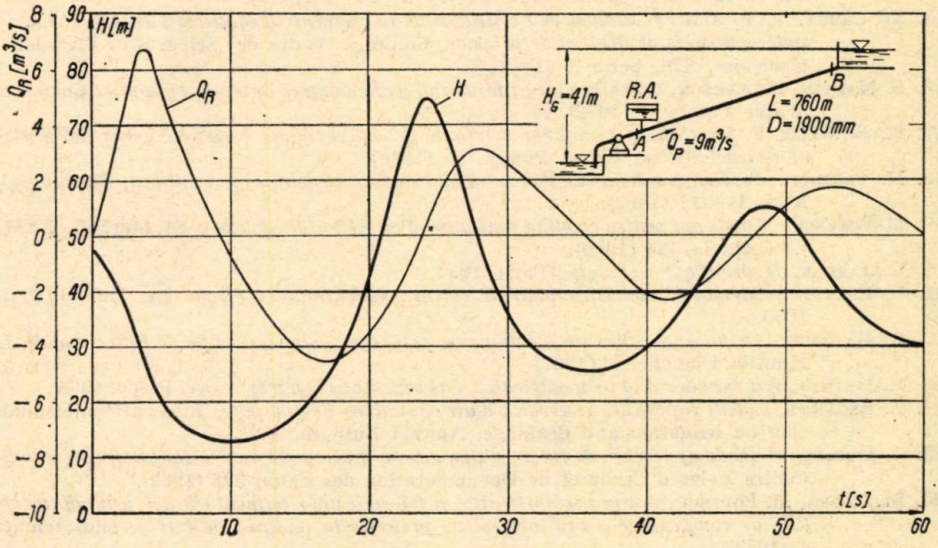


Fig. 6. — Curbele de variație a presiunii pernei de aer (H) și a debitului de schimb rezervor conductă (Q_R).

În figurile 5 și 6 sînt prezentate curbele de variație în timp a unor parametri ai mișcării, care justifică soluția aleasă.

În încheiere, menționăm că metoda de calcul propusă poate fi extinsă și la calculul sistemelor de rezervoare de aer.

Primită la redacție la 30 august 1976.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Allievi, *Théorie du coup de bélier*, Paris, 1921.
2. N. Jukovski, *O ghidravliceskom udare v vodoprovodnih trubah*, Trudi IV Russkovo vodoprovodnovo sezda, 1899.
3. M. Cazacu, *Mouvements unidimensionnels et nonpermanents des fluides compressibles, dans le cas des petites variations de pression avec des applications au coup de bélier*, Buletinul I.P.B., **XX**, *3*(1958).
4. C. Jaeger, *Théorie générale du coup de bélier*, Dunod, Paris, 1933.
5. L. Bergeron, *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité*, Dunod, Paris, 1950.
6. J. Parmakian, *Waterhammer analysis*, London, 1955.
7. D. Cioc, *Contribuţii la calculul mişcărilor nepermanente în conducte şi la teoria sonicităţii cu aplicare la pompajul sonic*, St. hidraul., **XVIII**, 1968.
8. R. Chappey, *Calcul des coups de bélier et des phénomènes transitoires par calculateurs électronique*. La Houille Blanche, *2* (1967).
9. G. Evangelisti, *Teorie generale del colpo d'ariete col metodo della caractteristiche*, L'Energia Elettrica, *2—3* (1965).
10. G. Evangelisti, N. Boari, R. Rossi, *Some applications of waterhammer analysis by the method of characteristics*, L'Energia Elettrica, *1*, (1973).
11. S. Hâncu, M. Popescu, I. Jelev, Gh. Constantinescu, *Elemente noi în studiul loviturii de berbec*, Sesiunea de comunicări a Institutului de Construcţii, Bucureşti, 1975.
12. V. Streeter, B. Wylie, *Hydraulic transients*, New York, 1967.
13. Şt. Zarea, I. Jelev, *Studiul şocului hidraulic într-o conductă sub presiune protejată cu rezervoare de aer şi castele de echilibru, folosind un calculator numeric*, St. cerc. mec. apl., *2*, (1975), *1* (1976).
14. Şt. Zarea, N. Vasiliu, *Analysis of the pressure waves propagation with a buffer reservoir tapped on a pipe system*, Bul. I.P.B., **XXXV**, *1* (1973).
15. Şt. Zarea, N. Vasiliu, *L'analyse de l'efficacité de la cheminée d'équilibre par la méthode des ondes associées de débit et de pression*, Comptes rendus des Sciences de l'Académie Française, **276**, Série A (1973).
16. S. Martin, H. Jakson, *Combined surge tank and waterhammer analysis by digital Computer*, Water Power, *4* (1972).
17. H. Sattler, F. Strohmer, *Computer solutions to waterhammer problems using the method of characteristics*, Water Power, *10* (1974).
18. M. Popescu, *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, St. hidraul., **XXI**, 1—227 (1969).
19. M. Popescu, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*. St. hidraul., **XXIII**, I.S.C.H., 1—174 (1970).
20. C. Jaeger, *Hydraulique technique*, Paris, 1954.
21. L. Escande, *Méthodes nouvelles pour le calcul des cheminées d'équilibre*, Dunod, Paris, 1950.
22. A. Gaulhet, *La protection des installations de pompage contre les coups de bêlier d'onde*, La Houille Blanche, *2* (1967).
23. K. Haindl, *Air chamber and its modifications as anti-waterhammer device*, Praga, 1968.
24. L. Escande, *Calcul rapide des reservoirs d'air de stations de pompage*, International commission on irrigation and drainage, Annual Bulletin, 1963.
25. A. Schlag, *Méthode approchée de calcul d'une cloche à air pour une installation de pompage*, Centre Belge d'Etude et de Documentation des Eaux, 228 (1962).
26. Şt. Zarea, M. Popescu, *Asupra semnificaţiei şi folosirii unor termeni tehnici privind instalaţiile de compensare a debitului şi de protecţie la lovitura de berbec*, Hidrotehnica, *4* (1973).

ALGORITM ŞI PROGRAM PENTRU DIMENSIONAREA HIDRAULICĂ A CAMERELOR SPIRALE ÎN BETON

C. BUDA, ŞT. POPESCU

Institutul politehnic Iaşi

Obişnuit, calculul hidraulic al camerelor spirale în beton se face prin metoda grafică. Cu posibilităţile oferite de calculatorul electronic cifric, aplicarea metodei analitice este mult mai expeditivă şi prezintă avantajul uşoarei obţineri a unor variante diverse dintre care se poate alege cea mai convenabilă.
Se dă algoritmul de calcul şi programul în limbaj FORTRAN IV pentru calculatorul FELIX-256-C şi se face testarea pe un exemplu numeric.

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE (TEORETICE)

În vederea îmbunătăţirii randamentului turbinelor reactive, accesul apei în acestea se realizează printr-o antecameră, care în cazul turbinelor de putere mare devine cameră spirală.

Camera spirală asigură :

— distribuţia uniformă a debitului pe conturul exterior al aparatului director :

$$Q_{\varphi_i} = Q \frac{\varphi_i}{2\pi}, \tag{1}$$

$$c_r = \frac{Q}{2\pi R_s b_0}, \tag{2}$$

— la principalele regimuri de funcţionare, unghiurile de atac ale paletelor statorului şi ale aparatului director să fie optim,

$$\frac{c_r}{c_u} = \operatorname{tg} \alpha'_{opt}, \tag{3}$$

— vitezele medii şi cele locale să nu depăşească valorile admisibile

$$c \leqslant c_{adm}. \tag{4}$$

Camerele spirale în beton se utilizează pentru căderi $H<35$ m (de exemplu, centrala hidroelectrică de la Porţile de Fier). Domeniul lor poate fi însă extins pînă la $H<100$ m prin căptuşire cu tole de oţel.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 4, 1977, P. 513 – 520

Din punct de vedere constructiv, camera spirală este determinată prin vederea în plan orizontal şi prin secţiuni transversale la diferite unghiuri φ_i(fig. 1 *a*).

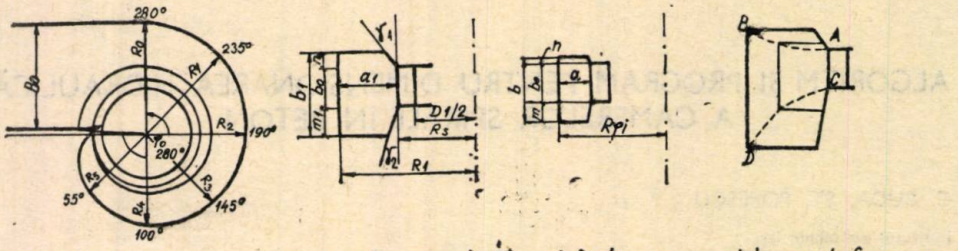


Fig. 1

Secţiunea transversală de intrare poate fi determinată şi de următoarele elemente :

— unghiurile γ_1 şi γ_2,
— înălţimea statorului b_0,
— lăţimea camerei a_1,
— rapoartele constructive

$$\rho_b = \frac{b_1}{a_1}, \tag{5}$$

$$\rho_m = \frac{m}{b_1}. \tag{6}$$

Elementele determinante ale secţiunilor transversale intermediare pot fi stabilite cunoscînd (fig. 1 *d*)

— raza exterioară a camerei R_{φ_i},
— ecuaţiile curbelor AB şi CD pe care se sprijină vîrfurile exterioare ale secţiunilor intermediare; de obicei se recurge la o lege parabolică şi anume, o parabolă pătratică pentru curba CD şi cubică pentru curba AB.

Forma constructivă şi dimensiunile camerei spirale depind de parametri funcţionali ai turbinei şi de condiţiile tehnico-economice de realizare a hidrocentralei.

Ipotezele utilizate în calculul hidraulic al camerelor spirale sînt :

— componenta tangenţială a vitezei medii este constantă (pentru calcule preliminare)

$$c_{u\varphi} = c_{u1} = \text{const.} \tag{7}$$

— momentul vitezei în raport cu axul rotorului este constant (în calcule mai precise)

$$c_u \cdot r = \text{const.} \tag{8}$$

Relaţia (8) poate fi dedusă considerînd scurgerea apei prin camera spirală ca mişcare axial-simetrică [1].

Debitul ce trece prin secţiunea camerei spirale indicată de unghiul φ_i şi raza R_i se calculează cu relaţia

$$Q_{\varphi_i} = \int_{R_\xi}^{R_{\varphi_i}} c_u \cdot b(r) \mathrm{d}r$$

sau, ţinînd seama de (8),

$$Q_{\varphi_i} = C \cdot I, \tag{9}$$

unde

$$I = \int_{R_\xi}^{R_{\varphi_i}} \frac{b(r)}{r} \mathrm{d}r. \tag{10}$$

2. ALGORITMUL DE CALCUL

Algoritmul şi apoi programul pentru dimensionarea hidraulică a camerelor spirale în beton au fost întocmite în ipoteza a doua.

ETAPA I. Calculul secţiunii iniţiale.

1) Stabilirea debitului în secţiunea iniţială aplicînd relaţia (1),

$$Q_1 = Q \frac{\varphi_1}{2\pi}. \tag{11}$$

2) Stabilirea componentei tangenţiale a vitezei medii în secţiunea iniţială. Trebuie să se ţină seama de considerentele din relaţiile (2), (3), (4) sau se pot utiliza formule empirice, ca, de exemplu [2],

$$c_{u1} = (1{,}42 - 0{,}33 \cdot \lg H)\sqrt{H}. \tag{12}$$

3) Calculul ariei secţiunii iniţiale

$$S_{\varphi_1} = \frac{Q_1}{c_{u1}}. \tag{13}$$

4) Exprimarea ariei secţiunii iniţiale în funcţie de elementele geometrice caracteristice :

$$S_{\varphi_1} = a_1 b_1 - \frac{m^2 \mathrm{tg}\,\gamma_2 + n^2 \mathrm{tg}\gamma_1}{2} \tag{14}$$

5) Exprimarea ariei secțiunii inițiale în funcție de lățimea camerei a_1 și rapoartele constructive ρ_b, ρ_m date de relațiile (5), (6)

$$S_{\varphi_1} = a_1^2 \left\{ \rho_b - \frac{1}{2} \rho_b^2 [\rho_m^2 \operatorname{tg} \gamma_2 + (1 - \rho_m)^2 \operatorname{tg} \gamma_1] \right\} +$$

$$+ a_1 \rho_b b_0 (1 - \rho_m) \operatorname{tg} \gamma_1 - \frac{b_0^2 \operatorname{tg} \gamma_1}{2}. \tag{15}$$

6) Determinarea lățimii camerii a_1,

$$a_1 = \frac{\sqrt{\theta_2^2 + 4\theta_1\theta_3} - \theta_2}{2\theta_1}, \tag{16}$$

în care

$$\theta_1 = \rho_b - \frac{1}{2} \rho_b^2 [\rho_m^2 \operatorname{tg} \gamma_2 + (1 - \rho_m)^2 \operatorname{tg} \gamma_1], \tag{17}$$

$$\theta_2 = \rho_b b_0 (1 - \rho_m) \operatorname{tg} \gamma_1, \tag{18}$$

$$\theta_3 = \frac{b_0^2 \operatorname{tg} \gamma_1}{2} + S_{\varphi_1}. \tag{19}$$

7) Calculul celorlalte elemente geometrice caracteristice ale secțiunii inițiale.

$$R_1 = R_s + a_1, \tag{20}$$

$$b_1 = \rho_b \cdot a_1, \tag{21}$$

$$m_1 = \rho_m \cdot b_1, \tag{22}$$

$$n_1 = b_1 - b_0 - m_1. \tag{23}$$

ETAPA A II-a. Determinarea constantei C a camerii spirale.
8) Calculul integralei (10) pentru secțiunea inițială,

$$I = \int_{R_s}^{R_1} \frac{b(r)}{r} \, dr, \tag{24}$$

ținînd seama de configurația secțiunii transversale a camerii spirale. Se procedează astfel :

$$I = I_{\text{I}} + I_{\text{II}} + I_{\text{III}}, \tag{25}$$

cu

$$I_{\mathrm{I}} = \int_{R_{\mathrm{I}}}^{R_1} \frac{b(r)}{r}\,\mathrm{d}r, \tag{26}$$

$$I_{\mathrm{I}} = b \cdot \ln(R_1/R_{\mathrm{I}}), \tag{26'}$$

$$R_{\mathrm{I}} = R_s + m_1 \cdot \mathrm{tg}\gamma_2, \tag{27}$$

$$I_{\mathrm{II}} = \int_{R_{\mathrm{II}}}^{R_{\mathrm{I}}} \frac{b(r)}{r}\,\mathrm{d}r, \tag{28}$$

$$I_{\mathrm{II}} = (b_0 + n - R_s \cdot \mathrm{ctg}\,\gamma_2) \cdot \ln\,(R_{\mathrm{I}}/R_{\mathrm{II}}) + \\ + m - n \cdot \mathrm{tg}\,\gamma_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\gamma_2, \tag{28'}$$

$$R_{\mathrm{II}} = R_s + n \cdot \mathrm{tg}\,\gamma_1, \tag{29}$$

$$I_{\mathrm{III}} = \int_{R_s}^{R_{\mathrm{II}}} \frac{b(r)}{r}\,\mathrm{d}r, \tag{30}$$

$$I_{\mathrm{III}} = [b_0 - R_s(\mathrm{ctg}\,\gamma_1 + \mathrm{ctg}\,\gamma_2) \cdot \ln(R_{\mathrm{II}}/R_s) + \\ + n(1 + \mathrm{tg}\,\gamma_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\gamma_2). \tag{30'}$$

9) Calculul constantei C din relația (9).

$$C = \frac{Q_1}{I} \tag{31}$$

ETAPA A III-a. Calculul secțiunilor intermediare.

10) Stabilirea elementelor geometrice ale secțiunii intermediare de ordinul i:

$$R_{\varphi i} = R_{\varphi i-1} - \Delta R, \tag{32}$$

$$a = R_\varphi - R_s, \tag{33}$$

$$m = a\left[\alpha_1(a - a_1) + \frac{m_1}{a_1}\right], \tag{34}$$

$$n = a\left[\alpha_2(a^2 - a_1^2) + \frac{n_1}{a_1}\right], \tag{35}$$

$$b = m + n + b_0, \tag{36}$$

$$S_\varphi = a \cdot b - \frac{m^2 \mathrm{tg}\,\gamma_2 + n^2 \mathrm{tg}\,\gamma_1}{2}. \tag{37}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

11) Calculul integralei (10). Se procedează la fel ca la punctul 8.
12) Calculul debitului corespunzător secţiunii de ordin i cu relaţia (9).
13) Stabilirea unghiului φ_i corespunzător secţiunii de ordin i din relaţia (1)

$$\varphi_i = 2\pi \frac{Q_{\varphi_i}}{Q}. \tag{38}$$

3. PROGRAMUL DE CALCUL

Programul de calcul a fost întocmit pe baza organigramei din figura 2. Semnificaţia simbolurilor şi transcrierea lor în limbajul FORTRAN IV, cu respectarea regulilor de declaraţie implicită, sînt următoarele :

a — lăţimea camerei spirale în m, [A],
a_1 — idem, pentru secţiunea iniţială, [A1],
α_1 — coeficient în ecuaţia parabolei pătratice din relaţia (34) [ALF1],
α_2 — coeficient în ecuaţia parabolei cubice din relaţia (35) [ALF2],
α'_{opt} — unghiul optim dintre vitezele c_u şi c la intrarea în stator, în rad. [ALF PO],

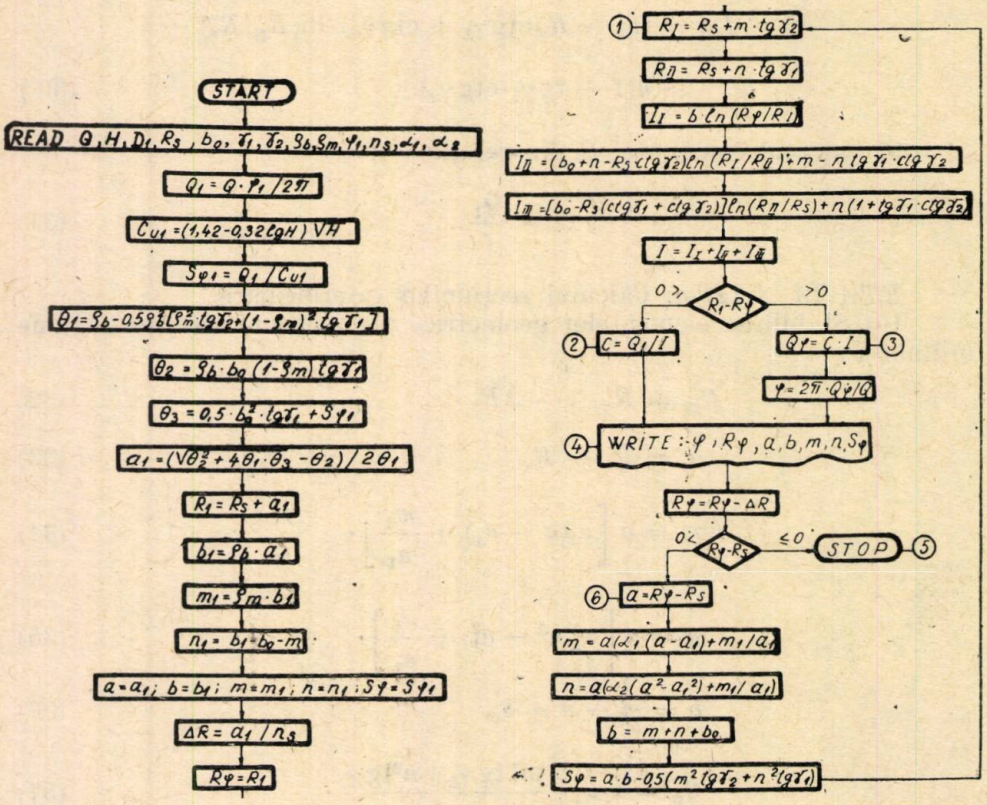


Fig. 2

b — înălțimea totală a camerei spirale în m, [B],
b_1 — idem, pentru secțiunea inițială [B1],
b_0 — înălțimea statorului în m [BO],
C — constanta camerei spirale din relația (9) [C],
c — viteza absolută a apei în camera spirală în m/s [CV],
c_{ad} — valoarea maximă admisibilă pentru c în m/s [CAD],
c_r — componenta radială a vitezei c, [CR],
c_u, c_{ui} — componenta tangențială a vitezei c, [CU],
c_{u1} — idem pentru secțiunea inițială, [CU1],
γ_1, γ_2 — unghiuri caracteristice pentru secțiunea transversală a camerei spirale, în rad., din figura 1 *a*, *c*. [GM1, GM2],
D_1 — diametrul exterior al rotorului turbinei în m [D1],
ΔR — variația razei R între două secțiuni succesive prin camera spirală în m, [DTR],
φ, φ_i — unghiul ce precizează secțiunea de ordin i prin camera spirală, în rad, [FI] (unghiul de înfășurare a spiralei),
φ_1 — idem, pentru secțiunea inițială [FI 1],
H — sarcina turbinei m, [H],
I — integrala din relațiile (24, 25) [XI],
I_I integrala din relațiile (26, 26′) [XI 1],
I_{II} integrala din relațiile (28, 28′) [XI 2],
I_{III} integrala din relațiile (30, 30′) [XI 3],
m — adîncimea camerei spirale sub stator, m, [AM],
m_1 — idem, pentru secțiunea inițială, [AM 1],
n — înălțimea camerei spirale deasupra statorului în m, [AN],
n_1 — idem, pentru secțiunea inițială [AN 1],
n_s — numărul secțiunilor intermediare de calcul [N],
ψ_1 — coeficient de viteză pentru secțiunea inițială [PSI 1],
Q — debitul turbinei m³/s, [Q],
Q_{φ_1} — debitul ce trece prin secțiunea de ordin i [QFI]
Q_1, Q_{φ_1} idem, pentru secțiunea inițială [Q 1],
R_φ, R_{φ_i} — raza exterioară a camerei spirale pentru secțiunea de ordin i, m, [RFI],
R_1, R_{φ_1} — idem, pentru secțiunea inițială [R 1],
R_I — raza dată de relația (27), [RI],
R_{II} — raza dată de relația (29) [RII],
S_φ — aria secțiunii transversale de ordin i, m², [SFI],
S_{φ_1} — idem, pentru secțiunea inițială [SF 1],
θ_1 — expresie dată de relația (17), [TET 1],
θ_2 — expresie dată de relația (18), [TET 2],
θ_3 — expresia dată de relația (19) [TET 3]

4. EXEMPLU NUMERIC

Programul de calcul a fost testat pe următorul exemplu numeric : $Q = 275$ m³/s ; $H = 30{,}0$ m ; $D_1 = 4{,}0$ m ; $R_s = 3{,}12$ m ; $b_0 = 1{,}65$ m ; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}52$ rad ; $\rho_b = 1{,}8$; $\rho_m = 0{,}38$; $\varphi_1 = 3{,}65$ rad ; $n_s = 10$; $\alpha_1 = 0{,}2$; $\alpha_2 = 0{,}03$.

Rezultatele sînt concretizate în tabelul 1

Tabel 1

Nr. crt.	(rad)	R(m)	a(m)	b(m)	m(m)	n(m)	S(m²)	Nr. secţ.
1	3,650	6,318	3,198	5,756	2,187	1,919	15,983	1
2	3,039	5,998	2,878	4,994	1,785	1,559	12,764	2
3	2,494	5,678	2,558	4,325	1,423	1,252	10,036	3
4	2,013	5,358	2,238	3,745	1,102	0,993	7,752	4
5	1,594	5,039	1,919	3,246	0,822	0,775	5,863	5
6	1,231	4,719	1,599	2,824	0,582	0,592	4,318	6
7	0,919	4,399	1,279	2,472	0,384	0,438	3,065	7
8	0,650	4,079	0,959	2,185	0,227	0,308	2,054	8
9	0,414	3,760	0,640	1,956	0,110	0,195	1,236	9
10	0,201	3,440	0,320	1,779	0,035	0,095	0,566	10
11	0,000	3,120	0,000	1,650	0,000	0,000	0,000	

Datele obţinute au fost verificate prin metoda grafică, punînd în evidenţă, o bună coincidenţă.

Programul a fost prelucrat pe calculatorul electronic numeric FELIX — 256 — C, de la Centrul teritorial de calcul Iaşi; timpul de calcul a fost de 1′ 30″.

5. CONCLUZII

Avînd în vedere precizia, rapiditatea şi siguranţa calculelor, proiectantul poate supune analizei mai multe variante constructive de camere spirale, într-un timp util.

Astfel, lucrarea contribuie la optimizarea proiectării unei construcţii hidrotehnice cu mare pondere în costul hidrocentralelor.

Primită la redacţie la 20 mai 1976.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Buda, Ştefan Popescu, *Calculul de rezistenţă mecanică al camerelor spirale metalice*, St. cerc. mec. apl., **31**, *1* (1972).
2. C. Buda, *Justificarea camerei spirale şi a tubului aspirator la turbinele hidraulice reactive*, Ed. IPI, 1970, Iaşi.
3. G. I. Krivcenko, *Nasosi i ghidroturbini*, Moskva, 1970.

CALCULUL HIDRAULIC LA REGIMURI TRANZITORII AL UZINELOR HIDROELECTRICE ŞI STAŢIILOR DE POMPARE CU ADUCŢIUNI MIXTE PREVĂZUTE CU REGULATOARE AUTOMATE

de MIHAIL POPESCU
Institutul de cercetări hidrotehnice

Se abordează problema calculului hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice şi staţiilor de pompare cu aducţiuni alcătuite din canale cu regulatoare automate şi galerii sub presiune prevăzute cu castele de echilibru. Se foloseşte o metodă numerică care respectă condiţiile de racordare a celor două mişcări nepermanente dominante ale sistemului : cu nivel liber şi sub presiune.
Se prezintă cîteva din rezultatele unor studii hidraulice concrete care pun în evidenţă mărimile oscilaţiilor extreme ale apei din canalul de aducţiune şi castelul de echilibru, precum şi unele aspecte interesante privind stabilitatea hidraulică de funcţionare a acestor sisteme.

Între uzinele hidroelectrice şi staţiile de pompare moderne, concepute pe scheme hidrotehnice complexe, se situează şi cele cu aducţiuni mixte cu regulatoare automate, ca de exemplu, schemele hidrotehnice I şi II analizate în lucrarea de faţă. (fig. 1 şi fig. 2).

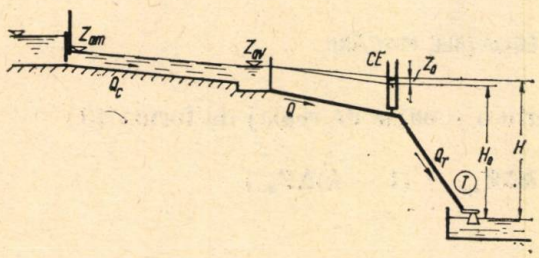


Fig. 1. — Schema hidrotehnică I (uzină hidroelectrică).

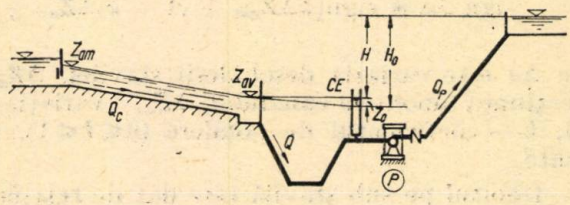


Fig. 2. — Schema hidrotehnică II (staţie de pompare).

Schema hidrotehnică I (cu uzină hidroelectrică) este alcătuită din rezervor de alimentare, stavilă cu reglare automată a nivelului apei din canal, canal de aducţiune cu nivel liber, cameră de încărcare, galerie de

aducţiune sub presiune, castel de echilibru şi turbină cu reglare automată la putere constantă.

Schema hidrotehnică II (cu staţie de pompare) este alcătuită din aceleaşi elemente ca şi schema hidrotehnică I, cu deosebirea că în locul turbinei cu regulator la putere constantă este o turbopompă cu clapet care se închide la curgere inversă şi cu conductă de refulare a apei într-un rezervor cu nivel constant.

Reglajul stavilei amonte se realizează cu ajutorul unui dispozitiv cu acţionare electrică, în funcţie de variaţia nivelului apei în canal în două secţiuni. Studiul comportării la regimuri tranzitorii a sistemului hidraulic corespunzător schemelor hidrotehnice I şi II poate fi efectuat rezolvînd ecuaţiile mişcării apei fie cu metode analitice, fie cu metode numerice.

Metodele analitice implică în general liniarizarea ecuaţiilor mişcării precum şi adoptarea unor ipoteze de calcul simplificatoare şi din acest motiv soluţiile care se obţin sînt aproximative [2].

Metodele numerice permit rezolvarea ecuaţiilor mişcării cu orice grad de precizie dorit şi în prezent, dispunînd de calculatoare electronice, pot fi aplicate pe scară largă.

În lucrarea de faţă, cu ajutorul unor metode numerice, se abordează problema calculului hidraulic la regimuri tranzitorii al sistemelor concepute pe scheme hidrotehnice de tip I şi II.

1. MODELUL ŞI ALGORITMUL DE CALCUL

1.1. ECUAŢIILE MIŞCĂRII

Stavila amonte. Se admite o ecuaţie de reglaj de forma [3]

$$\Delta a = r[k\Delta Z_{am} + (1 - k)\Delta Z_{av}] \tag{1}$$

sau

$$\operatorname{sign} \Delta a \neq \operatorname{sign}[k\Delta Z_{am} + (1 - k)\Delta Z_{av} \pm \varepsilon_z]; \ \Delta a = m\Delta t, \tag{2}$$

unde Δa este variaţia deschiderii stavilei, ΔZ_{am} — variaţia nivelului apei în secţiunea amonte a canalului, ΔZ_{av} — variaţia nivelului apei în secţiunea aval, k — coeficientul de pondere ($0 \leqslant k \leqslant 1$), ε_z — domeniul de insensibilitate.

Debitul pe sub stavilă este dat de relaţia

$$Q_{am} = \mu b a \sqrt{2g(H_{am} - Z_{am})}, \tag{3}$$

unde H_{am} este cota apei în rezervor, b — lăţimea stavilei, μ — coeficient de debit.

Canalul de aducţiune cu nivel liber. Mişcarea apei în canal poate fi considerată gradual variată şi este, deci, descrisă de ecuaţiile lui Saint Vénant :

$$B\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{Q|Q|}{K^2}=0, \tag{5}$$

unde B este lăţimea canalului la oglinda apei, z — cota nivelului apei în canal, Q — debitul, v — viteza medie în secţiune, ω — aria secţiunii de curgere, K — modulul de debit, x — distanţa în lungul canalului, t — timpul, g — acceleraţia gravitaţiei.

Camera de încărcare. Se scrie ecuaţia de continuitate sub forma

$$Q_C=\Omega\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+Q, \tag{6}$$

unde Q_C este debitul în secţiunea amonte a camerei, Ω — aria secţiunii orizontale a camerei.

Sistemul galerie-castel. Ecuaţiile generale ale mişcării oscilatorii din sistem sînt următoarele :

$$\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+Z+P+R+E=0, \tag{7}$$

$$Wf=F\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}+Q_T, \tag{8}$$

unde L este lungimea galeriei, W — viteza apei în galerie, Z — cota nivelului apei din castel, P — pierderea de sarcină longitudinală din galerie, R — pierderea de sarcină locală din strangularea castelului, E — termenul corespunzător energiei cinetice a apei în secţiunea din dreptul castelului, f — aria secţiunii galeriei de aducţiune, F — aria secţiunii orizontale a castelului de echilibru, Q_T — debitul turbinat.

Turbina (în cazul schemei hidrotehnice I).

Pentru calculul oscilaţiilor extreme ale nivelurilor apei din sistem, se admite o relaţie de debit generală de forma

$$Q_T=Q_T(t). \tag{9}$$

Pentru studiul stabilităţii hidraulice a sistemului, se admite următoarea ecuaţie de reglaj, în cazul funcţionării uzinei într-o reţea separată :

$$\eta g Q_T(H+Z+R-K_T Q_T^2)=N_2 \tag{10}$$

unde H este căderea brută, N — puterea turbinelor, η — randamentul turbinelor, K_T — coeficient de pierdere de sarcină longitudinală pe conducta forţată.

Pompa (în cazul schemei hidrotehnice II). Se admite o relație de debit generală de forma

$$Q_P = Q_P(t). \tag{11}$$

În condițiile existenței unui clapet pe conducta de refulare la pompă, mișcarea oscilatorie în sistemul canal-galerie poate fi considerată independent de mișcarea apei în conducta de refulare.

1.2. ALGORITMUL DE CALCUL

Calculul mișcării mixte din aducțiunea sistemului se efectuează simultan, prin metode diferite de calcul, atît pentru mișcarea apei din canal cît și pentru cea din galeria sub presiune, cu respectarea condițiilor de racordare din secțiunea comună a canalului și galeriei.

Pentru calculul mișcării nepermanente a apei din canalul de aducțiune poate fi folosit fie algoritmul prezentat în lucrarea [3], fie o variantă îmbunătățită a algoritmului din lucrarea [1], pe care o vom prezenta în continuare.

Exprimînd viteza v în funcție de debit prin relația

$$v = \frac{Q}{\omega}; \tag{12}$$

ecuațiile (4) și (5) iau forma

$$B\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{g\omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\omega^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{K^2} = 0. \tag{14}$$

Condițiile inițiale și la limită necesare rezolvării acestor ecuații constau în cunoașterea la un moment oarecare a repartiției debitelor și nivelurilor în fiecare secțiune de calcul:

$$Z_{t=t_0} = Z(x) \text{ și } Q_{t=t_0} = Q(x), \tag{15}$$

precum și a condițiilor curgerii în amontele și avalul canalului în funcție de modul de racordare a biefurilor.

Pentru transcrierea în diferențe finite a ecuațiilor (13) și (14) la un pas de timp Δt, se consideră o porțiune de canal de lungime Δx cuprinsă între secțiunile de calcul i, $i+1$ numerotate din amonte spre aval. Adoptînd următoarea formă de scriere în diferențe finite pentru derivatele funcțiilor $Z(x, t)$ și $Q(x, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}[f(x, t+\Delta t) + f(x+\Delta x, t+\Delta t) - f(x, t) - f(x+\Delta x, t)], \tag{16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x}[f(x+\Delta x, t+\Delta t) + f(x+\Delta x, t) - f(x, t+\Delta t) - f(x, t)], \tag{17}$$

sistemul de ecuații (13), (14) devine :

$$\overline{\Delta Z} = -\left[\frac{1}{g\bar{\omega}}\frac{\Delta x}{\Delta t}\delta Q_m + \frac{2\bar{Q}_m}{g\bar{\omega}^2}\Delta\bar{Q} - \frac{\bar{Q}_m^2}{g\bar{\omega}^3}\Delta\bar{\omega} + \Delta x\frac{Q_m|Q_m|}{\bar{K}^2}\right], \quad (18)$$

$$\Delta\bar{Q} = -\bar{B}\frac{\Delta x}{\Delta t}\delta Z_m, \quad (19)$$

unde s-au aplicat următoarele reguli de scriere :

— valorile medii la timpul $\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ se notează cu bară ;

— valorile din secțiunea i se notează cu indicele i, iar cele din secțiunea medie $\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ cu indicele m ;

— creșterea mărimilor după x se notează cu Δ, iar după t cu δ.

Metoda de calcul se bazează pe ideea că, în cadrul unui pas de calcul în care se cunosc mărimile z_i și q_i la timpul t, să se propună mărimile Z_i și Q_i în toate secțiunile de calcul la timpul $T = t + \Delta t$, mărimi care să fie corectate succesiv, pînă ce satisfac ecuațiile lui Saint Vénant în diferențe finite pe toate sectoarele, precum și condițiile la limită.

Pe un sector de calcul oarecare Δx, presupunînd cunoscute mărimile Q_i și Z_{i+1} se pot calcula mărimile Q_{i+1} și Z_i, rezolvînd printr-o metodă iterativă simplă ecuațiile (15), (16).

Fie $C_j(T)$ o curbă a suprafeței libere a apei, definită de valorile Z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, adoptată ca primă aproximație. Aplicînd algoritmul de mai sus din sector în sector, din amonte spre aval, se poate calcula o nouă curbă a suprafeței libere a apei $C_j^*(T)$, caracterizată de valorile Z_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se verifică condiția de precizie,

$$|Z_i^* - Z_i| = |\Delta i| < \varepsilon, \quad (20)$$

în fiecare secțiune de calcul, iar în cazul în care nu este satisfăcută, se propune o nouă curbă a suprafeței libere la timpul T, $C_{j+1}(T)$, determinată de valorile $Z_i + \Delta_i^*$, unde

$$\Delta_i^* = \frac{1}{4}[2\theta\Delta_i + (1 - \theta)(\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1})], \quad (21)$$

iar θ este un coeficient subunitar cuprins între $\frac{1}{2}$ și 1.

Pentru prima propunere $C_0(T)$ se poate lua curba suprafeței libere a apei de la timpul t. Calculul se consideră încheiat pentru un interval de timp Δt, cînd condiția (20) este satisfăcută în toate secțiunile de calcul.

Algoritmul de calcul propus asigură o convergență rapidă a soluției și o stabilitate numerică bună pentru pași de calcul Δx și Δt aleși convenabil. Se pot adopta valori :

$$\Delta t = (5 \div 10) \frac{\Delta x}{|v| + \sqrt{g \frac{\omega}{B}}} \cdot \tag{22}$$

Metoda de calcul poate fi scrisă cu ușurință într-un limbaj algoritmic și folosită pe calculatoare electronice de capacitate medie.

Pentru mișcarea oscilatorie a apei din sistemul galerie-castel se prezintă într-o formă concisă un algoritm de calcul din lucrarea [4].

Se pleacă de la sistemul de ecuații (7), (8), (9).

Pentru rezolvarea numerică a acestui sistem se transcriu ecuațiile în diferențe finite și se folosesc valorile medii ale variabilelor pe intervalul de timp Δt.

Se obține sistemul algebric :

$$\Delta W = 2 \left(\frac{F}{f} \frac{\Delta Z}{\Delta t} - W + \frac{Q_{Tm}}{f} \right), \tag{23}$$

$$\Delta Z = -2 \left[Z + \frac{L}{g} \frac{\Delta W}{\Delta t} + P' \left(W + \frac{\Delta W}{2} \right) \left| W + \frac{\Delta W}{2} \right| + R' V_{sm} |V_{sm}| \right] \tag{24}$$

care se poate scrie într-o formă simplificată astfel :

$$\Delta W = \Phi(\Delta Z),$$
$$\Delta Z = \Psi(\Delta W). \tag{25}$$

Algoritmul de calcul este conceput pe etape, într-o desfășurare iterativă :

Etapa I.

$$\Delta Z_p = \Delta_1, \quad \Delta W = \Phi(\Delta_1) = \delta_1, \quad \Delta Z_c = \Psi(\delta_1),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_1| < \varepsilon.$$

Etapa a II-a.

$$\Delta Z_p = 2\Delta_1 = \Delta_2, \quad \Delta W = \Phi(\Delta_2) = \delta_2, \quad \Delta Z_c = \Psi(\delta_2),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Etapa a III-a.

$$\Delta Z_p = \Delta_1 - \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) \varepsilon_1 = \Delta_3, \quad \Delta W = \Phi(\Delta_3) = \delta_3, \quad \Delta Z_c = \Psi(\delta_3),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_3| < \varepsilon.$$

Dacă condiţia de precizie,

$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| < \varepsilon, \tag{26}$$

este îndeplinită, calculul se consideră încheiat pentru pasul de timp respectiv şi se trece la pasul de calcul următor. În caz contrar calculul se reia de la etapa a III-a, considerînd ca etape I şi II, etapele parcurse II şi III.

Soluţia numerică a problemei este stabilă şi rapid convergentă.

2. APLICAŢII

Cu ajutorul modelului de calcul expus s-a făcut un studiu hidraulic privind calculul oscilaţiilor extreme ale nivelurilor apei în sistem precum şi stabilitatea de funcţionare a unei uzine hidroelectrice proiectate pe o schemă hidrotehnică de tip I, cu următoarele caracteristici* :

Stavila-amonte : reglajul stavilei se face după ecuaţia (2), cu $k = 0$; 0,5 ; 1, $m = \alpha\, m_0$ şi $\alpha = 1$; 3 ;

Canalul de aducţiune : secţiune dreptunghiulară cu $B = 10$ m ; $L_c = 2500-5000$ m ; $i = 0{,}001$;

Camera de încărcare : $\Omega = 1\,000$ m^2 ;

Galeria de aducţiune : $D = 5$ m, $L = 5\,000$ m ;

Castelul de echilibru : $F = 50-100$ m^2, $R = 0{,}001\ Q_c^2$;

Conducta forţată : $D_T = 4$ m ; $L_T = 500$ m ;

Centrala hidroelectrică : $Q_T = 60$ m^3/s, $N = 200$ MW.

În calculul nivelurilor extreme s-au considerat manevre de pornire şi oprire totală a uzinei la debitul maxim $Q_T = 60$ m^3/s, iar rezultatele pentru o variantă de calcul sînt prezentate sub formă grafică în fig. 3.

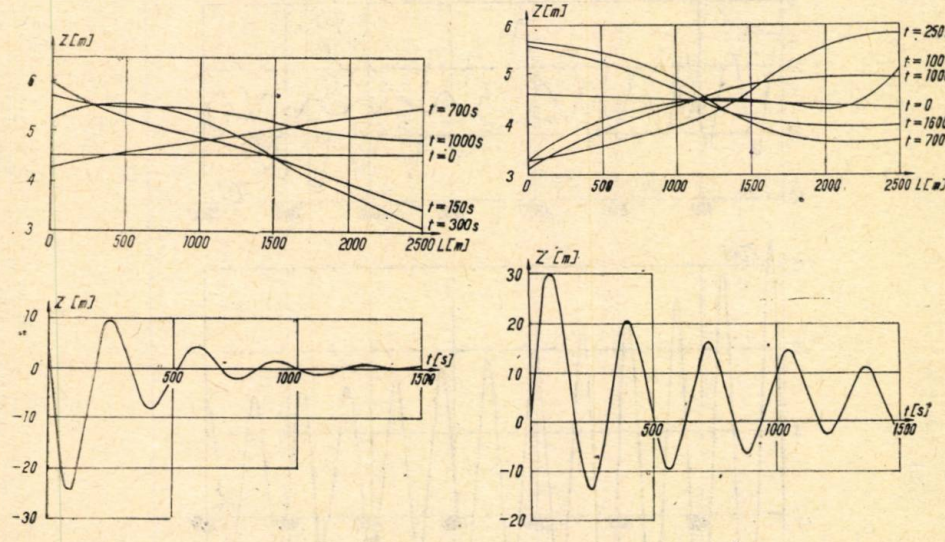


Fig. 3. — Calculul nivelurilor extreme ale apei din canalul de aducţiune şi castelul de echilibru la : *a*) pornirea uzinei ; *b*) oprirea uzinei.

* La efectuarea calculelor a participat V. Cristidis [5].

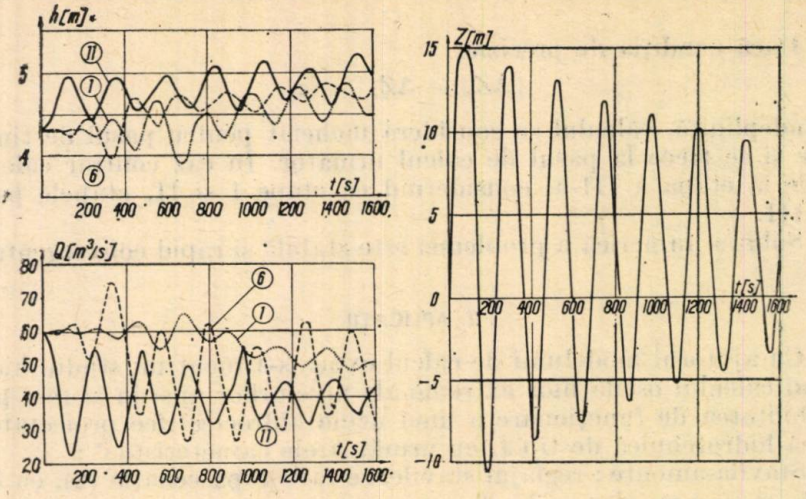

h[m]
5
4
II
I
б
t[s]
200 400 600 800 1000 1200 1400 1600
Q[m³/s]
80
70
60
50
40
30
20
б
I
II
t[s]
200 400 600 800 1000 1200 1400 1600
Z[m]
15
10
5
0
-5
-10
t[s]
200 400 600 800 1000 1200 1400 1600

Fig. 4-*a*

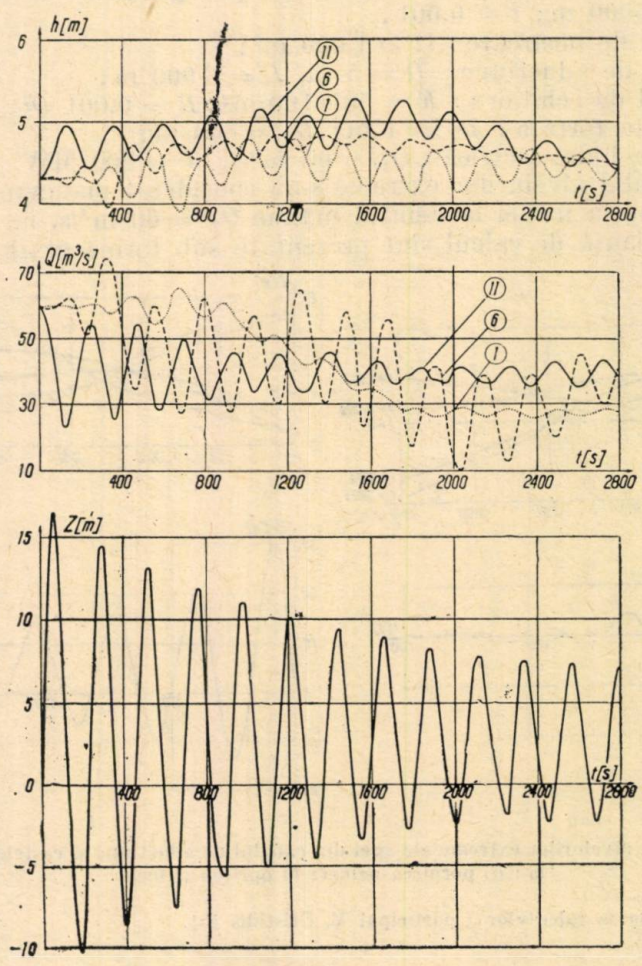

h[m]
6
5
4
II
б
I
t[s]
400 800 1200 1600 2000 2400 2800
Q[m³/s]
70
50
30
10
II
б
I
t[s]
400 800 1200 1600 2000 2400 2800
Z[m]
15
10
5
0
-5
-10
t[s]
400 800 1200 1600 2000 2400 2800

Fig. 4-*b*

Pentru studiul stabilității hidraulice de funcționare a uzinei s-a considerat o manevră de putere la centrală cu $N_1 = 120$ MW și $N_2 = 80$MW și s-a lucrat cu $\Delta x = 500$ m.

Calculele au fost efectuate pentru mai multe combinații de valori ale mărimilor L_c, F, k și α.

Dintre acestea, se prezintă următoarele variante :

a) $L_c = 5\,000$ m ; $F = 50$ m^2 ; $k = 0$; $\alpha = 1$,

b) $L_c = 5\,000$ m ; $F = 50$ m^2 ; $k = 0{,}5$; $\alpha = 3$,

c) $L_c = 2\,500$ m ; $F = 100$ m^2 ; $k = 1$; $\alpha = 1$.

Simularea numerică a mișcării nepermanente a apei din sistem pentru un mare număr de situații concrete întîlnite în funcționarea uzinei a permis punerea în evidență a unor cazuri foarte interesante de instabilitate generală a mișcării (fig. 4*a*, *b*), precum și a posibilităților de transformare a lor în mișcări oscilatorii stabile (fig. 4 *c*).

Primită la redacție la 30 august 1976

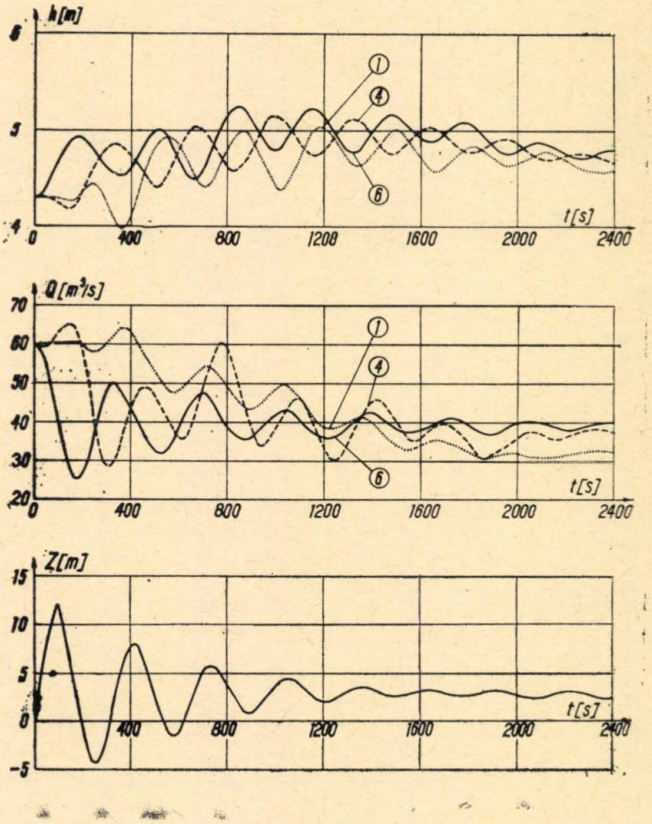


Fig. 4. — Curbele de variație în timp a unor parametri hidraulici ai mișcării apei în sistem.

c

BIBLIOGRAFIE

1. D. Cioc, L. Dogaru, M. Popescu, *O metodă de calcul al mişcării nepermanente a apei din albiile riurilor*, Hidraulica, *10* (1967).
2. S. Gerber, *Étude théorique et expérimentale de la stabilité des chambres d'équilibre situées en aval d'une galérie en charge alimentée par un canal a écoulement libre*, Université de Toulouse, 1954.
3. S. Hâncu, E. Rus, P. Dan, *Stabilitatea hidraulică a canalelor de aducţiune a apei în sistemele de irigaţie cu funcţionare automată*, St. hidraul., **XXVI** (1975).
4. M. Popescu, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, St. hidraul., **XXIII**, p. 1—176 (1970).
5. M. Popescu, V. Cristidis, *Stabilité du fonctionnement des usines hydroélectriques et des stations de pompage à adductions mixtes munies de régulateurs automatiques*, Simposion AIRH, Bucarest, 1976.

ANALIZA STRUCTURAL-GEOMETRICĂ A MECANISMELOR SINGULARE 4C–5C

CHR. PELECUDI
Institutul politehnic București
DAN IONESCU
Academia Militară

Se analizează posibilitățile de mișcare ale mecanismelor singulare, $4\,C - 5\,C$ concretizate prin faptul că unghiurile de încrucișare α_i au valori particulare 0 sau $\pi/2$. Aceste particularizări produc transformări importante în setul ecuațiilor de rotații și asupra mobilității mecanismelor. Totodată sînt eliminate situațiile singulare din formulele generale de calcul cinematic. Mecanismele $4\,C$ și $5\,C$ sînt întabelate unde, de asemenea, sînt redate caracteristicile lor cinematice.

Mecanismele pC sînt mecanismele tridimensionale formate cu p cuple cilindrice C. Aceste cuple C ($f = 2$) sînt cele mai generale cuple uniaxe-bimobile și din ele pot fi derivate cuplele fundamentale R, T, H sau chiar $\mathbb{C}$ ($f = 1$) unimobile. Varietatea mecanismelor pC este foarte mare dacă se înlocuiesc unele cuple C prin cuplele R, T, H, $\mathbb{C}$. În acest caz, mecanismele posibile, diferențiate prin natura cuplelor, se pot grupa în raport cu indicii φM, în care M arată mobilitatea, iar φ indică familia respectivă :

$$\begin{aligned} &4C-02\,;\quad H3C-01\,;\quad 2H2C-11\,;\quad 3HC-21\,;\quad 4H-31,\\ &5C-04\,;\quad H4C-03\,;\quad 2H3C-02\,;\quad 3H2C-01\,;\quad 4HC-11\,;\,5H-21. \end{aligned} \tag{1}$$

Dacă familia de încadrare a mecanismului este superioară sau inferioară celei întabelate, mobilitatea mecanismului respectiv crește sau scade cu același număr de unități, aceste mecanisme fiind monoconture.

Dar deplasările unghiulare ale mecanismelor spațiale depind, prin setul ecuațiilor de rotații, în primul rînd de unghiurile de încrucișare. Valorile particulare $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi/2$ fie modifică structura ecuațiilor fie chiar anulează prin identitate unele ecuații, astfel încît în formulele generale de rezolvare intervin unele singularități-nedeterminări.

În setul ecuațiilor de rototranslații sînt cuprinse pe lîngă unghiurile de încrucișare α și normalele de încrucișare a. Anularea sau valori particulare ale lungimilor a_i modifică de asemenea ecuațiile și formulele de calcul. Trebuie avut însă în vedere să nu existe concomitent $\alpha_i = 0$ și $a_i = 0$, deoarece în acest caz cele două cuple ale elementului binar respectiv au axele suprapuse și cuplele sînt confundate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 4, 1977, P. 531 – 540

În consecință, este necesară în primul rînd o analiză structurală pe baza ecuațiilor de poziții ale mecanismelor spațiale, pentru valorile unghiurilor de încrucișare $\bar{\alpha}_i = 0$ sau $\bar{\alpha}_i = 1$. Dacă toate unghiurile $\alpha_i = 0$ sînt nule, ecuațiile de rotații se transformă în identități. Mecanismele care au toate axele cuplelor paralele între ele sînt de familia a doua, $\varphi = 2$, elementele acestora prezentînd trei translații $T_x\ T_y\ T_z$ și o rotație R_z. Dacă se pierde translația T_z, mecanismele devin de familia a treia, $\varphi = 3$, fiind mecanisme plane. Dacă toate lungimile $a_i = 0$ și $s_i = 0$ sînt nule, ecuațiile de rototranslații sînt identic nule. Mecanismele respective sînt mecanisme sferice de familia a treia, $\varphi = 3$.

Tabela 1, a mecanismelor singulare $4C$ cuprinde analiza acestor mecanisme în raport cu valorile particulare 0 și $\pi/2$ ale fiecărui unghi de încrucișare din secvența α_0; α_1; $\alpha_2 = \alpha_2^*$; $\alpha_3 = \alpha_1^*$; $\alpha_4 = \alpha_0^* = \alpha_0$. Notația sau indicativul NI (coloana 1) al mecanismului a fost adoptat în raport cu valorile sinusurilor unghiurilor respective. Soluția 0000 a fost menționată anterior. În continuare se va considera totdeauna $\bar{\alpha}_0 = 1$ ($\alpha_0 = \pi/2$) astfel ca triedrul bazei fixe TBF ($\bar{n}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$) corespunde cu triedrul său reciproc $\mathcal{T}B\mathcal{F}(\bar{n}^0\ \bar{e}^0,\ \bar{e}^1)$, fiind un triedru ortonormat. Pe de altă parte trebuie observat că cel puțin două unghiuri α trebuie să fie de $\pi/2$ pentru ca lanțul cinematic să se poată închide. Rămîn deci posibilitățile : 1 100 ; 1.010 ; 1.110 ; 1.111, din care în tabel s-au trecut numai indicii secvenței $\bar{\alpha}_1$; $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2^*$; $\bar{\alpha}_1^*$

Ecuațiile de poziții sînt formate din setul de rototranslații sau de contur :

$$s_0A_0(0) + s_1A_1(0) + s_2A_2(\alpha_1\theta_1) + s_3A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) + a_0D_0(1) + a_1D_1(\theta_1) +$$
$$+ a_2D_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) + a_3D_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) = 0,$$

$$s_0B_0(\alpha_0) + s_1B_1(0) + s_2B_2(\alpha_1\theta_1) + s_3B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) + a_0E_0(0) + a_1E_1(\theta_1) +$$
$$+ a_2E_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) + a_3E_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) = 0, \qquad (2)$$

$$s_0C_0(0) + s_1C_1(\alpha_0) + s_2C_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1) + s_3C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) + a_0F_0(0) + a_1F_1(\alpha_0\theta_1) +$$
$$+ a_2F_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2) + a_3F_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) = 0,$$

la care se adaugă unul din seturile ecuațiilor de rotații sau ale axelor (normalelor), adică

$$\begin{aligned} A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) &= A_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*), \\ B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) &= C_2^*(\alpha_1^*\alpha_0^*\theta_1^*), \\ C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) &= B_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*) \end{aligned} \qquad (3)$$

sau

$$\begin{aligned} D_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) &= D_1^*(\theta_1^*), \\ E_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) &= F_1^*(\alpha_0^*\theta_1^*), \\ F_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) &= E_1^*(\theta_1^*) \end{aligned} \qquad (4)$$

sau

$$\begin{aligned} D_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) &= D_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*), \\ E_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) &= F_2^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*), \\ F_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2) &= E_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*). \end{aligned} \tag{5}$$

Cum numai două din ecuațiile unui set sînt independente, cea de-a treia ecuație de rotație poate fi aleasă din oricare alt set de rotații, sau mai bine prin

$$\bar{\bar{\theta}}_2^* = D_1^* D_2 + E_1^* E_2 + F_1^* F_2; \quad \theta_2^* = \theta_3; \quad \bar{\alpha}_0 = 1. \tag{6}$$

Componentele $A_i\ B_i\ C_i$ și $D_i\ E_i\ F_i$ ale vectorilor unitari, pentru axe și normale, capătă forme particulare în raport cu valorile unghiurilor de încrucișare. Astfel, deoarece $\bar{\alpha}_0 = 1$, avem următoarele :

$$\begin{aligned} &1) \quad A_1 = 0; \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 1, \\ &\qquad D_1 = \bar{\bar{\theta}}_1, \quad E_1 = \bar{\theta}_1 \quad F_1 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &2) \quad \bar{\alpha}_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = 1, \\ &\qquad D_2 = \bar{\bar{\theta}}_{1+2} \quad E_2 = \bar{\theta}_{1+2} \quad F_2 = 0, \\ &\bar{\alpha}_1 = 1, \quad A_2 = \bar{\theta}_1. \quad B_2 = -\bar{\bar{\theta}}, \ C_2 = 0, \\ &\qquad D_2 = \bar{\bar{\theta}}_1\bar{\bar{\theta}}_2, \quad E_2 = \bar{\bar{\theta}}_1\bar{\theta}_2 \ F_2 = \bar{\theta}_2, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &3) \quad \bar{\alpha}_1 = 0, \ \bar{\alpha}_2 = 0, \ A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad C_3 = 1, \\ &\bar{\alpha}_1 = 0, \ \bar{\alpha}_2 = 1, \ A_3 = \bar{\theta}_{1+2}, \ B_3 = -\bar{\bar{\theta}}_{1+2}, \ C_3 = 0, \\ &\bar{\alpha}_1 = 1, \ \bar{\alpha}_2 = 0, \ A_3 = \bar{\theta}_1, \quad B_3 = -\bar{\bar{\theta}}_1, \ C_3 = 0, \\ &\bar{\alpha}_1 = 1, \ \bar{\alpha}_2 = 1, \ A_3 = \bar{\bar{\theta}}_1\bar{\theta}_2, \ B_3 = \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2, \ C_3 = -\bar{\bar{\theta}}_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Cu particularizările semnalate anterior ecuațiile de rotații *ER* (coloana 2) impun uneori valori fixe pentru unghiurile θ_i, adică transformă cuplele cilindrice în cuple de translație. Ecuațiile de rototranslații *RT* (coloana 3) au forme reduse și pot fi prelucrate mai departe prin alegerea convenabilă a lungimilor a_i (sau s_i). În conformitate cu formele ecuațiilor *ER* și *RT* sînt indicați parametrii independenți *PI* (coloana 4) ceea ce marchează cuplele motoare posibile. De regulă acești parametri sînt redați în ordinea numerotării axelor și, desigur, numărul lor arată mobilitatea *M* (coloana 7). Pe de altă parte numărul ecuațiilor transformate în identi-

Tabela 1

1) *NI*	2) *ER*	3) *RT*	4) *PI*	5) *SR*	6) *MP*	7) φM	8) *SD*
1.001	$\theta_4 = \pi$	$a_0 + a_1\overline{\overline{\theta}}_1 + a_2\overline{\overline{\theta}}_{1+2} - a_3 = 0$		*C C C T*	$T_x T_y T_z$		*R C C T* −22
1.100	$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$	$s_0 + a_1\overline{\theta}_1 + a_2\overline{\theta}_{1+2} = 0$	$\theta_1\, s_1\, s_2$		$--R_z$	23	
		$s_1 + s_2 + s_3 = 0$	$(s_0\, s_1\, s_2)$	Fig. 1			*R R R T*−31
1.010	$\theta_1 + \theta_2 = \pi$	$a_0 = a_1\overline{\overline{\theta}}_1 - a_2 - a_3\overline{\overline{\theta}}_3 = 0$	$\theta_1\, s_1\, s_3$	4 *C*	$T_x T_y T_z$		*RCRC*−11
	$\theta_3 + \theta_4 = \pi$	$s_0 + s_3 + a_1\overline{\theta}_1 = 0$	$(s_1\, s_2\, s_3)$		$-R_y R_z$	13	*RCCR*−11
		$s_1 + s_2 + a_3\overline{\theta}_3 = 0$	$(s_0\, s_1\, s_2)$	Fig. 2			4*T* − 42
1.011	$\theta_3 = \pi/2$	$s_3 + a_0 + a_1\overline{\overline{\theta}}_1 = 0$	$\theta_1\, s_1$	*C C T T*	$T_x T_y T_z$		
1.110	$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$	$s_0 + a_1\overline{\theta}_1 + a_2 = 0$	$(s_1\ \theta_2)$		$--R_z$	22	*RRTT*−31
	$\theta_4 = \pi/2$	$s_1 + s_2 + a_3 = 0$	$(s_1\, s_3)$	Fig. 3			
1.111	$\theta_1 = 0$	$s_3\overline{\theta}_2 + a_0 + a_1 + (a_2 + a_3)\overline{\theta}_2 = 0$	$s_1\, s_2$	*T C T C*	$T_x T_y T_z$		
	$\theta_4 = \theta_2$	$s_0 - s_2 = 0$	$(s_2\, s_3)$		$-R_y-$	22	*TRTR*−31
	$\theta_3 = 0$	$s_1 - s_3\overline{\overline{\theta}}_2 + (a_2 + a_3)\overline{\theta}_2 = 0$	$(\theta_2\, s_2)$	Fig. 4			

tăți indică familia φ (coloana 7). Structurile realizabile SR (coloana 5) ale mecanismelor sînt impuse de soluțiile ecuațiilor, în special a celor de rotații. Pentru aceste forme de mecanisme se poate face verificarea cu ajutorul mișcărilor posibile MP (coloana 6) permise elementelor și se determină, de asemenea, mobilitatea prin formulele generale structurale.

Impunerea, mai departe, a unor valori constante pentru unii parametri independenți reduce mobilitatea M și conduce la obținerea structurilor de mecanisme derivate SD (coloana 8). De regulă, numărul identităților crește și se reduc posibilitățile de mișcare MP, astfel încît familia φ crește. Însă reducerea mobilității se explică și prin transformarea unor cuple cilindrice ($f = 2$) în cuple de rotație sau de translație ($f = 1$).

Din analiza tabelului 1 se constată că mecanismele derivate cu cuple fundamentale sînt mecanisme patrulatere plane formate cu diade de diverse aspecte R-$3R$; R-RRT; R-RTR; R-RTT; R-TRT; T-$3R$; T-RRT; T-RTR; [2]. De altfel, din formula mobilității rezultă familia prin

$$M = M_0 + \varphi N,\ \varphi = \frac{M - M_0}{N} = 3 \tag{10}$$

deoarece $M_0 = 6m - 5c = -2$; $M = 1$; $N = 1$; $m = 3$; $c = 4$.

Tabela 2 a mecanismelor singulare $5C$ a fost alcătuită la fel ca cea anterioară. Aceste mecanisme sînt marcate prin indicii secvenței $\bar{\alpha}_1$; $\bar{\alpha}_2$; $\bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_2^*$; $\bar{\alpha}_1^*$, avînd în vedere de asemenea că pentru toate posibilitățile s-a considerat $\bar{\alpha}_0 = 1$, respectiv :

1.1000—1.0100; 1.1100—1.0110; 1.1110;

1.1111 (11)

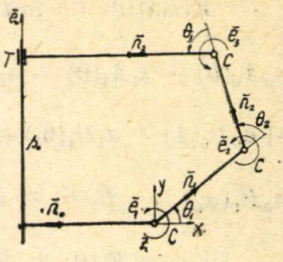
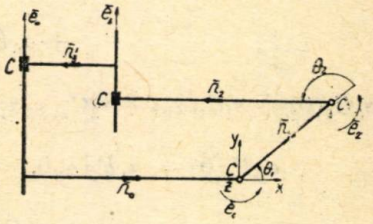


Fig. 1



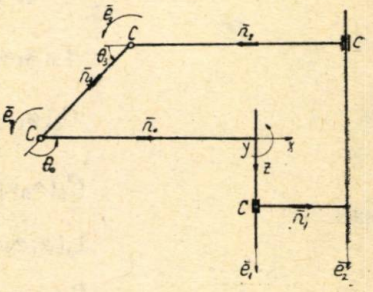


Fig. 2

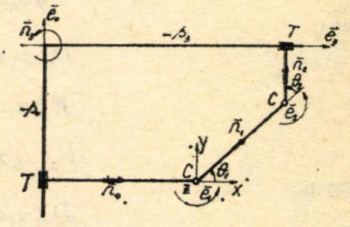


Fig. 3

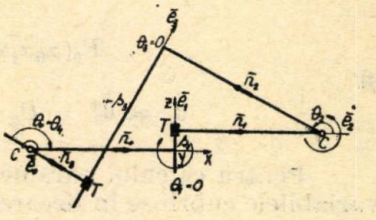


Fig. 4

Ecuațiile de poziții ale mecanismelor 5 C sînt :

$$s_0A_0(0) + s_1A_1(0) + s_2\,A_2(\alpha_1\theta_1) + s_3\,A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) + s_4\,A_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) +$$
$$+a_0D_0(1) + a_1D_1(\theta_1)+a_2D_2(\alpha_1\theta_1\theta_2)+\alpha_3D_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3)+a_4D_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)=0,$$
$$s_0B_0(\alpha_0) + s_1B_1(0) + s_2B_2(\alpha_1\,\theta_1) + s_3B_3(\alpha_1\,\alpha_2\,\theta_1\,\theta_2) + s_4B_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) +$$
$$+a_0E_0(0) + a_1E_1(\theta_1) + a_2E_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) + a_3E_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) +$$
$$+ a_4E_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) = 0, \tag{12}$$
$$s_0C_0(0) + s_1C_1(\alpha_0) + s_2C_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1) + s_3C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2)+s_4C_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3)+$$
$$+ a_0F_0(0) + a_1F_1(\alpha_0\theta_1) + a_2F_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2) + a_3\,F_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) +$$
$$+ a_4F_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) = 0,$$

$$A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = A_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*),$$
$$B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = C_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*), \tag{13}$$
$$C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = B_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*)$$

sau

$$A_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = A_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*),$$
$$B_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = C_2^*(\alpha_0^*\theta_1^*), \tag{14}$$
$$C_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = B_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*),$$

sau

$$D_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) = D_1^*(\theta_1^*),$$
$$E_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) = F_1^*(\alpha_0^*\theta_1^*), \tag{15}$$
$$F_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) = E_1^*(\theta_1^*)$$

sau

$$D_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) = D_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*),$$
$$E_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) = F_2^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*), \tag{16}$$
$$F_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3) = E_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*)$$

și

$$\bar{\bar{\theta}}_3 = \bar{\bar{\theta}}_3^* = D_2\,D_2^* + F_2\,E_2^* + E_2\,E_2^*\,;\ \bar{\alpha}_0 = 1. \tag{17}$$

Pentru calculul parametrilor independenți s-au analizat (coloana 4) variabilele cuprinse în fiecare ecuație. S-au dat mai multe soluții de alegerea parametrilor independenți (coloana 5). Exemplificările sînt redate

Tabela 2 a

1) NI	2) *ER*	3) *RT*	4) *PI* θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s
1.1000	$\theta_1 = \pi$	$a_0 - a_1 - a_2\overline{\overline{\theta}}_2 - a_3\overline{\overline{\theta}}_{2+3} - a_4\theta_{2+3+4} = 0$	×									
1.0001	$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = \pi$	$s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 0$		×	×	×	×					
		$s_1 + a_2\overline{\theta}_2 + a_3\overline{\theta}_{2+3} + a_4\overline{\theta}_{2+3+4} = 0$		×	×	×		×				
									×	×	×	×
1.0100	$\theta_1 + \theta_2 = \pi$	$a_0 + a_1\overline{\overline{\theta}}_1 - a_2 - a_3\overline{\overline{\theta}}_3 - a_4\overline{\overline{\theta}}_{3+4} = 0$	×	×								
1.0010	$\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = \pi$	$s_3 + s_4 + s_5 + a_1\overline{\theta}_1 = 0$			×	×	×					
		$s_1 + s_2 + a_3\overline{\theta}_3 + a_4\overline{\theta}_{3+4} = 0$	×		×	×						
			×						×	×	×	
					×	×		×	×			
	$\theta_1 = \pi/2$	$s_2 + a_0 + a_3\overline{\overline{\theta}}_3 + a_4\overline{\theta}_{3+4} = 0$	×									
1.1100	$\theta_2 = \pi/2$	$s_3 + s_4 + s_5 + a_1 = 0$		×								
1.0011	$\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = \pi/2$	$s_1 + a_2 + a_3\overline{\overline{\theta}}_3 + a_4\overline{\overline{\theta}}_{3+4} = 0$		×	×	×		×				
									×	×	×	
					×	×		×				
	$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$	$s_3 + a_0 + a_1\overline{\overline{\theta}}_1 + 0_4\overline{\theta}_4 = a$	×	×								
1.0110	$\theta_4 + \theta_5 = \pi/2$	$s_4 + s_5 + a_1\overline{\theta}_1 + a_2 = 0$				×	×					
	$\theta_3 = \pi/2$	$s_1 + s_2 + a_3 + a_4\overline{\overline{\theta}}_4 = 0$	×			×				×		
			×								×	×
						×		×	×			
1.1110	$\theta_2 = 0$	$s_2\overline{\theta}_1 + a_0 + (a_1 + a_2)\overline{\overline{\theta}}_1 + a_3 + a_4\overline{\overline{\theta}}_4 = 0$		×								
1.0111	$\theta_4 + \theta_5 = \theta + 2\pi$	$-s_2\overline{\overline{\theta}}_1 + s_4 + s_5 + (a_1 + a_2)\,\overline{\theta}_1 = 0$				×	×					
	$\theta_3 = \theta_1$	$s_1 - s_3 - a_4\overline{\theta}_4 = 0$	×		×				×			
			×			×			×			
			×					×		×	×	
						×	×	×		×		
	$\theta_1 = 0$	$s_3\overline{\theta}_2 + a_0 + a_1 + (a_2 + a_3)\,\overline{\overline{\theta}}_2 + a_4\overline{\overline{\theta}}_5 = 0$	×									
	$\theta_4 + \theta_5 = \theta_2$	$-s_2 + s_4 + s_5 = 0$		×		×	×					
	$\theta_3 = 0$	$s_1 - s_3\overline{\overline{\theta}}_2 + (a_2 + a_3)\,\overline{\theta}_2 + a_4\overline{\theta}_5 = 0$			×				×			
				×			×			×		
				×			×	×		×		
1.1111	$\overline{\overline{\theta}}_1\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_4\overline{\overline{\theta}}_5$	$s_2\overline{\theta}_1 + s_3\overline{\overline{\theta}}_1\overline{\theta}_2 + s_4\overline{\theta}_5 + a_0 + a_1\overline{\overline{\theta}}_1 +$	×	×		×	×					
	$\overline{\theta}_1\overline{\theta}_2 = -\overline{\overline{\theta}}_4$	$+ a_2\overline{\overline{\theta}}_1\overline{\overline{\theta}}_2 + a_3\overline{\theta}_4\overline{\overline{\theta}}_5 + a_4\overline{\overline{\theta}}_5 = 0$	×	×		×						
	$-\overline{\overline{\theta}}_2 = \overline{\theta}_4\overline{\overline{\theta}}_5$		×	×	×	×	×					
	$\overline{\overline{\theta}}_3 = \overline{\overline{\theta}}\,\overline{\overline{\theta}}_2\overline{\theta}_5\overline{\overline{\theta}}_4 +$	$s_0 - s_2\overline{\overline{\theta}}_1 + s_3\overline{\theta}_1\overline{\theta}_2 + a_1\overline{\theta}_1 + a_3\overline{\theta}_4$	×	×		×	×		×	×	×	
	$+ \overline{\theta}_2\overline{\theta}_5\overline{\theta}_4 + \overline{\theta}.\overline{\overline{\theta}}_2\overline{\theta}_4$	$= 0$	×	×		×			×	×		×
		$s_1 - s_3\overline{\overline{\theta}}_2 - s_4\overline{\overline{\theta}}_5 + a_2\overline{\theta}_2 + a_3\overline{\overline{\theta}}_4\overline{\theta}_5 + a_4\overline{\theta}_5 = 0$		×		×	×	×		×	×	

Tabela 2 b

5) *SR*	6) *MP*	7) φ*M*	8) *SD*
T 4C $\theta_2\theta_3\ s_2\ s_3\ s_4$ $\theta_2\ s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ etc.	$T_xT_yT_z$ $-R_y-$ Fig. 5	25	*T4R* – 32
5C $\theta_1\theta_3\ s_1\ s_3\ s_4$ $\theta_1\ s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ etc.	$T_xT_yT_z$ $-R_yR_z$ Fig. 6	15	*4RC* – 11 *2T3R* – 32
2T 3C $\theta_3\ \theta_4\ s_3\ s_4$ $\theta_3\ s_1\ s_3\ s_4$ $\theta_3\ s_2\ s_4\ s_5$ etc	$T_xT_yT_z$ $-R_y-$ Fig. 7	24	*2T3R* – 32 *3TRC* – 22
2CT 2C $\theta_1\ \theta_4\ s_1\ s_4$ $\theta_1\ s_1\ s_3\ s_4$ $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ etc.	$T_xT_yT_z$ $-R_yR_z$ Fig. 8	14	*RCTRC* – 12 *3T 2R* – 32
CT 3C $\theta_1\ \theta_4\ s_1\ s_4$ $\theta_1\ s_1\ s_2\ s_4$ $s_1\ s_3\ s_4\ s_5$ etc.	$T_xT_yT_z$ $-R_yR_z$ Fig. 9	14	*CT3R* – 11
TCT 2C $\theta_2\ \theta_5\ s_2\ s_4$ $\theta_2\ \theta_4\ s_2\ s_4$ $\theta_2\ s_2\ s_3\ s_5$ etc.	$T_xT_yT_y$ $-R_y-$ Fig. 10	24	*TRT 2R* – 32 *3TRC* – 22
5C $\theta_1\ \theta_2\ s_1\ s_2$ $\theta_1\ \theta_2\ s_1\ s_2$ $\theta_1\ \theta_4\ s\ s_3$ etc.	$T_xT_yT_z$ $R_xR_yR_z$	04	*3R2C* – 01

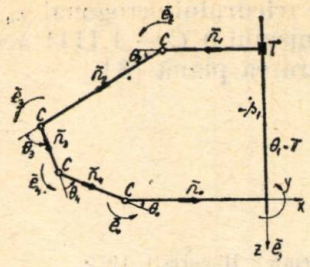


Fig. 5

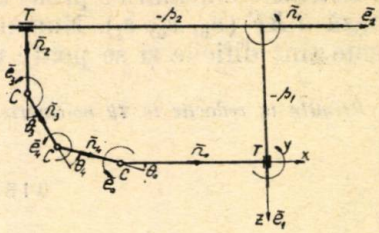


Fig. 7

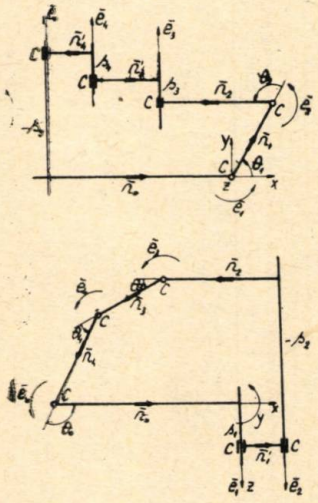


Fig. 6

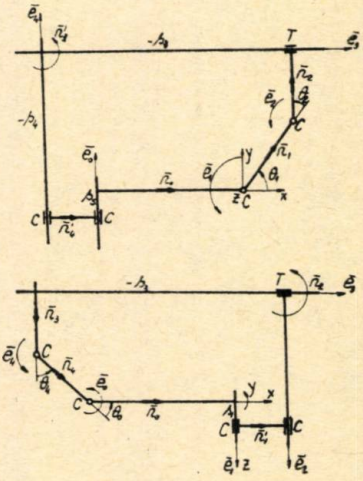


Fig. 8

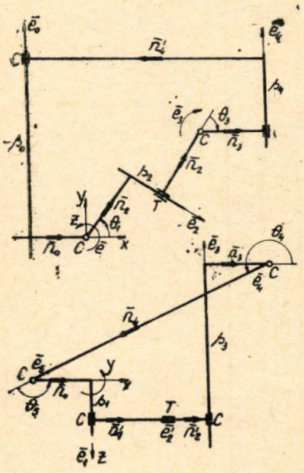


Fig. 9

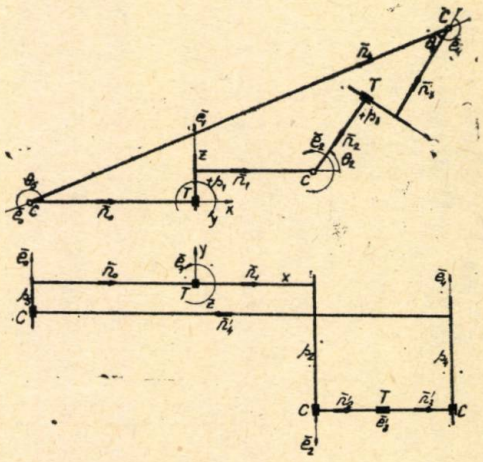


Fig 10.

prin schemele cinematice proiectate pe planele triedrului ortogonal $\bar{\alpha}_0 = 1$ de bază TBF ($\bar{n}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$). Numai pentru mecanismul 5 C — 1.1111 aceste scheme sînt dificile și se poate utiliza desfășurarea plană [3].

Primită la redacție la 19 noiembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Teoria mecanismelor spațiale*, Edit. Academiei, București, 1972.
2. — *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1975.
3. — *Reprezentarea plană a mecanismelor tridimensionale*, St. cerc. mec. apl., *3* (1975).

ERORI ALE PASULUI ELICEI PIESEI, PROVOCATE DE BĂTAIA RADIALĂ A ROȚILOR DINȚATE DIN LANȚUL CINEMATIC DE FILETARE

de D. CATRINA
Institutul politehnic București

În ipoteza că mecanismul șurub conducător-piuliță este ideal (lipsit de erori), precizia elicei piesei prelucrate pe mașini-unelte este dependentă de uniformitatea vitezei unghiulare a șurubului conducător.
Dintre factorii care contribuie la neuniformitatea acestei viteze unghiulare, de cea mai mare importanță este bătaia radială a roților dințate din lanțul cinematic de filetare *(L.C.F.)*. Analiza influenței exercitate de bătaia radială a roților dințate, asupra erorii de pas a elicei piesei prelucrate, care constituie obiectul de studiu al acestui articol, pune în evidență o componentă ciclică și o componentă care se cumulează, componente confirmate și experimental.

1. INTRODUCERE

În lucrarea [1], pe baza legii angrenării roților dințate avînd razele cercurilor de bază R_{b1}, R_{b2} și excentricitățile e_1, e_2 față de axele lor de rotație, se demonstrează că raportul de transmitere real al angrenajului este variabil în timp după expresia

$$i_R = i_T \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos(\alpha_T + \varphi_1 + \theta_1)}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cos(\alpha_T + \varphi_2 - i_T \theta_1)}, \qquad (1)$$

în care

$i_T = \frac{R_{b1}}{R_{b2}}$ este raportul de transmitere teoretic (constant) al angrenajului;

α_T — unghiul de angrenare teoretic;

φ_1 și φ_2 sînt defazajele excentricităților e_1 și e_2, rezultate la montaj;

θ_1 este unghiul de rotire al axului de intrare al angrenajului, care reprezintă parametrul mișcării mecanismului.

Această lege de variație (fig. 1), minuțios verificată și confirmată experimental, este periodică, avînd maxime dispuse pe cosinusoida

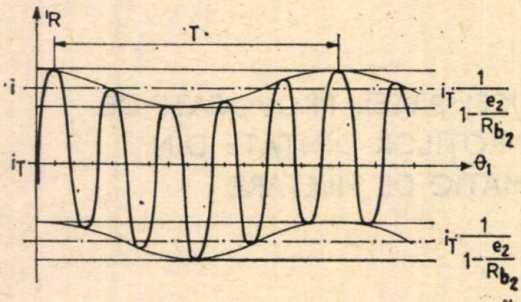


Fig. 1

$$i_{R\max} = i_T \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos(\alpha_T + \varphi_1 + \theta_1)}{1 - \frac{e_2}{R_{b_2}}}, \tag{2}$$

corespunzătoare valorilor

$$\theta_1 = \frac{\alpha_T + \varphi_2 - 2k_1\pi}{i_T}, \quad k_1 \in z, \tag{3}$$

și minime, dispuse pe cosinusoida

$$i_{R\min} = i_T \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cos(\alpha_T + \varphi_1 + \theta_1)}{1 + \frac{e_2}{R_{b2}}}, \tag{4}$$

corespunzătoare valorilor

$$\theta_1 = \frac{\alpha_T + \varphi_2 - (2K_2 + 1)\,\pi}{i_T}, \quad K_2 \in Z. \tag{5}$$

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

2.1. *Dacă ultimul angrenaj* al L.C.F. are, din cauza bătăii radiale, raportul de transmitere real de forma (1), atunci șurubul conducător primește mișcarea de rotație

$$\varphi_R = i_R \cdot \theta_1 = i_T \cdot \theta_1 \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\theta_1}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cos i_T\,\theta_1} = \varphi_T \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\theta_1}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cdot \cos i_T \cdot \theta_1}. \tag{6}$$

În consecință, deplasarea în mișcarea de translație a căruciorului este

$$z = k_s \cdot \varphi_R = k_s \cdot \varphi_T \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\theta_1}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cdot \cos i_T \cdot \theta_1}. \tag{7}$$

Această lege de mișcare (fig. 2) are același număr de maxime și minime ca și (1), care însă sînt dispuse pe curbele

$$z_{\max} = k_s \cdot \varphi_T \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\theta_1}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}}},$$

$$z_{\min} = k_s \cdot \varphi_T \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\theta_1}{1 + \frac{e_2}{R_{b2}}}.$$

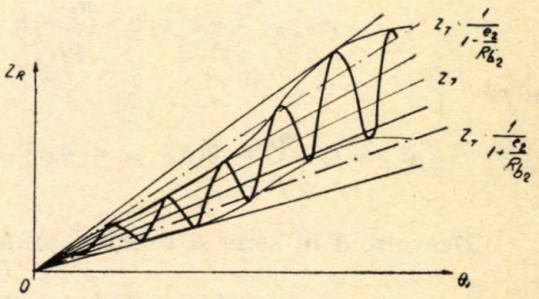


Fig. 2

Avînd în vedere că datorită lanțului cinematic de filetare, pozițiile unghiulare θ a axului principal și φ_T a șurubului conducător sînt corelate,

$$\varphi_T = \frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta,$$

în care p_{ET}, p_s reprezintă pasul elicei teoretice (constant) de pe piesă și, respectiv, pasul șurubului conducător, rezultă că poziția unghiulară a axului de intrare în ultimul angrenaj este

$$\theta_1 = \frac{\varphi_T}{i_T} = \frac{p_{ET}}{p_s \cdot i_T} \cdot \theta,$$

astfel că deplasarea căruciorului z, ca funcție de unghiul de rotire al axului principal, este

$$z = f_{(\theta)} = k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta \cdot \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta\right)}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta\right)}$$

sau, dacă notăm,

$$h_{(\theta)} = \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s \cdot i_T} \cdot \theta\right)}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta\right)},$$

atunci

$$z = k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta \cdot h_{(\theta)},$$

iar pasul elicei piesei pelucrate, exprimat ca distanța dintre două poziții $z_{(\theta+2\pi)}$ și $z_{(\theta)}$ ale căruciorului, între care axul principal s-a rotit cu 2π, este

$$p_{ER} = z_{(\theta+2\pi)} - z_{(\theta)} = k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} [\theta + 2\pi) \cdot h_{(\theta+2\pi)} - \theta h_{(\theta)}],$$

adică

$$p_{ER} = k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta [h_{(\theta+2\pi)} - h_{(\theta)}] + 2\pi \cdot k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} \cdot h_{(\theta+2\pi)} \cdot$$

Dezvoltînd în serie și reținînd primii doi termeni, avem

$$h_{(\theta+2\pi)} \cong h_{(\theta)} + 2\pi \cdot h'_\theta,$$

astfel că se obține

$$p_{ER} = 2\pi \cdot k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} [\theta \cdot h'_\theta + h_{(\theta+2\pi)}] = p_{ET}[\theta \cdot h'_\theta + h_{(\theta+2\pi)}].$$

Dar

$$h_{(\theta)} = \frac{1 + \frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s \cdot i_T} \cdot \theta\right)}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta\right)} = 1 + \frac{\frac{e_1}{R_{b1}} \cdot \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s \cdot i_T} \cdot \theta\right) + \frac{e_2}{R_{b2}} \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s} \theta\right)}{1 - \frac{e_2}{R_{b2}} \cos\left(\frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta\right)} =$$

$$= 1 + g_{(\theta)},$$

ceea ce face ca pasul elicei să fie

$$p_{ER} = p_{ET}[\theta \cdot h'_\theta + 1 + g_{(\theta+2\pi)}].$$

În acest fel eroarea de pas a elicei piesei este

$$\Delta p_E = p_{ER} - p_{ET} = p_{ET}[\theta \cdot h'_\theta + g_{(\theta+2\pi)}].$$

Se constată că eroarea de pas are o componentă ciclică, de amplitudine redusă :

$$\Delta p_E^C = p_{ET} \cdot g_{(\theta+2\pi)}$$

și o componentă numită eroare cumulată de pas,

$$\Delta p_E^\Sigma = p_{ET} \cdot \theta \cdot h'_\theta,$$

care crește aproximativ liniar cu unghiul θ (variația lui Δp_E^Σ provocată de h'_θ este neglijabilă, avînd în vedere valorile uzuale ale termenilor care definesc funcția $h_{(\theta)}$).

În același timp se poate face observația că eroarea de pas crește liniar cu pasul elicei piesei prelucrate.

2.2. Dacă un număr de angrenaje din L.C.F. au, din cauza bătăii radiale, raportul de transmitere real de forma (1), considerente similare cazului în care un singur angrenaj este afectat de erori (bătaie radială) conduc la expresia care dă legea de deplasare a căruciorului :

$$z = f_{(\theta)} = k_s \cdot \frac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta \cdot \prod_{k=1}^{m} [h_{(\theta)}^{(k)}],$$

în care

$$h_{(\theta)}^{(k)} = \frac{1 + \dfrac{e_1^{(k)}}{R_{b1}^{(k)}} \cdot \cos\left(\dfrac{p_{ET}}{p_s \cdot i_T^{(k)}} \cdot \theta\right)}{1 - \dfrac{e_2^{(k)}}{R_{b2}^{(k)}} \cdot \cos\left(\dfrac{p_{ET}}{p_s} \cdot \theta\right)} = 1 + g_{(\theta)}^{(k)},$$

notația simbolică (k) referindu-se la numărul de ordine al angrenajului, iar m fiind numărul angrenajelor afectate de erori.

În aceste condiții, pasul piesei prelucrate este

$$p_{ER} = z_{(\theta+2\pi)} - z_{(\theta)} = k_s \frac{p_{ET}}{p_s} \theta \left\{ \prod_{k=1}^{m} [h_{(\theta+2\pi)}^{(k)}] - \right.$$

$$\left. - \prod_{k=1}^{m} [h_{(\theta)}^{(k)}] \right\} + p_{ET} \cdot \prod_{k=1}^{m} [h_{(\theta+2\pi)}] \cdot$$

Înlocuind

$$h_{(\theta+2\pi)}^{(k)} \cong h_{(\theta)}^{(k)} + 2\pi \cdot h_{(\theta)}^{\prime(k)},$$

$$\prod_{k=1}^{m} [h_{(\theta+2\pi)}^{(k)}] \cong \prod_{k=1}^{m} [h_{(\theta)}^{(k)}] + 2\pi \sum_{k=1}^{m} h_{\theta}^{\prime(k)},$$

rezultă

$$p_{ER} = p_{ET} \left[\theta \sum_{k=1}^{m} h_{(\theta)}^{\prime(k)} + \prod_{k=1}^{m} h_{(\theta+2\pi)}^{(k)} \right] \cdot$$

Dar

$$\prod_{k=1}^{m} h_{(\theta+2\pi)}^{(k)} = \prod_{k=1}^{m} [1 + g_{(\theta+2\pi)}^{(k)}] \cong 1 + \sum_{k=1}^{m} g_{\theta+2\pi)}^{(k)},$$

astfel că, în final, eroarea de pas a elicei piesei prelucrate este

$$\Delta p_E = p_{ER} - p_{ET} = p_{ET} \left[\theta \sum_{k=1}^{m} h_{(\theta)}^{\prime(k)} + \sum_{k=1}^{m} g_{(\theta+2\pi)}^{(k)} \right],$$

ceea ce face ca componenta ciclică să fie

$$\Delta p_E^C = p_{ET} \cdot \sum_{k=1}^{m} g_{(\theta+2\pi)}^{(k)},$$

iar componenta eroare cumulată de pas,

$$\Delta p_E^{\Sigma} = p_{ET} \cdot \theta \cdot \sum_{k=1}^{m} h_{(\theta)}^{\prime(k)}.$$

Concluziile sînt aceleaşi cu cele de la (2.1), în plus se verifică faptul că eroarea relativă însumată este suma erorilor relative [2].

3. CERCETĂRI EXPERIMENTALE

3.1. Pe un microscop Karl Zeiss, din dotarea Întreprinderii de Strunguri din Arad, s-a măsurat eroarea de pas a unui şurub conducător pentru strunguri normale ($p_{ET} = 12$ mm), după ultima operaţie de prelucrare (înaintea montajului).

Filetul este frezat în vîrtej pe maşina Waldrich-Coburg, echipată cu dispozitiv de corecţie a erorilor de pas; măsurarea s-a efectuat pe lungimea cursei mesei ocularului (560 mm) începînd de la primele spire active, şi repetînd măsurătorile pe 10 generatoare diferite (tabelul 1 şi fig. 3).

Tabelul 1

Erorile pasului şurubului conducător, măsurate pe 10 generatoare

Nr	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Nr	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	− 3	−2	0	0	0	0	+ 1	+2	+ 2	+ 4	24	+ 4	0	0	− 9	− 2	− 2	+5	+13	− 6	− 2
2	+ 5	+2	+ 3	+ 6	+ 3	+ 2	+ 1	+1	0	0	25	+ 6	+ 6	+13	+10	+15	+10	0	+ 8	+ 1	+12
3	− 4	0	0	− 1	− 2	0	− 1	+2	+ 3	+ 1	26	+10	+ 9	− 4	0	+ 6	+ 2	−3	− 1	+ 2	0
4	+ 3	0	+ 3	+ 4	+ 6	+ 4	+ 5	0	+ 1	+ 2	27	+ 4	− 6	− 2	− 6	− 2	− 3	+2	0	+15	+13
5	− 1	−1	− 3	− 4	− 2	+ 3	+ 6	+9	+ 6	+ 6	28	−13	+ 8	+11	+ 9	− 9	−11	0	+ 3	− 6	+ 2
6	+ 5	+7	+ 4	+ 4	+ 4	0	− 3	−3	− 2	− 3	29	+12	−12	+ 4	−13	− 2	+ 5	+8	− 5	+ 8	0
7	− 2	−2	− 2	− 3	0	− 1	+ 1	−1	0	+ 1	30	−10	+16	− 8	+ 6	+ 9	− 1	+4	0	− 1	− 7
8	+ 2	−1	+ 9	+ 3	+ 2	+ 6	+ 6	+4	+ 5	+ 4	31	+ 7	− 5	+ 7	+12	+ 1	+ 4	0	+ 8	0	+ 1
9	+ 3	+1	− 5	0	+ 2	− 3	− 1	0	+ 1	+ 1	32	+ 8	+ 6	+ 1	− 2	+ 3	+ 8	+1	− 2	0	+11
10	+ 7	−1	+ 4	+ 7	− 1	− 4	− 8	−5	− 4	− 2	33	− 2	− 5	− 6	+ 1	+ 8	0	−5	+ 1	+ 1	− 3
11	− 9	0	− 6	− 8	− 8	− 1	+ 2	+7	+ 5	+ 1	34	− 1	+ 8	0	− 5	− 6	− 2	+3	+ 4	− 2	0
12	+ 5	+5	+ 3	− 3	+ 3	− 4	− 2	−6	− 6	− 1	35	+ 3	+ 2	+ 4	+ 5	+ 2	+ 3	+2	+ 2	− 1	+ 3
13	− 4	−3	− 4	+ 5	+ 1	0	+ 5	0	− 1	+ 3	36	+ 8	+ 3	+ 3	0	+ 1	0	+4	0	+ 4	0
14	+ 4	−1	0	− 5	− 5	0	+ 1	+7	+ 6	− 1	37	− 9	− 4	+ 1	+ 1	+ 2	+ 9	+1	0	− 1	+ 3
15	+ 2	−1	0	+ 9	+10	+ 2	− 4	−7	− 6	− 2	38	+ 6	+ 4	+ 6	+ 4	+ 1	− 8	+1	+ 9	+ 4	+ 1
16	− 4	+8	− 1	+ 4	− 3	+ 6	− 1	+5	+ 4	+ 8	39	− 2	0	− 2	− 2	−10	+ 9	+3	− 1	+ 5	− 2
17	+11	−3	+16	− 2	+ 8	− 5	0	−4	− 2	− 1	40	+ 4	− 2	+ 6	+ 6	+16	− 1	+6	+ 4	0	+13
18	− 4	+8	−10	− 5	−10	+10	+ 8	+8	+ 1	− 4	41	− 1	+ 3	− 4	0	− 6	0	0	− 2	+ 2	+ 1
19	0	0	+ 9	+ 4	+ 3	− 6	+ 7	+5	+11	+10	42	+ 3	+ 2	− 1	+ 1	+ 5	+ 3	+3	+ 5	+ 1	+ 1
20	− 2	−8	+ 4	− 2	− 2	+ 6	−10	0	− 9	0	43	+ 2	− 1	+ 2	− 6	0	− 2	−2	0	+ 8	0
21	+13	+8	+ 1	+10	+ 7	+ 8	+ 9	−4	+ 3	− 3	44	+ 3	+ 3	+ 2	+ 5	+ 4	+ 4	+4	+ 2	0	+ 1
22	−12	+4	− 4	+ 3	+ 8	+ 1	− 3	−2	+ 9	− 4	45	0	+ 4	− 4	+ 2	− 2	− 7	−3	0	− 3	− 1
23	+ 3	−9	− 3	+ 8	− 6	+ 3	+ 6	0	+ 5	+ 3	46	+ 6	− 2	+ 1	− 2	− 5	+ 7				

Graficul pune în evidență atît componenta ciclică, cît și cumularea erorii de pas.

Ordonînd șirul erorilor de pas și aplicînd criteriul lui Chouvenet în vederea eliminării termenilor, care eventual nu corespund [2], [3], se pot face următoarele observații asupra șirului astfel obținut :

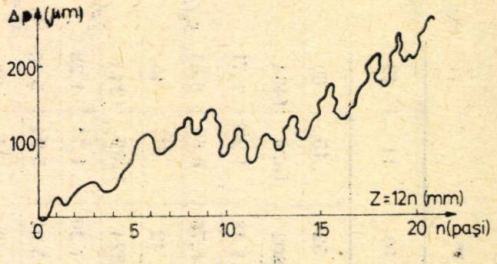


Fig. 3

— aplicînd testul hi pătrat pentru verificarea normalității legii de distribuție a erorilor de pas, pentru acest șir, ca și pentru diverse alte subșiruri (care exclud zonele de capăt ce pot fi expuse proceselor tranzitorii din aceste zone în timpul prelucrării) se obțin valori mari, care nu confirmă repartiția gaussiană, deși „procese aleatorii, ce nu sînt gaussiene, tind să devină gaussiene după trecerea lor prin sisteme mecanice" [4];

— schimbînd originea de calcul a mediei aritmetice și pătratice calculate în 35 puncte de măsurare (tabelul 2 și figura 4), respectiv calculînd sume de forma $\sum_{i}^{i+34} \frac{x}{35}$; $\sqrt{\frac{\sum_{i}^{i+34} x^2}{35}}$, $i = 1,2,\ldots 12$, se observă că schimbarea originii de calcul nu afectează decît zecimea de micron (inoperantă în aplicațiile curente), adică procesul aleatoriu studiat este staționar; o consecință imediată este aceea că măsurarea erorii de pas a șurubului conducător este concludentă, oricare ar fi zona măsurată din porțiunea filetată (cu excepția capetelor);

— calculînd funcția de autocorelație $R_{(\tau)}$ — la care întîrzierea τ aici este provocată de decalajul dintre punctele palpate pe o generatoare de referință, față de punctele de același ordin de pe celelalte generatoare — se constată (tabelul 3 și fig. 5) că procesul aleatoriu studiat este ergodic (funcția de autocorelație tinde către zero); consecința practică este aceea că rezultatele măsurării pe o generatoare pot reprezenta fidel desfășurarea întregului proces aleatoriu.

În același timp este evident faptul că [5] eroarea de pas a șurubului conducător filetat în vîrtej este rezultatul suprapunerii unui fenomen periodic peste procesul aleatoriu.

În timp ce cauzele procesului aleatoriu nu fac obiectul prezentului articol, în privința procesului periodic se poate preciza că acesta nu este generat de procesul de așchiere, întrucît frecvența acestuia este deosebit de înaltă la frezarea filetului în vîrtej; în schimb se observă că funcția de autocorelație este bine aproximată de curba :

$$R_{(z)} = e^{-z+a} \cdot \cos\left(i_1 \cdot \frac{p}{2\pi} z + \varphi_1\right) \cdot \cos\left(i_2 \frac{p}{2\pi} \cdot z + \varphi_2\right)$$

Tabelul 2

Staționaritatea mediei aritmetice și a valorii medii pătratice a erorii pasului șurubului conducător, pe primele 5 generatoare în 35 puncte (pași)

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$S_0(x_1)$	46	57	43	53	48	53	47	52	52	52	45	60
	$S_p(x_1)$	1480	1535	1591	1611	1606	1621	1597	1602	1602	1602	1539	1494
	$\bar{x}_1$	1,31	1,63	1,23	1,51	1,37	1,51	1,34	1,48	1,48	1,48	1,28	1,71
	$\bar{x}_{1p}$	6,50	6,60	6,74	6,78	6,76	6,80	6,74	6,76	6,76	6,76	6,60	6,54
	$S_0(x_2)$	38	43	37	41	41	40	36	40	40	42	47	45
	$S_p(x_2)$	1234	1239	1251	1267	1267	1270	1216	1216	1216	1224	1239	1243
	$\bar{x}_2$	1,08	1,22	1,06	1,17	1,17	1,14	1,05	1,14	1,14	1,20	1,34	1,28
	$\bar{x}_{2p}$	5,94	5,94	5,98	6,01	6,01	6,02	5,88	5,88	5,88	5,91	5,94	5,96
	$S_0(x_3)$	38	41	39	45	40	49	41	42	35	42	34	39
	$S_p(x_3)$	1202	1211	1203	1234	1239	1234	1261	1258	1181	1160	1160	1125
	$\bar{x}_3$	1,05	1,17	1,11	1,28	1,14	1,40	1,17	1,20	1,00	1,20	0,97	1,11
	$\bar{x}_{3p}$	5,86	5,87	5,86	5,94	6,00	5,94	6,00	5,99	5,76	5,81	5,76	5,66
	$S_0(x_4)$	42	42	37	42	36	46	42	46	37	42	37	43
	$S_p(x_4)$	1296	1296	1261	1276	1266	1284	1268	1260	1287	1312	1267	1207
	$\bar{x}_4$	1,20	1,20	1,06	1,20	1,05	1,31	1,20	1,31	1,06	1,20	1,06	1,22
	$\bar{x}_{4p}$	6,08	6,08	6,00	6,04	6,01	6,05	6,03	6,00	6,06	6,13	6,03	5,87
	$S_0(x_5)$	41	42	41	44	28	46	36	41	39	41	40	43
	$S_p(x_5)$	1161	1162	1157	1154	1218	1470	1490	1515	1511	1523	1526	1487
	$\bar{x}_5$	1,17	1,20	1,17	1,25	0,80	1,31	1,05	1,17	1,11	1,17	1,14	1,22
	$\bar{x}_{5p}$	5,75	5,75	5,75	5,74	5,90	6,48	6,52	6,58	6,57	6,59	6,59	6,52

$$S_0(x_i) = \sum_{i}^{i+34} (x_i)$$

$$S_p(x_i) = \sum_{i}^{i+34} (x_i^2)$$

$$\bar{x}_i = \frac{S_0(x)}{35}$$

$$\bar{x}_{ip} = \sqrt{\frac{S_p(x_i)}{35}}$$

Tabelul 3

Funcția de autocorelație a erorii pasului șurubului conducător, calculată cu baza x_2 în n puncte

n	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
$\Sigma x_2 x_3$	−124	−115	−119	− 95	− 95	−107	−119	−121	−123	−117	−133	−195
$\Sigma x_2 x_4$	353	353	349	365	365	353	353	355	361	376	364	388
$\Sigma x_2 x_5$	255	258	250	254	254	222	204	214	214	226	218	288
$\Sigma x_2 x_6$	62	62	26	− 6	−6	− 4	−4	2	4	16	− 12	− 26
$\Sigma x_2 x_7$	80	92	88	92	92	80	80	86	88	100	88	88
$\Sigma x_2 x_8$	119	119	119	155	155	147	141	151	151	157	157	157
$\Sigma x_2 x_9$	−167	−155	−151	−135	−135	−135	−129	−127	−135	−135	−147	−147
$\Sigma x_2 x_{10}$	−101	−101	−113	−109	−109	−133	−130	−120	−120	−108	−120	−120
$\overline{x_2 x_3}$	−352	−3,2	−3,21	−2,5	−2,43	−2,77	−2,9	−2,88	−2,86	−2,66	−2,95	−2,94
$\overline{x_2 x_4}$	+101	9,81	9,45	9,9	9,37	8,80	8,60	8,45	8,40	8,55	8,55	8,45
$\overline{x_2 x_5}$	7,3	7,16	6,75	6,70	6,50	5,55	4,98	5,1	4,97	5,12	4,85	4,95
$\overline{x_2 x_6}$	1,78	1,72	0,70	−0,16	−0,15	−0,1	−0,098	−0,05	−0,093	−0,36	−0,27	−0,87
$\overline{x_2 x_7}$	2,3	2,56	2,38	2,42	2,36	2,00	1,95	2,05	2,05	2,28	1,95	1,91
$\overline{x_2 x_8}$	3,40	3,30	3,22	4,07	3,96	3,68	3,44	3,60	3,50	3,56	3,50	3,40
$\overline{x_2 x_9}$	−4,8	−4,3	−4,1	−3,56	−3,44	−3,37	−3,16	−3,01	−3,14	−3,07	−3,27	−3,20
$\overline{x_2 x_{10}}$	−2,9	−2,8	−3,06	−2,86	−2,80	−3,32	−3,17	−2,86	−2,79	−2,48	−2,67	−2,61

$$\Sigma x_2 x_i = \sum_1^n x_2 x_i$$

$$\overline{x_2 x_i} = \frac{\sum_1^n x_2 x_i}{n}$$

în care i_1, i_2 sînt rapoartele de transmitere ale celor două perechi de roți de schimb din lanțul cinematic de filetare.

Se poate aprecia deci că erorile acestora sînt surse de erori ale pasului șurubului conducător frezat în vîrtej, pe mașina amintită.

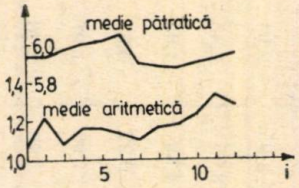


Fig. 4

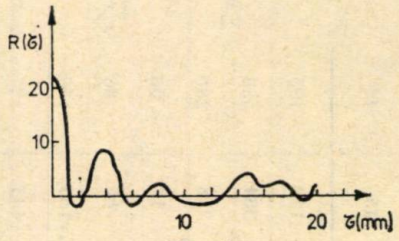


Fig. 5

Primită la redacție la 22 septembrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. E. Botez, *The variability of the gear ratio*, IFToMM, International Symposium, București, 1973.
2. D. Catrina, *Contribuții la studiul erorilor lanțului cinematic de filetare*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1975.
3. M. Tiron, *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*, Edit. tehnică, București, 1972.
4. C. Harris, Crede Ch. E., *Șocuri și vibrații* (trad. din limba engleză), Vol. I, Edit. tehnică, București, 1968.
5. Y. Jullien, *Reponse des systemes soumis a des excitations aleatoires*, R.F.M., 7, 8 (1963).

UN MODEL ELASTIC NELINIAR PENTRU PĂMÎNTURI

de D. BRATOSIN
Centrul de mecanică a solidelor

Lucrarea are ca obiect modelarea comportării pămînturilor cu un model elastic neliniar. Se prezintă o ecuație constitutivă neliniară a pămînturilor considerate materiale elastice cu izotropie transversă și se expun posibilitățile de determinare a parametrilor și de extindere a aplicabilității modelului.

1. INTRODUCERE

Comportarea neliniară a pămînturilor a constituit obiectul a numeroase cercetări teoretice și experimentale, dintre care menționăm lucrările [2], [3], [4], [6], [7], [9].

Cu toată diversitatea punctelor de vedere conținute, aceste lucrări au o trăsătură comună prin utilizarea modelului modulilor variabili, model bazat pe luarea în considerație a dependenței constantelor elastice de starea de tensiune sau deformație [8]. În esență, autorii pornesc de la o aproximație (de obicei hiperbolică sau parabolică) a curbelor tensiune-deformație determinate experimental, înlocuind apoi în formulele elasticității liniare izotrope constantele elastice (λ, μ), (E, ν) sau (K, G) prin valori ale derivatelor funcțiilor experimentale.

Acest mod de abordare, care în anumite condiții s-a dovedit a fi o descriere acceptabilă a comportării neliniare a pămînturilor, prezintă și cîteva carențe. Astfel, postulînd forma ecuației constitutive prin analogie cu elasticitatea liniară, se neglijează apriori influența deformațiilor normale asupra tensiunilor tangențiale și a deformațiilor tangențiale asupra tensiunilor normale.

De asemenea, datorită modului lor de determinare, legile de comportare rămîn tributare condițiilor particulare din aparatul de laborator în care au fost obținute curbele tensiune-deformație, fapt care anulează șansele de extindere a aplicabilității modelului la solicitări oarecare.

Lucrarea de față propune un mod de abordare bazat pe postulatul rolului de potențial elastic al energiei de deformație. Pe baza acestui postulat se stabilește o formă neliniară a ecuației constitutive, formă a cărei parametri sînt constantele elastice (de ordinele al doilea, al treilea și al patrulea) ale pămînturilor aflate „in situ". Se expun apoi posibilitățile de determinare a constantelor elastice cu aparatura obișnuită a unui laborator geotehnic și posibilitățile de extindere a aplicabilității modelului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 4, 1977, P. 551–564

Notaţiile utilizate sînt explicate pe parcursul expunerii. Menţionăm numai că sînt folosite, în general, notaţiile mecanicii mediilor continui [3], [4], atît în formă compactă cît şi indicială. De asemenea, s-a utilizat convenţia de sumare a lui Einstein după indici repetaţi, specificînd, la nevoie, suprimarea acestei convenţii.

2. IPOTEZE GENERALE

Comportarea de corp elastic a pămînturilor este o idealizare a comportării reale, acceptabilă în condiţiile unor ipoteze. Vom enumera în cadrul acestui paragraf numai ipotezele cu caracter general urmînd ca ipotezele particulare să fie introduse pe parcursul expunerii.

I_1. Ipoteza continuităţii conform căreia un masiv de pămînt este modelat de un corp $\mathscr{B}$ ale cărui puncte materiale sînt în corespondenţă biunivocă cu poziţiile lor $\mathbf{x}$ din domeniul $\mathscr{D}$ al spaţiului euclidian ε pe care-l ocupă, funcţia K care stabileşte această corespondenţă fiind numită configuraţia lui $\mathscr{B}$.

Apariţia, chiar la solicitări reduse a deformaţiilor remanente face ca răspunsul pămînturilor să depindă atît de sensul solicitării actuale, cît şi de existenţa şi sensul solicitărilor anterioare. Cu alte cuvinte, răspunsul pămînturilor depinde de istoria deformaţiilor.

I_2. Considerăm istoria deformaţiilor compusă din două etape despărţite de momentul t_0 al primei solicitări exterioare.

În prima etapă vor fi, deci, incluse procesele de formare a materialului, iar etapa a doua va fi provocată de solicitările aplicate masivului de pămînt.

I_3. Admitem că efectele primei etape sînt incluse în caracteristicile mecanice pe care pămînturile le au „in situ".

În ceea ce priveşte etapa a doua, vom considera cazul general al unor solicitări ciclice. Un pămînt solicitat ciclic poate fi considerat la sfîrşitul fiecărei ramuri de încărcare sau descărcare a fiecărui ciclu un nou material a cărui răspuns diferă de răspunsul din ramura anterioară.

I_4. Considerăm că pe parcursul unei ramuri de solicitare, pămînturile a căror caracteristici vîscoase pot fi neglijate au o comportare de corp elastic.

Admitem, astfel, că între răspunsurile pe parcursul ramurilor de solicitare nu sînt diferenţe calitative ci cantitative care pot fi traduse prin utilizarea a mai multor serii de parametri ai ecuaţiei constitutive.

3. FORMA GENERALĂ A ECUAŢIEI CONSTITUTIVE

I_5. Admitem că energia de deformaţie a corpurilor elastice are rol de potenţial elastic.

Prin urmare, putem considera ecuaţia constitutivă a elasticităţii neliniare în forma [13]:

$$\Pi'_{kl} = \frac{\partial w(\mathbf{E}')}{\partial E'_{kl}}, \tag{3.1}$$

unde Π este cel de-al doilea tensor Piola-Kirchhoff al tensiunii (tensor care raportează tensiunile din configurația curentă la elementul orientat de arie din configurația naturală K', configurație în care corpul este lipsit de tensiuni și deformații), $\mathbf{E}$ este tensorul deformației neliniare, iar w este densitatea energiei de deformație pe unitatea de volum pe care corpul a avut-o în configurație naturală. Prin Π'_{kl} și E'_{kl} au fost notate componentele tensorilor respectivi, raportate la sistemul de coordonate x'_k atașat configurației naturale.

Ne interesează, însă, forma acestei ecuații în cazul cînd alegem drept configurație de referință configurația inițială K^* existentă „in situ" la momentul inițial t_0, configurație căreia îi atașăm sistemul de coordonate x_k. În această configurație, corpul are o anumită stare de tensiune și deformație Π^* și $\mathbf{E}^*$.

I_6. Admitem că energia de deformație $w(\mathbf{E}')$ poate fi dezvoltată în serie Taylor după puterile lui $\mathbf{E}'$ în jurul lui $\mathbf{E}^*$:

$$w(\mathbf{E}') = w(\mathbf{E}^*) + A_{kl}(E'_{kl} - E^*_{kl}) + \frac{1}{2} B_{klmn}(E'_{kl} - E^*_{kl})(E'_{mn} - E^*_{mn}) +$$

$$+ \frac{1}{6} C_{klmnrs}(E'_{kl} - E^*_{kl})(E'_{mn} - E^*_{mn})(E'_{rs} - E^*_{rs}) + \dots \tag{3.2}$$

În (3.2), componentele

$$A_{kl}(\mathbf{E}^*) = \left.\frac{\partial w(\mathbf{E}')}{\partial E'_{kl}}\right|_{\mathbf{E}'=\mathbf{E}^*} \qquad B_{klmn}(\mathbf{E}^*) = \left.\frac{\partial^2 w(\mathbf{E}')}{\partial E'_{kl}\partial E'_{mn}}\right|_{\mathbf{E}'=\mathbf{E}^*}$$

$$C_{klmnrs}(\mathbf{E}^*) = \left.\frac{\partial^2 w(\mathbf{E}')}{\partial E'_{kl}\partial E'_{mn}\partial E'_{rs}}\right|_{\mathbf{E}'=\mathbf{E}^*} \tag{3.3}$$

reprezintă constantele elastice de ordinele 1, 2, 3 ... ale materialului aflat în configurația inițială.

Din (3.2) și (3.1) rezultă acum

$$\Pi'_{kl} = \Pi^*_{kl} + B_{klmn}(E'_{mn} - E^*_{mn}) + \frac{1}{2} C_{klmnrs}(E'_{mn} - E^*_{mn})(E'_{rs} - E^*_{rs}) + \dots \tag{3.4}$$

Cum diferențele $\Pi' - \Pi^* = \Pi$ și $\mathbf{E}' - \mathbf{E}^* = \mathbf{E}$ reprezintă tensiunile și deformațiile raportate la sistemul de coordonate x_k al configurației inițiale, din (3.4) obținem forma căutată a ecuației constitutive :

$$\Pi_{kl} = c_{klmn} E_{mn}, \tag{3.5}$$

unde

$$C_{klmn}(\mathbf{E}) = B_{klmn} + \frac{1}{2} C_{klmnrs} E_{rs} + \frac{1}{6} D_{klmnrstv} E_{rs} E_{tv} + \dots \tag{3.6}$$

Ținînd cont de simetria tensorilor Π, $\mathbf{E}$ și a constantelor elastice (3.3) și introducînd convenția lui Voigt de notare a indicilor : $11 \to 1$; $22 \to 2$; $33 \to 3$; $23 \to 4$; $31 \to 5$; $12 \to 6$, dezvoltarea (3.2) ia forma

$$w(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} B_{KM} E_K E_M + \frac{1}{6} C_{KMN} E_K E_M E_N + \frac{1}{24} D_{KMNR} E_K E_M E_N E_R + \dots, \tag{3.7}$$

iar (3.5)

$$\Pi_K = c_{KM} E_M, \tag{3.8}$$

unde

$$c_{KM}(\mathbf{E}) = B_{KM} + \frac{1}{2} C_{KMN} E_N + \frac{1}{6} D_{KMNR} E_N E_R + \ldots \tag{3.9}$$

În ecuațiile (3.8) — (3.9) indicii cu litere de tipar iau valorile 1, 2,... 6, iar

$$\Pi_k = \Pi_{kl}; \quad E_k = 2E_{kl}/(1 + \delta_{kl}); \quad c_{KM} = 4c_{klmn}/[(1+\delta_{kl})(1+\delta_{mn})] \tag{3.10}$$

(fără sumare)

4. CONSTANTELE ELASTICE ALE PĂMÎNTURILOR

Deoarece constantele elastice (3.3) reprezintă caracteristici ale materialului aflat în configurația inițială, numărul lor depinde de proprietățile de anizotropie „in situ" ale a pămînturilor. Aceste proprietăți sînt determinate de structura materialului din stratul respectiv, de procesul de formare al acestei structuri în decursul timpului [10]. Dintre cauzele care pot conduce la formarea unor caracteristici de anizotropie, menționăm presiunea stratelor superioare care a imprimat o anumită orientare particulelor solide și coeziunea materialului care a fixat această orientare.

I,. Considerăm materialul din stratele coezive drept material *transversal-izotrop*, iar în cazul stratelor necoezive drept material-*izotrop*.

În cele ce urmează vom explicita constantele elastice ale materialelor transversal-izotrope, constantele elastice ale materialelor izotrope putînd fi apoi obținute prin particularizarea acestora.

Forma polinomială completă (3.8) corespunde materialelor anizotrope, materiale a căror energie de deformație este funcție de toate componentele tensorului deformației. Existența unor simetrii în proprietățile elastice ale materialului face ca energia de deformație să depindă numai de anumiți invarianți ai tensorului deformației [11].

Astfel, alegînd drept axă de simetrie axa x_1, energia de deformație a materialelor transversal-izotrope este

$$w = w(\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E, \mathrm{III}_E, E_1, E_5^2 + E_6^2), \tag{4.1}$$

unde

$$\mathrm{I}_E = E_1 + E_2 + E_3, \quad \mathrm{II}_E = E_1E_2 + E_1E_3 + E_2E_3 - (E_4^2+E_5^2+E_6^2)/4 \tag{4.2}$$

$$\mathrm{III}_E = E_1E_2E_3 - E_4E_5E_6/4 - (E_1E_4^2 + E_2E_5^2 + E_3E_6^2)/4$$

sînt invarianții principali ai tensorului deformației **E**. Smith [12] a demonstrat că energia de deformație este o funcție polinomială de invarianții tensorului deformației **E**, astfel că ecuația (4.1) poate fi dezvoltată în

forma polinomială (în care vom reține termenii pînă la ordinul al patrulea inclusiv) :

$$w = \alpha_1 I_E^2 + \alpha_2 II_E + \alpha_3 E_1^2 + \alpha_4 E_1 I_E + \alpha_5 (E_5^2 + E_6^2) + \beta_1 I_E^3 + \beta_2 I_E II_E +$$
$$+ \beta_3 III_E + \beta_4 E_1^3 + \beta_5 E_1 I_E^2 + \beta_6 E_1^2 I_E + \beta_7 E_1 II_E + \beta_8 E_1 (E_5^2 + E_6^2) +$$
$$+ \beta_9 I_E (E_5^2 + E_6^2) + \gamma_1 I_E^4 + \gamma_2 II_E^2 + \gamma_3 I_E^2 II_E + \gamma_4 I_E III_E + \gamma_5 \qquad (4.3)$$
$$E_1 I_E^3 + \gamma_6 E_1^2 I_E^2 + \gamma_7 E_1^3 I_E + \gamma_8 E_1^4 + \gamma_9 E_1^2 II_E + \gamma_{10} E_1 III_E +$$
$$+ \gamma_{11} I_E^2 (E_5^2 + E_6^2) + \gamma_{12} E_1^2 (E_5^2 + E_6^2) + \gamma_{13} (E_5^2 + E_6^2)^2 + \gamma_{14} II_E (E_5^2 + E_6^2).$$

Din (4.3) rezultă că materialele transversal-izotrope pot fi complet caracterizate de seria de constante elastice : α_p ($p = 1, 2 \ldots 5$), β_q ($q = 1,2 \ldots 9$) și γ_t ($t = 1, 2 \ldots 14$). Introducînd (4.2) în (4.3), efectuînd calculele și identificînd cu (3.8) vom obține expresiile constantelor B_{MK}, C_{KMN}, D_{KMNR} nenule în funcție de constantele α_p, β_q, γ_k :

$$B_{11} = 2(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4); \quad B_{12} = B_{13} = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4; \quad B_{22} = B_{33} = 2\alpha_1, \qquad (4.4)$$
$$B_{23} = 2\alpha_1 + \alpha_2; \quad B_{44} = -\alpha_2/2; \quad B_{55} = B_{66} = -\alpha_2/2 + 2\alpha_5,$$

$$C_{111} = 6(\beta_1 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6); \quad C_{112} = C_{113} = 2(3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_5 + \beta_6 + \beta_7),$$
$$C_{112} = C_{113} = 2(3\beta_1 + \beta_2 + \beta_5); \quad C_{222} = C_{333} = 6\beta_1; \quad C_{233} = C_{223} = 2(3\beta_1 + \beta_2),$$
$$C_{123} = 6\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 + 2\beta_5 + \beta_7; \quad C_{144} = -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_7)/2, \qquad (4.5)$$
$$C_{155} = C_{166} = -(\beta_2 + \beta_7 - 4\beta_8 - 4\beta_9)/2; \quad C_{244} = C_{344} = -\beta_2/2,$$
$$C_{255} = C_{366} = -(\beta_2 + \beta_3 - 4\beta_9)/2; \quad C_{266} = C_{355} = -(\beta_2 - 4\beta_9)/2; \quad C_{456} = \beta_3/4,$$

$$D_{1111} = 24(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8); \quad D_{1112} = D_{1113} = 6(3\gamma_1 + \gamma_3 + 3\gamma_5 + 2\gamma_6 + \gamma_7 + \gamma\pi_9),$$
$$D_{1122} = D_{1133} = 4(6\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 3\gamma_5 + \gamma_6); \quad D_{1123} = 2(9\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 + \gamma_4$$
$$\gamma_4 + 6\gamma_5 + 6\gamma_6 + \gamma_9 + \gamma_{10}),$$
$$D_{1144} = -(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10}); \quad D_{1155} = D_{1166} = -(\gamma_3 + \gamma_9 - 4\gamma_{11} - 4\gamma_{12}),$$
$$D_{1222} = D_{1333} = 4(3\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5); \quad D_{1223} = D_{1233} = 2(9\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 + \gamma_4 + 3\gamma_5),$$
$$D_{1244} = D_{1344} = -(2\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/2; \quad D_{1255} = D_{1366} = -$$
$$- (2\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_{10} - 8\gamma_{11} + \gamma_{14})/2$$
$$D_{1266} = D_{1355} = -(2\gamma_2 + \gamma_3 - 8\gamma_{11} + \gamma_{14})/2); \quad D_{1456} = (\gamma_4 + \gamma_{14})/4, \qquad (4.6)$$
$$D_{2222} = D_{3333} = 24\gamma_1; \quad D_{2223} = D_{2333} = 6(\gamma_1 + \gamma_3); \quad D_{2233} = 4(6\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3),$$
$$D_{2244} = D_{3344} = -2\gamma_3; \quad D_{2255} = D_{3366} = -2(\gamma_3 + \gamma_4 - 4\gamma_{11}),$$
$$D_{2266} = D_{3355} = -2(\gamma_3 - 4\gamma_{11}); \quad D_{2344} = -(2\gamma_2 + \gamma_3)/2,$$
$$D_{2355} = D_{2366} = -2(2\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 8\gamma_{11} - 4\gamma_{14})/2; \quad D_{2456} = D_{3456} = \gamma_4/4,$$
$$D_{4444} = 3\gamma_2/2; \quad D_{4455} = D_{4466} = (\gamma_2 - 2\gamma_{14}/2,$$
$$D_{5555} = D_{6666} = (\gamma_2 + 16\gamma_{13} - 4\gamma_{14})/2; \quad D_{5566} = 3(\gamma_2 + 16\gamma_{13} - 4\gamma_{14})/2.$$

Deoarece energia de deformație a materialelor izotrope este funcție numai de invarianții principali (4.2), adică $w = w\ (I_E, II_E\ III_E)$ constantele elastice ale acestor materiale pot fi obținute prin particularizarea relațiilor (4.3) — (4.6). Astfel, din (4.3) rezultă că materialele izotrope sînt complet caracterizate de seria de constante elastice: $\alpha_p (p = 1, 2)$, $\beta_q (q = 1, 2, 3)$ și $\gamma_t (t = 1, 2, 3, 4)$, iar din (4.4) — (4.6) obținem constantele B_{KM}, C_{KMN} și D_{KMNR} corespunzătoare.

Remarcăm că atît materialele transversal-izotrope cît și materialele izotrope au aceleași constante B_{KM}, C_{KMN}, D_{KMNR} nenule, diferența dintre ele constînd numai în numărul de constante independente.

Înlocuind în (3.9) constantele B_{KM}, C_{KMN}, D_{KMNR} nenule obținem, în ambele ipoteze de izotropie inițială, 21 de funcții $c_{KM} = c_{KM}(E_1, E_2 \ldots E_6)$, funcții care traduc astfel anizotropia „de răspuns" provocată materialelor neliniare de procesul de deformare.

5. POSIBILITĂȚI DE DETERMINARE EXPERIMENTALĂ A CONSTANTELOR ELASTICE

Pentru determinarea experimentală a constantelor elastice dispunem de încercări de laborator pe probe netulburate prelevate din amplasamentul viitoarei construcții.

Prelevarea probei provoacă anularea stării de tensiune pe care a avut-o „in situ", stare care va trebui refăcută ca stare inițială pentru solicitările din aparat, evaluînd-o astfel:

$$\Pi_1 = \sigma_g\ ;\ \Pi_2 = \Pi_3 = k_0 \sigma_g \tag{5.1}$$

unde σ_g sînt tensiunile verticale produse de sarcina geologică, iar k_0 coeficientul presiunii laterale în stare de repaus [15]. Decomprimarea și recomprimarea probei modifică într-o oarecare măsură proprietățile naturale ale materialului, acest fapt constituind un dezavantaj inevitabil al încercărilor de laborator.

Indiferent de tipul aparatului de laborator, o probă de pămînt este solicitată de forțe cunoscute aplicate în trepte în decursul unui anumit interval de timp, măsurîndu-se la sfîrșitul fiecărui interval unele din modificările geometrice ale probei.

Pentru a putea evalua starea de tensiune și de deformație a probei vom utiliza ipoteza:

I_8. O treaptă de solicitare produce în probă o stare de tensiune uniformă, iar deplasările au variații liniare.

Astfel, tensiunile pot fi calculate direct din condițiile de contur:

$$\Pi_{kl} n_l = p_k, \tag{5.2}$$

unde **n** este normala exterioară a suprafeței de contur pe care sînt date presiunile exterioare **p**. De asemenea, fiind cunoscute variațiile deplasărilor poate fi calculat gradientul deplasării:

$$H_{km} = \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \tag{5.3}$$

și apoi tensorul deformației neliniare :

$$E_{km} = \frac{1}{2}(H_{km}+H_{mk}+H_{lk}H_{lm}). \tag{5.4}$$

Deci se pot obține la fiecare treaptă valori ale unor componente ale tensorilor tensiunii și deformației. Prelucrarea statistică a acestor valori cu ajutorul metodei regresiei multiple [1], permite obținerea unor dependențe în forma (3.9) între componentele tensorilor tensiunii și deformației, dependențe în care pot fi identificate unele din constantele elastice.

Desigur, datele furnizate de un aparat sînt suficiente pentru aplicarea modelului elastic neliniar, doar dacă starea de tensiune și de deformație a masivului este identică cu starea particulară realizată în aparat. Extinderea aplicabilității modelului la o stare oarecare este evident condiționată de posibilitatea identificării tuturor constantelor elastice.

Să analizăm acum posibilitățile oferite de aparatura obișnuită a unui laborator geotehnic : edometrul, aparatul de compresiune biaxială (impropriu numit „triaxial") și aparatul de forfecare directă.

1. Încercarea din edometru constă în comprimarea pe o singură direcție — cea verticală x_1, a unei probe cilindrice (cu diametrul de 7—10 cm înălțimea de 2—4 cm), fretată într-un inel metalic rigid. Încărcarea p_1 se aplică în trepte pe fața superioară a probei cu un piston a cărui deplasări sînt măsurate.

Notînd cu h înălțimea pe care a avut-o proba înainte de aplicarea treptei de încărcare și cu Δh deplasarea pistonului (fig. 1). și admițînd (conform ipotezei I_8) o variație liniară pe înălțime a deplasării u_1 (fig. 2), obținem

$$H_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{h}{h-\Delta h} \tag{5.5}$$

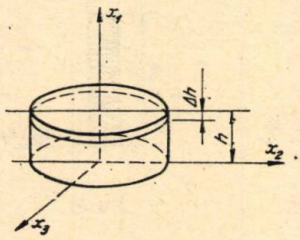


Fig. 1

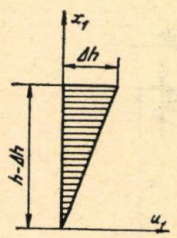


Fig. 2

și apoi, componenta E_1 a tensorului deformației :

$$E_1 = H_{11} + H_{11}^2/2. \tag{5.6}$$

De asemenea, conform aceleiași ipoteze I_8 :

$$\Pi_1 = p_1 \tag{5.7}$$

Particularizînd pentru acest caz ecuația (4.3), obținem

$$w = (\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)\, E_1^2+(\beta_1+\beta_4+\beta_5+\beta_6)\, E_1^3+(\gamma_1+\gamma_5+\gamma_6+\gamma_7+\gamma_8)\, E_1^4, \quad (5.8)$$

de unde rezultă

$$\Pi_1=2(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)\, E_1+3(\beta_1+\beta_4+\beta_5+\beta_6)\, E_1^2+4(\gamma_1+\gamma_5+\gamma_6+\gamma_7+\gamma_8) E_1^3 (5.9)$$

Prin prelucrarea statică a celor m valori Π_1, E_1 corespunzătoare celor m trepte de încărcare, se poate obține o funcție experimentală $\Pi_1 = \Pi_1(E_1)$ de forma ecuației (5.9) obținînd, astfel grupările de constante elastice din această ecuație.

Rezultatul de mai sus se obține dacă proba a fost recoltată astfel încît axa ei să coincidă cu axa de simetrie a materialului. În cazul cînd axa probei este perpendiculară pe axa de simetrie a materialului se poate arăta analog, că

$$\Pi_3 = 2(4\alpha_1 + \alpha_2)\, E_3 + 3\,(4\beta_1 + \beta_2)\, E_3^2 + 4\,(14\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3)\, E_3^3 \quad (5.10)$$

obținînd astfel și grupările de constante elastice din această relație.

2. Aparatul de compresiune biaxială oferă posibilitatea de a varia independent presiunea axială p_1 exercitată asupra unei probe cilindrice (uzual, cu diametrul de 3,8 cm și înălțimea de 8 cm), probă solicitată și de o presiune laterală p_3. Dacă axa de simetrie a materialului coincide cu axa probei x_1 starea de tensiune și de deformație a probei va fi axial simetrică cu $\Pi_2 = \Pi_3$ și $E_2 = E_3$.

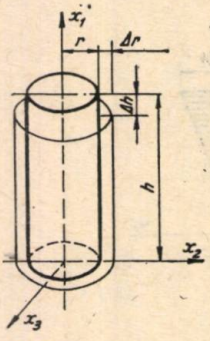


Fig. 3

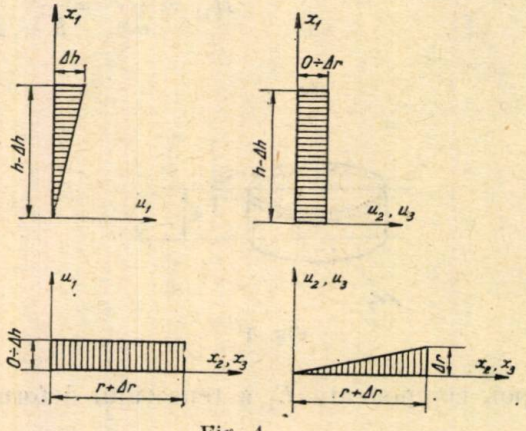


Fig. 4

La aparatele obișnuite se pot măsura numai deplasările axiale Δh; cele radiale Δr pot fi măsurate numai în laboratoarele care dispun de dispozitive optice sau bazate pe traductoare tensometrice. În plus, pe parcursul deformării, probele nu rămîn cilindrice datorită frecărilor care apar pe

bazele probei; ele suferă în general o evazare transversală, astfel că diametrul probei de formate variază pe înălțime. De aceea este preferabil să se măsoare la fiecare treaptă pe lîngă deplasarea axială și variația de volum θ, calculînd apoi o valoare medie a deplasării radiale:

$$\Delta r = (\Pi r^2 \Delta h - \theta)/2\Pi r h, \tag{5.11}$$

unde r este raza probei, iar h înălțimea ei înainte de aplicarea treptei de solicitare (fig. 3).

Admițînd distribuțiile de deplasări din figura 4, obținem

$$H_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{h}{h - \Delta h}; \quad H_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\Delta r}{r + \Delta r};$$

$$H_{33} = H_{22}; \quad H_{12} = H_{13} = H_{23} = 0, \tag{5.12}$$

relații din care pot fi calculate componentele E_1 și $E_2 = E_3$.

De asemenea, conform ipotezei I_8, avem

$$\Pi_1 = p_1; \quad \Pi_2 = \Pi_3 = p_3. \tag{5.13}$$

Deci, la fiecare treaptă biaxialul poate furniza valori ale componentelor Π_1, $\Pi_2 = \Pi_3$ și E_1, $E_2 = E_3$, prin prelucrarea cărora se pot obține funcțiile experimentale $\Pi_1 = \Pi_1(E_1, E_3)$ și $\Pi_3 = \Pi_3(E_1, E_3)$.

Forma acestor funcții o obținem prin particularizarea ecuației (4.1) care devine

$$w = w(\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E, \mathrm{III}_E, E_1), \tag{5.14}$$

unde

$$\mathrm{I}_E = E_1 + 2E_3; \quad \mathrm{II}_E = 2E_1E_3 + E_3^2; \quad \mathrm{III}_E = E_1E_3^2, \tag{5.15}$$

iar forma polinomială (4.3) a energiei se reduce în acest caz la

$$\begin{aligned} w = {} & \alpha_1\mathrm{I}_E^2 + \alpha_2\mathrm{II}_E + \alpha_3E_1^2 + \alpha_4E_1\mathrm{I}_E + \\ & + \beta_1\mathrm{I}_E^3 + \beta_2\mathrm{I}_E\mathrm{II}_E + \beta_3\mathrm{III}_E + \beta_4E_1^3 + \beta_5E_1\mathrm{I}_E^2 + \beta_6E_1^2\mathrm{I}_E + \\ & + \beta_7E_1\mathrm{II}_E + \gamma_1\mathrm{I}_E^4 + \gamma_2\mathrm{II}_E^2 + \gamma_3\mathrm{I}_E^2\mathrm{II}_E + \gamma_4\mathrm{I}_E\mathrm{III}_E + \gamma_5E_1\mathrm{I}_E^3 + \\ & + \gamma_6E_1^2\mathrm{I}_E^2 + \gamma_7E_1^3\mathrm{I}_E + \gamma_8E_1^4 + \gamma_9E_1^2\mathrm{II}_E + \gamma_{10}E_1\mathrm{III}_E. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Din (5.16) rezultă

$$\begin{aligned} \Pi_1 = {} & 2(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)E_1 + 2(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)E_3 + \\ & + 3(\beta_1 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6)E_1^2 + 4(3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)E_1E_3 + \\ & + (12\beta_1 + 5\beta_2 + \beta_3 + 4\beta_5 + \beta_7)E_3^2 + 4(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_6 + \\ & + \gamma_7 + \gamma_8)E_1^3 + 6(3\gamma_1 + \gamma_3 + 3\gamma_5 + 2\gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_9)E_1^2E_3 + \\ & + 2(21\gamma_1 + 4\gamma_2 + 9\gamma_3 + \gamma_4 + 12\gamma_5 + 4\gamma_6 + \gamma_9 + \gamma_{10})E_1E_3^2 + \\ & + 2(12\gamma_1 + 2\gamma_2 + 6\gamma_3 + \gamma_4 + 4\gamma_5)E_3^3, \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\Pi_3 = 2(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)E_1 + 2(4\alpha_1 + \alpha_2)E_3 + 2(3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)E_1^2 + (12\beta_1 + 5\beta_2 + \beta_3 + 4\beta_5 + \beta_7)E_1E_3 + 3(4\beta_1 + \beta_2)E_3^2 + (3\gamma_1 + \gamma_3 + 3\gamma_5 + 2\gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_9)E_1^3 + (21\gamma_1 + 4\gamma_2 + 9\gamma_3 + \gamma_4 + 12\gamma_5 + 4\gamma_6 + \gamma_9 + \gamma_{10})E_1^2E_3 + 3(13\gamma_1 + 2\gamma_2 + 9\gamma_3 + \gamma_4 + 6\gamma_5)E_1E_3^2 + 2(14\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3)E_3^3. \quad (5.18)$$

Prin urmare, biaxialul poate furniza grupările de constante conținute în (5.17) și (5.18).

3. Componenta principală a unui aparat de forfecare directă o constituie o casetă cu baza pătrată sau circulară, secționată după un plan orizontal sau înclinat. Porțiunea inferioară a casetei rămîne fixă în timp ce porțiunea superioară este antrenată de o forță orizontală P_2 aplicată în trepte sub acțiunea concomitentă a unei forțe verticale P_1, măsurîndu-se totodată, deplasările verticale Δh și orizontale Δl (fig. 5).

Deplasarea porțiunii superioare a casetei provoacă o transmitere a solicitărilor la porțiunea inferioară fixă prin intermediul probei, transmitere care are loc atît în sens vertical, cît și între fețele verticale opuse situate pe direcția deplasării.

Admițînd pentru deplasările apărute în cadrul unei trepte distribuțiile de deplasări din figura 6 și utilizînd notațiile din figura 5, obținem

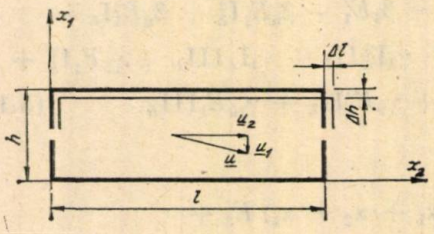


Fig. 5

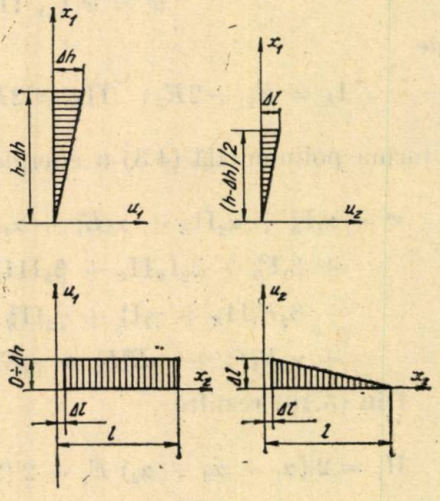


Fig. 6

$$H_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta h}{h - \Delta h}; \quad H_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$H_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\Delta l}{l - \Delta l}; \quad H_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{2\Delta l}{h - \Delta h}, \quad (5.19)$$

relații cu valabilitate restrînsă la zona de alunecare creată între cele două porțiuni ale casetei. Componentele deformației din această zonă vor fi deci, E_1, E_2 și E_6, iar componentele tensiunii :

$$\Pi_1 = P_1/l^2; \qquad \Pi_6 = P_2/l_2. \tag{5.20}$$

Se pot deci, obține funcțiile experimentale $\Pi_1 = \Pi_1(E_1, E_2, E_6)$ și $\Pi_6 = \Pi_6(E_1, E_2, E_6)$ funcții a căror formă rezultă din particularizarea ecuației (4.1), care în acest caz devine :

$$w = w(\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E, E_1, E_6^2), \tag{5.21}$$

unde

$$\mathrm{I}_E = E_1 + E_2; \qquad \mathrm{II}_E = E_1E_2 - E_6^2/4. \tag{5.22}$$

Forma polinomială (4.3) se reduce la

$$\begin{aligned} w = {} & \alpha_1\mathrm{I}_E^2 + \alpha_2\mathrm{II}_E + \alpha_3E_1^2 + \alpha_4E_1\mathrm{I}_E + \alpha_5E_6^2 + \\ & + \beta_1\mathrm{I}_E^3 + \beta_2\mathrm{I}_E\mathrm{II}_E + \beta_4E_1^3 + \beta_5E_1\mathrm{I}_E^2 + \beta_6E_1^2\mathrm{I}_E + \beta_7E_1\mathrm{II}_E + \beta_8E_1E_6^2 + \\ & + \beta_9E_6^2\mathrm{I}_E + \gamma_1\mathrm{I}_E^4 + \gamma_2\mathrm{II}_E^2 + \gamma_3\mathrm{I}_E^2\mathrm{II}_E + \gamma_5E_1\mathrm{I}_E^3 + \gamma_6E_1^2\mathrm{I}_E^2 + \\ & + \gamma_7E_1^3\mathrm{I}_E + \gamma_9E_1^2\mathrm{II}_E + \gamma_{11}E_6^2\mathrm{I}_E^2 + \gamma_{12}E_6^2\mathrm{I}_E^2 + \gamma_{13}E_6^4 + \gamma_{14}E_6^2\,\mathrm{II}_E. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Din (5.23) se obține

$$\begin{aligned} \Pi_1 = {} & 2(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)\,E_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)\,E_2 + \\ & + 3(\beta_1 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6)\,E_1^2 + 2(3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)E_1E_2 + \\ & + 3(3\beta_1 + \beta_2 + \beta_5)\,E_2^2 + \frac{1}{4}(-\beta_2 - \beta_7 + 4\beta_8 + 4\beta_9)\,E_6^2 + \\ & + 4(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7)E_1^3 + 3(4\gamma_1 + \gamma_3 + 3\gamma_5 + 2\gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_9)\,E_1^2E_2 + \\ & + 2(6\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + 3\gamma_5 + \gamma_6)\,E_1E_2^2 + (4\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5)\,E_2^3 + \\ & + \frac{1}{2}(-\gamma_3 - \gamma_9 + 4\gamma_{11} + 4\gamma_{12})\,E_1E_6^2 + \frac{1}{2}(-\gamma_2 - \gamma_3 + 2\gamma_{14})\,E_2E_6^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \Pi_6 = {} & \frac{1}{2}(-\alpha_2 + 4\alpha_5)\,E_6 + \frac{1}{2}(-\beta_2 - \beta_7 + 2\beta_8 + 2\beta_9)\,E_1E_6 + \\ & + \frac{1}{2}(-\beta_2 + 4\beta_9)\,E_2E_6 + \frac{1}{2}(-\gamma_3 - \gamma_9 + 4\gamma_{11} + 4\gamma_{12})\,E_1^2E_6 + \\ & + (-\gamma_2 - \gamma_3 + 4\gamma_{11} + 2\gamma_{14})\,E_1E_2E_6 + \frac{1}{2}(-\gamma_3 + 4\gamma_{11})\,E_2^2E_6 + \\ & + \frac{1}{4}(-\gamma_2 + 4\gamma_{13} + 4\gamma_{14})\,E_6^3. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Rezultatele de mai sus se obțin prin încercarea unei probe prelevate astfel încît axa de simetrie a probei să coincidă cu axa verticală x_1. Dacă axa de simetrie a materialului coincide cu axa x_2 se obțin componentele Π_3, Π_4 și E_2, E_3, E_4; invarianții (4.2) se reduc la

$$\mathrm{I}_E = E_2 + E_3; \qquad \mathrm{II}_E = E_2E_3 - E_4^2/4, \tag{5.26}$$

iar forma polinomială a energiei de deformație devine $w = w\ (\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E)$, adică

$$w = \alpha_1 \mathrm{I}_E^2 + \alpha_2 \mathrm{II}_E + \beta_1 \mathrm{I}_E^3 + \beta_2 \mathrm{I}_E \mathrm{II}_E + \gamma_1 \mathrm{I}_E^4 + \\ + \gamma_2 \mathrm{II}_E + \gamma_3 \mathrm{I}_E^2 \mathrm{II}_E, \tag{5.27}$$

formă din care se obțin relațiile:

$$\Pi_3 = (2\alpha_1 + \alpha_2) E_2 + 2\alpha_1 E_3 + (3\beta_1 + \beta_2) E_2^2 + 2(3\beta_1 + \beta_2) E_2E_3 + \\ + 3\beta_1 E_3^2 + (-\beta_2/2) E_4^2 + (4\gamma_1 + \gamma_3) E_2^3 + \\ + 2(6\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3) E_2^2E_3 + 3(4\gamma_1 + \gamma_3) E_2E_3^2 + \\ + 4\gamma_1 E_3^3 + \frac{1}{2}(-\gamma_2 - \gamma_3) E_2E_4^2 + (-\gamma_3/2) E_3E_4^2, \tag{5.28}$$

$$\Pi_4 = (-\alpha_2/2) E_4 + (-\beta_2/2) E_2E_4 + (-\beta_2/2) E_3E_4 + \\ + (-\gamma_3/2) E_2^2E_4 + (-\gamma_3/2) E_3^2E_4 + (-\gamma_2 - \gamma_3) E_2E_3E_4 + \\ + (\gamma_2/4) E_4^3. \tag{5.29}$$

Prin urmare, aparatul de forfecare directă poate furniza în primul tip de încercare grupările de constante elastice din (5.24) și (5.25), iar în cel de-al doilea tip de încercare grupările conținute în (5.28) și (5.29).

Grupările de constante elastice furnizate de aceste trei aparate permit scrierea unor ecuații algebrice în care necunoscutele sînt constantele elastice, iar termenii liberi sînt valorile experimentale ale acestor grupări. Aceste ecuații formează trei sisteme liniare corespunzătoare celor trei ordine ale constantelor.

Rezultă astfel, un sistem cu cinci ecuații independente al constantelor de ordinul al doilea din care se pot obține cele cinci constante α_p. Însă, sistemul constantelor de ordinul al treilea este format numai din opt ecuații independente, insuficiente pentru determinarea celor nouă constante β_q. La fel și în cazul constantelor de ordinul al patrulea, pentru cele 14 constante γ_t dispunem de un sistem de 13 ecuații.

Rezultă deci, că extinderea aplicabilității modelului elastic neliniar în ipoteza comportării transversal-izotrope nu poate fi făcută decît prin adoptarea unei ipoteze simplificatoare. Se observă însă, că în ipoteza comportării izotrope extinderea poate fi realizată direct, fără aportul unor ipoteze simplificatoare. O ipoteză utilizată frecvent în mecanica pămînturilor afirmă:

I$_9$. Energia de deformație poate fi descompusă aditiv în energie de variație a volumului w_v și energie de variație a formei w_f.

În cazul materialelor izotrope această descompunere are forma

$$w(I_E, II_E, III_E) = w_v(I_E) + w_f(II_D, III_D), \tag{5.30}$$

unde

$$II_D = II_E - I_E^2/3\,; \quad III_D = III_E - I_E\,II_E/3 + 2I_E^3/27 \tag{5.31}$$

sînt invarianții deviatorului tensorului deformației **D.** H. Kauderer a demonstrat [5] că w_f nu poate depinde de III_D astfel încît această descompunere implică independența lui w de III_E.

Extinzînd valabilitatea acestei ipoteze și asupra materialelor transversal-izotrope, numărul constantelor elastice se reduce ($\beta_3 = \gamma_4 = \gamma_{10} = 0$) și, astfel relațiile furnizate de cele trei aparate devin suficiente.

Tabela 1

Starea de tensiune și (sau) de deformație	Ipoteze		Date experimentale	
	De izotropie	simplificatoare	Aparatura	Funcții experimentale
Oarecare	Izotropie transversă	$\beta_3 = 0$ $\gamma_4 = \gamma_{10} = 0$	Biaxial	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1, E_3)$
			Aparat de forfecare	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1, E_2, E_6)$
				$\Pi_3 = \Pi_3\,(E_2, E_3, E_4)$
				$\Pi_4 = \Pi_4\,(E_2, E_3, E_4)$
				$\Pi_6 = \Pi_6\,(E_1, E_2, E_6)$
	Izotropie	—	Biaxial	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1, E_3)$
	Izotropie	$\beta_3 = 0$ $\gamma_4 = 0$	Edometru	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1)$
			Ap. de forfecare	$\Pi_6 = \Pi_6\,(E_1, E_2, E_6)$
Axial simetrică	Izotropie transversă	—	Biaxial	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1, E_3)$
				$\Pi_3 = \Pi_3\,(E_1, E_3)$
			Ap. de forfecare	$\Pi_6 = \Pi_6\,(E_1, E_2, E_6)$
Deformație plană	Izotropie transversă	—	Biaxial	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1, E_3)$
			Ap. de forfecare	$\Pi_1 = \Pi_1\,(E_1, E_2, E_6)$
				$\Pi_3 = \Pi_3\,(E_2, E_3, E_6)$
				$\Pi_6 = \Pi_6\,(E_1, E_2, E_6)$

Analiza de mai sus a posibilităților aparaturii curente relevă faptul că aplicabilitatea modelului elastic neliniar este în parte îngrădită de limitele acestei aparaturi. Dar chiar în cadrul acestor limite modelul oferă posibilitatea rezolvării mai riguroase a unei game largi de probleme (vezi tab. 1) — gamă care poate fi considerabil extinsă prin perfecționarea aparaturii de laborator.

Primită la redacție la 14 octombrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes, *Applied numerical methods*, J. Wiley, New York, 1969.
2. J. M. Duncan, C. Y. Chang, *Non linear analysis of stress and strain in soils*, J. SM. Div. ASCE, **96** (1970).
3. Y. H. Huang, *Stress and displacement in non linear soil media*, J. SM. ASCE, **94** (1968).
4. B. Kamenov, *Cîteva probleme ale calculului relației neliniare efort-deformație a pămînturilor* (în cehă), Stavebnicky Časopis SAV, *6—8* (1973).
5. H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, 1958.
6. R. L. Kondner, *Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils*, J. SM. Div. ASCE, **89** (1963).
7. R. L. Kondner, I. S. Zelasko, *A hiperbolic stress-strain formulation for sands*, Proc. 2nd Panam. Conf. Soil Mech. Found. Engr., Sao Paulo, 1963.
8. Z. Mröz, *On stress-strain relations in soil mechanics*, Proc. 1 st. Baltic Conf. Soil Mech. Found. Eng., Gdansk, 1975.
9. I. Nelson, M. L. Baron, *Aplication of variable moduli models to soil behaviour*, Int. J. Solids Struct., *7* (1971).
10. D. J. Pickering, *Anisotropic elastic parameters for soil*, Géotechnique, **20** (1970).
11. G. F. Smith, R. S. Rivlin, *The strain-energy function for anisotropic elastic materials*, Trans. Amer. Math. Soc., **88** (1958).
12. G. F. Smith, *Further results on the strain-energy function for anisotropic elastic materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., *10* (1962).
13. C. Teodosiu, *Modele elastice ale defectelor cristaline*, Edit. Acad. R. S. România, 1976.
14. C. Truesdell, W. Noll, *The non linear field theories of mechanics*, Springer-Verlag, 1965.
15. C. P. Wroth, *General theories of earth pressures and deformations — General report*, Proc. 5th Eur. Conf. Soil. Mech. Found. Eng., Madrid, 1972.

UN ALGORITM DE CALCUL AL PLĂCILOR PLANE CU REZEMARE ELASTICĂ PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

de N. ŢOPA
IANB — Facultatea de Îmbunătăţiri funciare

În lucrare se propune un algoritm de calcul pentru plăcile cu contur şi încărcări oarecare rezemate elastic.
Se iau în consideraţie trei tipuri de rezemări : pe pat continuu (de tip Winkler), pe grinzi elastice la încovoiere şi torsiune şi în puncte izolate, pe stîlpi, ţinîndu-se seama de elasticitatea lor axială şi transversală.
Elementele folosite sînt de tip triunghiular (pentru plăci) şi de tip liniar (pentru grinzi şi stîlpi).

1. DOMENIUL DE APLICARE

În lucrare este prezentată o metodă de calcul a plăcilor plane cu încărcări normale pe planul lor, rezemate elastic atît în cîmp curent cît şi pe contur.

Rezemările elastice considerate în lucrare sînt de trei tipuri : rezemare elastică de suprafaţă (tip Winkler), rezemare elastică liniară (prin intermediul unor grinzi) şi rezemare elastică punctuală (de exemplu prin stîlpi elastici).

Forma geometrică în plan a plăcii, dispunerea legăturilor, caracteristicile elastice ale plăcii şi ale elementelor de rezemare pot fi oarecare. Studiul este făcut în domeniul elastic.

2. PRINCIPIUL METODEI

Suprafaţa plăcii se împarte în elemente triunghiulare (fig. 1) astfel încît grinzile să constituie în acelaşi timp şi laturi ale triunghiurilor. Dacă există puncte de rezemare triunghiurile se aleg astfel încît aceste puncte să se afle în noduri ale reţelei.

Parametri determinanţi ai stării de deformaţie şi eforturi se consideră săgeţile şi rotirile după două direcţii în fiecare nod (fig. 2).

Lista nodurilor este

$$1, 2, 3, \ldots i \ldots j \ldots m \ldots n, \qquad (1)$$

care implică o listă generală a parametrilor fundamentali, conținînd $3n$ mărimi :

$$w_1\ \varphi_{x1},\ \varphi_{y1},\ w_2,\ \varphi_{x2},\ \varphi_{y2},\ \ldots,\ w_n,\ \varphi_{xn},\ \varphi_{yn}. \tag{2}$$

Drept elemente finite ale sistemului vor fi considerate trei categorii după cum urmează (fig. 1) : elementele triunghiulare de placă (de exemplu elementul e definit de trei noduri i, j, m în sensul listei (1)) ; elementele liniare ale grinzilor de rezemare (de exemplu segmentul de grindă r definit de două noduri adiacente s și $s+1$) ; elementele punctuale de rezemare (de exemplu legătura din nodul p).

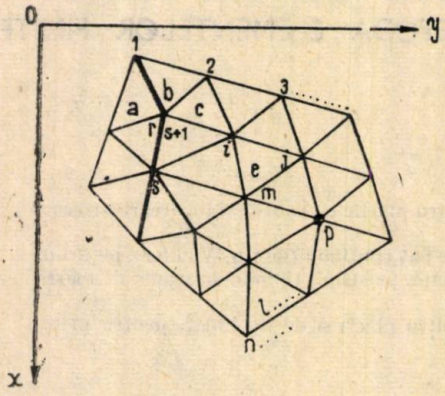


Fig. 1

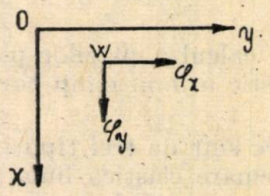


Fig. 2

Fiecare din aceste elemente induc în nodurile sistemului o serie de forțe care alcătuiesc grupuri de sisteme locale de forțe în echilibru în fiecare nod. În exprimarea matematică a acestei stări de echilibru, în care toate mărimile intervin prin intermediul parametrilor fundamentali (2), constă esența metodei.

Cele trei tipuri de elemente trebuie analizate separat pentru determinarea forțelor de nod corespunzătoare.

3. DETERMINAREA FORȚELOR DE NOD LA ELEMENTELE TRIUNGHIULARE

3.1. *Aspectul geometric.* Fie un element curent e (fig. 1). Ca și în [4] se propune drept funcție, care să descrie suprafața deformată a plăcii pe acest element, expresia

$$w = \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 y + \alpha_3 x^2 y^2 + \alpha_4 x y^3 + \alpha_5 y^4 + \alpha_6 x^3 + \\ + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2 + \alpha_9 y^3. \tag{3}$$

Cele două rotiri dintr-un punct curent (fig. 2) sînt :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = -4\alpha_1 x^3 - 3\alpha_2 x^2 y - 2\alpha_3 x y^2 - \alpha_4 y^3 - 3\alpha_6 x^2 - 2\alpha_7 x y - \alpha_8 y^2$$

$$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_2 x^3 + 2\alpha_3 x^2 y + 3\alpha_4 x y^2 + 4\alpha_5 y^3 + \alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 x y + 3\alpha_9 y^2. \tag{4}$$

Relațiile (3) și (4) pot fi sintetizate într-o formă matriceală, exprimînd mărimile într-un punct curent :

$$v = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = h\alpha_e, \tag{5}$$

unde

$$h = \begin{bmatrix} x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ -4x^3 & -3x^2y & -2xy^2 & -y^3 & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 \\ 0 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 4y^3 & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\alpha_e = \begin{bmatrix} \alpha_{1e} \\ \alpha_{2e} \\ \vdots \\ \alpha_{9e} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Pentru cazul cînd vectorul v se aplică unui punct anumit, de exemplu unui nod, se specifică acest lucru printr-un indice indicînd numărul nodului.

Elementului triunghiular e se poate atașa deci un vector al deplasărilor nodurilor :

$$V_e = \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ \vdots \\ \varphi_{ym} \end{bmatrix} \tag{8}$$

unde v_i, v_j, v_m sînt de tipul (5) localizate în punctele i, j, m.

Corespunzător relației (5) se poate scrie

$$V_e = H_e \alpha_e, \tag{9}$$

unde

$$H_e = \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{bmatrix}, \tag{10}$$

h_i, h_j, h_m fiind de tipul (6) localizate la punctele i, j, m.

3.2. *Aspectul fizic.* Se definește vectorul momentelor într-un punct :

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_{xy} \\ M_y \end{bmatrix}, \tag{11}$$

Pentru exprimarea aspectului fizic este necesară stabilirea expresiilor curburilor într-un punct. Fie acestea

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X; \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = T; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Y, \tag{12}$$

alcătuind vectorul

$$z = \begin{bmatrix} X \\ T \\ Y \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Ținînd seama de (3) și de exprimarea momentelor în funcție de curburi, se poate scrie:

$$M = -\mathrm{d}z, \tag{14}$$

unde am folosit matricea d

$$d = D\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & \dfrac{1-\mu}{2} & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

D fiind rigiditatea cilindrică a plăcii.

Ținînd seama de (12) și (3) se poate scrie, pentru un punct curent din interiorul triunghiului e:

$$z = g\alpha_e, \tag{16}$$

unde

$$g = \begin{bmatrix} 12x^2 & 6xy & 2y^2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 6x^2 & 8xy & 6y^2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \\ 0 & 0 & 2x^2 & 6xy & 12y^2 & 0 & 0 & 2x & 6y \end{bmatrix}. \tag{17}$$

iar α_e este dat în (7).

Relația (14) poate fi pusă acum în funcție de parametrii fundamentali (2) pornind de la (14), (16) și (9).

$$M = -\,dgH_e^{-1}V_e. \tag{18}$$

3.3. *Aspectul static.* Legăturile reale, continue ale elementului triunghiular e vor fi înlocuite cu trei legături la nod, care asigură mărimi comune deplasărilor w și rotirilor φ_x și φ_y. Corespunzător acestor legături iau naș-

tere forțe de legătură echivalente cu sistemul real de forțe exterioare și de legătură așa cum este arătat în figura 3.

Fie vectorul acestor forțe echivalente în triunghiul e:

$$F_e = \begin{bmatrix} f_{ei} \\ f_{ej} \\ f_{em} \end{bmatrix} \quad f_{ei} = \begin{bmatrix} F_{ei} \\ M_{xei} \\ M_{yei} \end{bmatrix} \text{ etc.} \tag{19}$$

Pentru determinarea componentelor vectorului F_e se dă o deplasare virtuală $\bar{V}_e$ având toate componentele unitare pentru care lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură reale precum și al forțelor echivalente trebuie să fie egale.

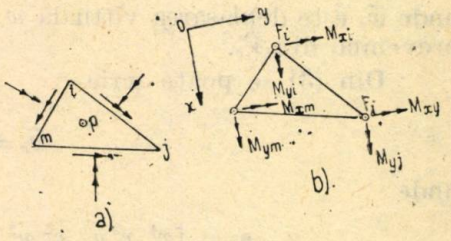


Fig. 3

Conform principiului deplasărilor virtuale se poate scrie:

$$\bar{L}_{ext(p)} + \bar{L}_{ext(leg)} + \bar{L}_{ext(el)} = \bar{L}_{ef}, \tag{20}$$

unde termenii din stînga reprezintă lucrul mecanic virtual efectuat de forțele exterioare (p), forțele reale de legătură (leg) și forțele din rezemarea elastică a elementului e (el), iar termenul din dreapta reprezintă lucrul mecanic al eforturilor pe toată aria elementului e.

Prin aceeași deplasare verticală $\bar{V}_e$ ansamblul forțelor echivalente (19) produce lucrul mecanic virtual:

$$\bar{L}_{ext(ech)} = \bar{V}_e^T F_e, \tag{21}$$

unde $\bar{V}_e$ este vectorul virtual (8) având toate elementele egale în unitatea. Indicele superior T indică transpoziția.

Din (21) și (20) rezultă

$$\bar{V}_e^T F_e = \bar{L}_{ef} - \bar{L}_{ext(p)} - \bar{L}_{ext(el)}. \tag{22}$$

Considerînd elementele care intervin în partea dreaptă a relației (22) constante pe triunghiul e și anume egale cu cele din centrul de greutate se poate scrie [4]:

$$\bar{L}_{ef} = - A_e \bar{z}_e^T M_e, \tag{23}$$

unde A_e reprezintă aria triunghiului e, $\bar{z}_e$ este vectorul virtual (13) aplicat în centrul de greutate al triunghiului e și provenind din $\bar{V}_e$, iar M_e este vectorul (11) considerat de asemenea în centrul de greutate al triunghiului e. Indicele superior T indică matricea transpusă.

Folosind (16), (9) și (18) se poate scrie:

$$\bar{L}_{ef} = \bar{V}_e^T L_e V_e, \tag{24}$$

unde matricea 9×9 L_e este:

$$\bar{L}_e = A_e (H_e^{-1})^T g_e^T d g_e H_e^{-1}. \tag{25}$$

Cel de-al doilea termen din (22) se deduce aproximînd sarcina exterioară sub forma unei sarcini uniform distribuite pe triunghiul e avînd intensitate p_e orientată în sensul axei z. Dacă există forțe concentrate, acestea se împart la aria A_e și se adaugă celor distribuite. Cu oarecare aproximații lucrul mecanic respectiv este

$$\bar{L}_{ext(p)} = p_e A_e \bar{w}_e, \tag{26}$$

unde $\bar{w}_e$ este deplasarea virtuală w în centrul de greutate al triunghiului provenind din $\bar{V}_e$.

Din (3) se poate scrie

$$\bar{w}_e = \bar{\alpha}_e^T e_1^T, \tag{27}$$

unde

$$e_1 = [x_e^4 \; x_e^3 y_e \; x_e^2 \; y_e^2 \; x_e y_e^3 \; y_e^4 \; x_e^3 \; x_e^2 y_e \; x_e y_e^2 \; y_e^3]. \tag{28}$$

Din (26), (27) și (9) rezultă

$$\bar{L}_{ext(p)} = \bar{V}_e^T P_e, \tag{29}$$

unde vectorul P_e este

$$P_e = p_e A_e (H_e^{-1})^T e_1^T. \tag{30}$$

Pentru cel de-al treilea termen din (22) se va considera numai ipoteza Winkler. Notînd coeficientul de proporționalitate cu k_e și acceptînd o mărime constantă a elementelor ce concură la efectuarea lucrului mecanic, se poate scrie :

$$\bar{L}_{ext(el)} = -\iint \bar{w} k_e w \, dx \, dy = -k_e A_e \bar{w}_e w_e. \tag{31}$$

Folosind relațiile (27), (9), se ajunge la

$$\bar{L}_{ext(el)} = -\bar{V}_e^T K_e V_e, \tag{32}$$

unde

$$K_e = k_e A_e (H_e^{-1})^T e_1^T e_1 H_e^{-1}. \tag{33}$$

Din (22), (24), (29), (32), rezultă

$$F_e = (L_e + K_e) V_e - P_e. \tag{34}$$

În relația (34) vectorii F_e, V_e și P_e au nouă elemente pe verticală, iar matricea $L_e + K_e$ are dimensiunea de 9×9.

În contextul general numărul total de parametri fundamentali necunoscuți de tip (8) este dat de lista (2). Fie vectorul general

$$V = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \vdots \\ \varphi_{yn} \end{bmatrix} \tag{35}$$

avînd un număr de $N = 3n$ elemente.

În acest context relația (34) se transcrie astfel :

$$F'_e = (L'_e + K'_e)V - P'_e, \tag{36}$$

unde vectorii F'_e, P'_e, V au N elemente, iar matricea $L'_e + K'_e$ are dimensiunea $N \times N$. Vectorii F'_e și P'_e precum și matricea $L'_e + K'_e$ se obțin construind matricele și vectorii în ordinea listei (2), completînd cu elementele din matricele triunghiului e în dreptul căsuței corespunzătoare, iar restul elementelor fiind nule.

4. DETERMINAREA FORȚELOR DE NOD LA ELEMENTELE LINIARE

4.1. *Aspectul geometric.* Un element liniar este un segment dintr-o grindă de rezemare avînd adiacente elementele triunghiulare de placă fie în ambele părți, fie într-o singură parte. Se presupune în mod simplificat, că elementele triunghiulare sînt legate de grindă numai la nodurile rețelei unde deplasările w, φ_x, φ_y (parametri fundamentali) sînt comuni atît vîrfurilor de triunghiuri, cît și extremităților de grindă care converg în nod (fig. 4). Rezultă, așadar, că, în deformarea ansamblului, nodurile s și $s + 1$, adiacente segmentului r, au deformațiile comune cu cele ale vîrfurilor triunghiurilor ce converg în nod, aceste deformații inducînd prin aceasta eforturi în segmentul de bară r.

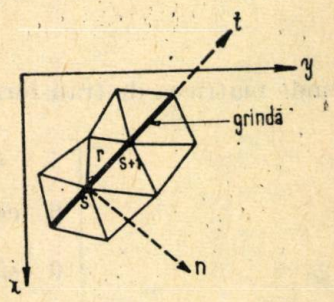


Fig. 4

Ansamblul deplasărilor — parametri fundamentali — atașate segmentului curent r este constituit din cele șase deplasări caracteristice de la capete luate în ordinea listei (2) care alcătuiesc vectorul cu șase elemente

$$V_r = \begin{bmatrix} w_s \\ \varphi_{xs} \\ \varphi_{ys} \\ w_{s+1} \\ \varphi_{xs+1} \\ \varphi_{ys+1} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Este mai comod, să se analizeze, în prealabil, deplasările în sistemul de axe al segmentului r, axele n, t din figura 4 alese astfel încît între vectorii acestor axe să existe relația $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{\eta} \times \bar{\tau}$ (fig. 5).

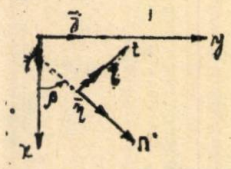


Fig. 5

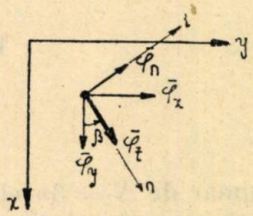


Fig. 6

Fie vectorul deplasărilor în coordonate locale așa cum sînt indicate în figura 6 :

$$V_{ar} = \begin{bmatrix} w_s \\ \varphi_{ns} \\ \varphi_{ts} \\ w_{s+1} \\ \varphi_{ns+1} \\ \varphi_{ts+1} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Între cei doi vectori există relația

$$V_{ar} = T_r V_r, \tag{39}$$

unde matricea de transformare T_r este

$$T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}. \tag{40}$$

4.2. *Aspectul static.* Deplasările (38) și încărcările exterioare introduc în segmentul de bară — presupus cu secțiune constantă pe zona dintre nodurile s și $s+1$ — eforturi, și în ultimă instanță forțe de legătură la

capetele segmentului. Fie forțele de nod alcătuind vectorul F_{ar} în coordonate locale (fig. 7),

$$F_{ar}=\begin{bmatrix} F_s \\ M_{ns} \\ M_{ts} \\ F_{s+1} \\ M_{ns+1} \\ M_{ts+1} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

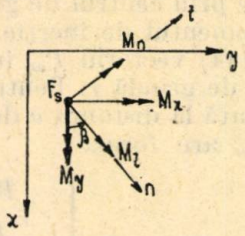


Fig. 7

Componentele pozitive ale vectorului F_{ar} sînt orientate în sensul pozitiv al axelor respective.

În coordonatele generale forțele de nod pot fi grupate în alt vector :

$$F_r=\begin{bmatrix} F_s \\ M_{xs} \\ M_{ys} \\ F_{s+1} \\ M_{xs+1} \\ M_{ys+1} \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Este ușor de văzut că acești doi vectori sînt legați prin relația

$$F_r = T_r^T F_{ar}, \tag{43}$$

unde T_r^T este transpusa lui T_r din (40).

4.3. *Aspectul fizic.* Deplasările (38) și forțele exterioare determină forțele de nod (41) între ele existînd relația

$$F_{ar} = L_{ar} V_{ar} - P_{ar}, \tag{44}$$

unde matricea L_{ar} este matricea de rigiditate a segmentului de bară r, care este presupus a avea o secțiune constantă între nodurile s și $s+1$.

$$L_{ar}=\begin{bmatrix} \frac{12i}{l^2} & 0 & \frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2} & 0 & \frac{6i}{l} \\ 0 & i_t & 0 & 0 & -i_t & 0 \\ \frac{6i}{l} & 0 & 4i & -\frac{6i}{l} & 0 & 2i \\ -\frac{12i}{l^2} & 0 & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & 0 & -\frac{6i}{l} \\ 0 & -i_t & 0 & 0 & i_t & 0 \\ \frac{6i}{l} & 0 & 2i & -\frac{6i}{l} & 0 & 4i \end{bmatrix}. \tag{45}$$

În relația (45) s-a notat prin l lungimea segmentului $s - s + 1$, prin i raportul EI/l, I fiind momentul de inerție al secțiunii barei în raport cu axa n ce trece prin centrul de greutate al secțiunii și prin i_t raportul GI_t/l, I_t fiind momentul de inerție convențional de torsiune.

În relația (44) vectorul P_{ar} indică influența încărcărilor exterioare de pe segmentul de grindă r. Pentru cazul unei încercări concentrate în sensul axei z situată la distanța a de nodul s și b de nodul $s+1$ ($a + b = l$) vectorul P_{ar} are forma

$$P_{ar} = \begin{bmatrix} \frac{Pb^2}{l^3}(l + 2a) \\ 0 \\ P\frac{ab^2}{l^2} \\ \frac{Pa^2}{l^3}(l + 2b) \\ 0 \\ -P\frac{ab^2}{l^2} \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Dacă sînt mai multe încărcări concentrate fiecare termen rezultă din însumarea efectelor tuturor forțelor concentrate.

Din (43), (44) și (39) rezultă

$$F_r = L_r V_r - P_r, \tag{47}$$

unde

$$\begin{aligned} L_r &= T_r^T L_{ar} T_r, \\ P_r &= T_r^T P_{ar}. \end{aligned} \tag{48}$$

Relația (47) poate fi așezată în contextul general în același mod în care s-a făcut trecerea de la (34) la (36):

$$F'_r = L'_r V - P'_r. \tag{49}$$

5. DETERMINAREA FORȚELOR DE NOD LA ELEMENTELE PUNCTUALE

5.1. *Aspectul geometric.* Un element punctual de rezemare este de obicei un stîlp. Se va considera stîlpul ca element participant al ansamblului. Prin convenția făcută asupra împărțirii cîmpului plăcii în triunghiuri, stîlpul este plasat într-un nod al rețelei (fig. 1).

Din conlucrarea tuturor elementelor care concură rezultă că extremitatea stîlpului are deformații comune cu toate vîrfurile de triunghiuri adiacente precum și cu toate extremitățile barelor ce converg în nod.

Punctului de rezemare p i se ataşează un vector al deplasărilor :

$$V_p = \begin{bmatrix} w_p \\ \varphi_{xp} \\ \varphi_{yp} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Orientarea stîlpului sau a elementului de rezemare punctuală poate fi însă oarecare. În cazul unui stîlp normal pe planul plăcii fie n şi t axele principale de inerţie ale secţiunii stîlpului orientate ca în figura 5. În acest caz, fie V_{ap} vectorul deplasărilor în coordonate locale :

$$V_{ap} = \begin{bmatrix} w_p \\ \varphi_{np} \\ \varphi_{tp} \end{bmatrix}, \tag{51}$$

deplasările fiind dispuse ca în figura 6.

Vectorii (50) şi (51) sînt legaţi prin relaţia

$$V_{ap} = T_p V_p, \tag{52}$$

unde

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}. \tag{53}$$

5.2. *Aspectul static.* Deplasările (51) induc în stîlp un ansamblu de forţe de capăt, care pot fi grupate într-un vector local :

$$F_{ap} = \begin{bmatrix} F_p \\ M_{np} \\ M_{tp} \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Ansamblul de forţe poate fi grupat însă şi în alt vector, în coordonatele generale x şi y :

$$F_p = \begin{bmatrix} F_p \\ M_{xp} \\ M_{yp} \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Cei doi vectori (54) și (55) sînt legați prin relația

$$F_p = T_p^T F_{ap}, \tag{56}$$

unde T_p^T este transpusa lui T_p din relația (53).

5.3. *Aspectul fizic.* Deplasările (51) și eventualele forțe exterioare determină apariția unor forțe de legătură (54) în extremitatea elementului de rezemare. Într-un caz general va exista între V_{ap} și F_{ap} o relație de forma

$$F_{ap} = L_{ap} V_{ap} - P_{ap}, \tag{57}$$

unde L_{ap} reprezintă matricea de rigiditate a elementului punctual de rezemare și are forma

$$L_{ap} = \begin{bmatrix} k_{zz} & k_{zn} & k_{zt} \\ k_{nz} & k_{nn} & k_{nt} \\ k_{tz} & k_{tn} & k_{tt} \end{bmatrix}. \tag{58}$$

În relația (57) vectorul P_{ap} indică influența încărcărilor exterioare. Se presupune în cele ce urmează o forță concentrată P orientată în sensul axei z cu punctul de aplicație p. În acest caz vectorul P_{ap} are forma

$$P_{ap} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Din (56), (57), (52) rezultă apoi

$$F_p = L_p V_p - P_p, \tag{60}$$

unde

$$\begin{aligned} L_p &= T_p^T L_{ap} T_p, \\ P_p &= T_p^T P_{ap}. \end{aligned} \tag{61}$$

Pentru cazul particular al stîlpilor normali pe planul plăcii, cu secțiune constantă și cu axele principale de inerție situate în planele n și t matricea de rigiditate (58) devine:

$$L_{ap} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 4\dfrac{EI_t}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 4\dfrac{EI_n}{h} \end{bmatrix}, \tag{62}$$

unde I_t și I_n reprezintă momentele de inerție ale secțiunii față de axele principale t și n, h înălțimea stîlpului, iar A aria secțiunii transversale.

În contextul general relația (60) devine

$$F'_p = L'_p V - P'_p. \tag{63}$$

6. FORMA FINALĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Cele trei tipuri de elemente finite introduc în nodurile sistemului grupele de forțe (36), (49) și (63) vectorii fiecărui element în parte în forma indicată de aceste relații fiind de rang N, iar matricele de dimensiune $N \times N$.

Sumînd aceste relații în raport cu indicii curenți e, r și p se obține vectorul general al forțelor de nod, care pentru echilibru trebuie să fie nul,

$$F = \sum_e F'_e + \sum_n F'_r + \sum_p F'_p = 0. \tag{64}$$

Relația (64) capătă forma :

$$RV - R_0 = 0, \tag{65}$$

unde

$$R = \sum_e (L'_e + K'_e) + \sum_r L'_r + \sum_p L'_p,$$
$$R_0 = \sum_e P'_e + \sum_p P'_r + \sum_r P'_p. \tag{66}$$

Sistemul general de $N = 3n$ ecuații cu N necunoscute permite determinarea elementelor componente ale vectorului V și prin aceasta toți vectorii V_e, V_r și V_p sînt determinați. Cu ajutorul transformărilor (39) și (52) se pot determina apoi și vectorii în coordonate locale V_{ar} și V_{ap}.

Cu ajutorul relației (18) se pot determina apoi momentele în toate punctele fiecărui element e. Similar, folosind relația (44) se stabilesc eforturile la noduri în grinzile de rezemare. În sfîrșit cu ajutorul relațiilor (57) se găsesc eforturile în elementele punctuale de rezemare (capetele stîlpilor).

7. OBSERVAȚII

1. Încărcările pe placă au fost considerate uniform distribuite pe fiecare element, variabilitatea lor pe placă rezultînd din mărimile diferite ale intensității forței distribuite p de la element la element.

Dacă există forțe normale concentrate sau cuple concentrate cu vectorul în planul plăcii se poate urma o cale indicată în principiu în lucrarea [4]. În mod simplificat însă forțele concentrate normale se pot transforma în încărcări distribuite pe elementul respectiv.

2. Dacă există forțe concentrate pe laturi ale rețelei, în care nu există grinzi aceste forțe pot fi luate în considerație în două noduri : fie considerînd punctul lor de aplicație ca aparținînd unui triunghi adiacent

chiar pe contur şi urmărind modul de calcul din [4] fie considerînd punctul lor de aplicaţie pe o grindă fictivă cu toate rigidităţile nule (L_{ap} fiind o matrice nulă).

3. Dacă există forţe concentrate în noduri ale reţelei în care nu există stîlpi acestea pot fi luate în consideraţie fie considerînd punctul lor de aplicaţie ca aparţinînd unui element triunghiular chiar în vîrf, fie considerînd în acel punct un stîlp fictiv cu toate rigidităţile nule (L_{ap} fiind o matrice nulă).

4. Din particularităţile algoritmului prezentat rezultă că parametri fundamentali din lista (2) au mărimi comune numai în noduri. De-a lungul laturilor există discontinuităţi cu atît mai mici cu cît numărul de noduri este mai mare.

Curburile (12) şi deci şi momentele în placă sînt discontinui chiar şi în noduri. Forma generală a diagramelor de eforturi se obţine deci printr-o interpolare între valorile învecinate.

Primită în redacţie la 12 martie 1975.

BIBLIOGRAFIE

1. O. C. ZINKIEWICZ, *Finite Element Method in structural and Continuum Mechanics*, Mc. Graw-Hill, Londra, 1967.
2. S. TIMOSHENKO, S. VOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shalles*, Mc. Graw-Hil, London, 1959.
3. N. ŢOPA, *Utilizarea metodei elementelor finite în calculul unor construcţii hidrotehnice*, Hidrotehnica, **15** iunie, 1970.
4. N. ŢOPA, *Contribuţii la utilizarea metodei elementelor finite în calculul plăcilor cu rezemare rigidă*, Bul. Ştiinţific al Inst. de Construcţii Bucureşti, **XV**, *4* (1972).

COMPORTAREA LA DEFORMARE PLASTICĂ A METALELOR ȘI ALIAJELOR ÎN CÎMP ULTRASONIC

de N. ATANASIU
Institutul politehnic București

În lucrare se descrie o teorie a trefilării (tragerii) printr-o matriță conică convergentă oscilată cu macrosunete paralel cu direcția de tragere.
Experimentările efectuate pe aliaje de aluminiu au arătat că macrosunetele reduc forța de tragere ca urmare a creșterii deformabilității metalului și reducerii frecării de contact la interfață sculă-metal.
Teoria descrisă și datele experimentale obținute la tragere pot fi extinse și la alte procedee de prelucrare a metalelor prin deformare plastică.

1. INTRODUCERE

Ultrasunetele de puteri mari numite uzual macrosunete aplicate sculei și/sau metalului în timpul deformării plastice determină reducerea forțelor de deformare, creșterea deformabilității metalelor și îmbunătățirea calității produselor [1].

Aceste influențe ale macrosunetelor s-au atribuit :

a) „efectului de volum", care determină modificarea caracteristicilor tensiune-deformație încît limita de curgere scade, tensiunea de rupere crește și gradul de ecruisare se reduce ;

b) „efectului de suprafață" care determină reducerea frecării de contact sculă-metal.

Complexitatea fenomenelor fizice și mecanice care apar la deformarea plastică a materialelor metalice în cîmp macrosonic a generat numeroase puncte de vedere, uneori contradictorii, cu privire la mecanismul de reducere a forței statice de deformare.

Pentru dezvoltarea cunoștințelor cu privire la efectul macrosunetelor în procesele de deformare plastică a metalelor și aliajelor s-au întreprins cercetări teoretice și experimentale privind trefilarea (tragerea) printr-o matriță conică convergentă oscilată paralel cu direcția de tragere.

2. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROCESULUI DE TRAGERE

Analiza procesului de trefilare (tragere) printr-o matriță conică oscilată cu macrosunete s-a făcut cu metode energetice folosind cîmpul de viteze cinematic admisibile (fig. 1) pentru stabilirea dependenței tensiunii

de tragere de gradul de reducere, de viteza procesului de tragere și de unghiul optim al conului matriței.

Admițînd că în timpul tragerii matrița se deformează neglijabil și că procesul suferă simetrie axială, iar în zona în care se produce deformarea

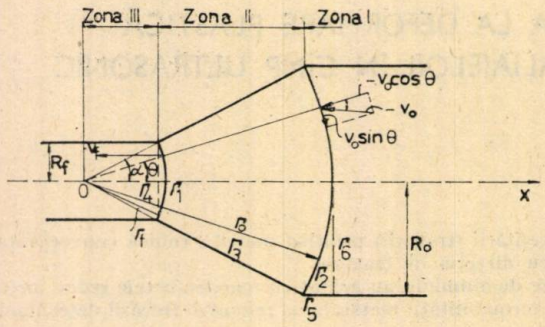


Fig. 1. — Cîmpul de viteze cinematic admisibile: R_0 — raza inițială a barei; R_f — raza produsului tras; v_0 — viteza de intrare a sîrmei în matriță; v_f — viteza de ieșire; α — semiunghiul conului matriței.

plastică a metalului, volumul rămîne constant, se obțin următoarele componente ale cîmpului vitezelor, exprimate în coordonate sferice r, θ și φ [2], [3]:

$$V = V_r = - V_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^2}; \quad V_\theta = V_\varphi = 0. \tag{1}$$

Potrivit expresiilor (1), particulele materiale se mișcă radial către punctul O. Suprafețele sferice $r = r_0$ și $r = r_f$ sînt suprafețe de discontinuitate pentru cîmpul de viteze, producînd o anumită disipare a energiei numită „lucru suplimentar".

Întrucît deformarea metalului are loc numai în zona II, rezultă că disiparea energiei datorită deformării plastice se va extinde asupra întregului volum al acestei zone. De asemenea, disiparea va mai interveni la frecarea de contact dintre metal și sculă de-a lungul suprafeței conice Γ_3 și la traversarea suprafețelor de discontinuitate Γ_1 și Γ_2.

Discontinuitatea tangențială a cîmpului de viteze se obține din expresiile:

$$\Gamma_1 : \Delta V = - V_0 \sin\theta; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \varphi, \tag{2}$$

$$\Gamma_2 : \Delta V = + V_f \sin\theta; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \varphi. \tag{3}$$

La trefilare (tragere) se folosesc matrițe cu unghiul relativ mic $\alpha = 7-9°$, la sîrme și bare și $\alpha = 11-14°$ în cazul țevilor, fapt ce determină ca o cantitate mică din tensiunea de tragere să fie disipată datorită lucrului suplimentar. Calculele efectuate arată că disiparea energiei pe suprafețele Γ_1 și Γ_2 duce la sporirea tensiunii de tragere cu 5 pînă la 7%. Aceste rezultate sînt în concordanță cu datele prezentate în lucrarea [4].

Pentru descrierea proprietăților mecanice ale metalelor prelucrate prin deformare plastică s-a folosit o ecuație constitutivă viscoplastică de forma [5], [6]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{VP} = \frac{1}{2\beta}\left\langle 1 - \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}\sqrt{J_2}}\right\rangle S_{ij}, \tag{4}$$

în care:

$\dot{\varepsilon}_{ij}^{VP}$ reprezintă componentele vitezelor de deformare;
β — coeficientul de viscozitate;
σ_c — limita de curgere a metalului;
J_2 — al doilea invariant al deviatorului tensiunii;
S_{ij} — componentele deviatorului tensiunii.

Experimentările efectuate la încercarea de tracțiune pe aluminiu, duraluminiu și cupru au permis descrierea influenței macrosunetelor asupra limitei de curgere a metalului prin intermediul unei constante de material dată de expresia [7], [8]. [9]:

$$A = \frac{\ln[\sigma_c(I) - \sigma_c]}{I_0 - I}, \tag{5}$$

în care

σ_c este limita de curgere a metalului fără macrosunete;
I — intensitatea macrosonică din focarul de deformare (W cm^{-2}).

Pentru a descrie efectul macrosunetelor asupra coeficientului de viscozitate s-au efectuat două rînduri de încercări identice cu deosebire că în primul caz $I = 0$, iar în celălalt caz $I \neq 0$ avînd însă o valoare bine determinată. Astfel pentru cele două experiențe se poate scrie:

$$\sigma = \sigma_c + 2\beta \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{6}$$

$$\sigma(I) = \sigma_c(I) + 2\beta(I) \frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{7}$$

Eliminînd pe $\frac{d\varepsilon}{dt}$ presupus constant și făcînd înlocuirile, rezultă

$$\frac{\beta(I)}{\beta} = \frac{\sigma(I) - \sigma_c(I)}{\sigma - \sigma_c}. \tag{8}$$

Datele experimentale arată că influența macrosunetelor scade cu creșterea vitezei procesului de deformare. Pentru a ține seama de acest efect relația (8) a fost completată obținîndu-se o expresie de forma

$$\frac{\beta(I)'}{\beta} = (1 + BI^C) \exp A(I_0 - I), \tag{9}$$

unde B și C sînt constante de material.

Pentru determinarea valorilor constantei de material A precum şi a constantelor B şi C funcţie de intensitatea macrosonică s-a elaborat un program de calculator în limbaj Fortran. În tabela 1 se prezintă cîteva din valorile constantelor A, B şi C rezultate din calcule în comparaţie cu cele obţinute experimental.

Valorile constantelor de material pentru $H(5) = 0{,}9393$; $H(10) = 0{,}8030$; $H(15) = 0{,}7045$; $H(20) = 0{,}6060$; $H = (I)/$

Tabela 1

Nr. crt.	$A(5)$*	$A(10)$	$A(15)$ **	$A(15)$	$A(20)$	B	C
1	0,0206	0,0310	0,0331	0,0329	0,0349	0,006	1,2
2	0,0250	0,0367	0,0394	0,0393	0,0416	0,008	1,3
3	0,0306	0,0443	0,0477	0,0478	0,0504	0,010	1,4
4	0,0376	0,0541	0,0582	0,0586	0,0615	0,012	1,5
5	0,0462	0,0662	0,0708	0,0717	0,0745	0,014	1,6

* Valoarea constantei de material determinată experimental pentru $I = 5$ W cm^{-2}.
** Valoarea constantei de material rezultată din calcule.

Evaluarea efectului global al frecării asupra procesului deformării plastice se poate obţine dacă se cunoaşte presiunea (p) pe matriţă în vederea estimării tensiunii de forfecare (τ). În acest scop se va folosi o lege de frecare de tip Coulomb:

$$\tau = \mu \sigma_{\theta\theta}, \tag{10}$$

în care

μ este coeficientul de frecare fără macrosunete;

$\sigma_{\theta\theta}$ — componenta tensiunii, normala pe suprafaţa matriţei care reprezintă tocmai presiunea (p) pe matriţă.

Folosind datele experimentale obţinute pe duraluminiu şi cupru s-a stabilit o formulă care exprimă efectul macrosunetelor asupra coeficientului de frecare:

$$\mu_u = \mu\left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{V_f}{V_s}\right) = \frac{2}{\pi}\mu \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{V_f}{V_s}\right)^2}, \tag{11}$$

unde

V_f este viteza de oscilaţie a undelor ultrasonice;

V_s — amplitudinea vitezei de oscilaţie.

În calculele efectuate termenul $(2/\pi) \arccos V_f/V_s$ s-a notat cu n avînd valori: $0 < n \leqslant 1$.

Pentru calculul coeficientului de frecare în cîmp macrosonic μ_u s-a elaborat un program de calculator. În tabela 2 sînt date ca exemplu valo-

rile acestui coeficient, obținute cu formula (11) pentru cinci valori ale vitezei normalizate.

Tabela 2

Nr. crt.	Viteza normalizată V_s/V_f	Valorile coeficientului de frecare μ fără macrosunete							
		0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080
1	1,10	0,007	0,014	0,021	0,029	0,036	0,043	0,050	0,058
2	1,20	0,006	0,012	0,018	0,025	0,031	0,037	0,043	0,050
3	1,50	0,005	0,009	0,013	0,018	0,023	0,027	0,032	0,037
4	1,80	0,003	0,007	0,011	0,014	0,018	0,022	0,026	0,029
5	2,00	0,003	0,006	0,010	0,013	0,016	0,020	0,023	0,026

Realizarea formei dorite a metalului se obține prin aplicarea unei tensiuni asupra volumului V al semifabricatului cuprins între planele $x = r_0$ și $x = r_f$ și mărginit lateral de cilindrul circular Γ_5 de raza R_0 și de conul circular Γ_2. Dacă se neglijează forțele de volum și accelerațiile, atunci pentru determinarea tensiunii de tragere se poate folosi așa-numita teoremă asupra energiei disipate, având forma

$$\int_S K|v|\,dS + \int_V \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{VP}\,dV = \int_{\partial V} \sigma_i\,v_i\,dS, \tag{12}$$

unde σ_i reprezintă componenta vectorului tensiune pe frontiera ∂V a volumului V.

Folosind expresiile (1), (4), (10) și (12) precum și relațiile (5), (9) și (11) obținem formula pentru calculul tensiunii de tragere în cîmp macrosonic, de formă

$$\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_c \exp A(I_0 - I)} + 2\,f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f} + \frac{2}{3}\,\frac{\beta}{\sigma_c}\,\frac{V_f}{R_f}\,\frac{1}{\sin\alpha}\,(1 + BI^c)\times$$

$$\times\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\left[1 - \cos\alpha + \frac{11}{3}(1 - \cos^3\alpha) + 2\,\mu(1 - n)\operatorname{ctg}\alpha\ln\frac{R_0}{R_f}\right]\times$$

$$\times\left[-\ln\frac{R_0}{R_f} - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_c \exp A(I_0 - I)} + 1\right], \tag{13}$$

unde

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[1 - \cos\alpha\sqrt{1 - 0{,}915\sin^2\alpha} + \right.$$

$$\left. + 0{,}87\ln\frac{1{,}955}{0{,}915\cos\alpha + 0{,}289\sin\alpha}\right].$$

Formula (13) permite calculul tensiunii de tragere în funcție de principalii parametri de lucru : reducerea secțiunii pe trecere, coeficientul de frecare, coeficientul de viscozitate, unghiul conului matriței, viteza de lucru și intensitatea ultrasonică, precum și de limita de curgere a metalului. Pentru obținerea soluției optime a procesului de tragere în cîmp macrosonic s-a elaborat un program de calculator în limbaj de Fortran.

Pentru determinarea teoretică a unghiului α_{opt}, expresia (13) a fost derivată în raport de α, ținînd seama că $f(\alpha) = -1$. Unghiul α_{opt} va fi soluția pozitivă a ecuației

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_c}\right) = 0. \tag{14}$$

Efectuînd calculele necesare rezultă

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{1}{6}\,\frac{\mu(1-n)\ln\dfrac{R_0}{R_f}\left[-\ln\dfrac{R_0}{R_f}\,\dfrac{\sigma_{xb}}{\sigma_c \exp A(I_0 - I)} + 1\right]}{\dfrac{V_f}{R_f}\,\dfrac{\beta}{\sigma_c}(1 + BI^C)\left[1 - \left(\dfrac{R_f}{R_0}\right)^3\right]}}. \tag{15}$$

Unghiul α_{opt} minimează tensiunea de tragere sau maximează gradul de reducere pe trecere.

3. DESCRIEREA INSTALAȚIEI EXPERIMENTALE

Cercetările aplicative și experimentale privind trefilarea (tragerea) cu macrosunete s-au efectuat pe instalația reprezentată în figura 2 ; în figura 3 se prezintă detalii constructive ale ansamblului traductor-concentrator-matriță.

Instalația cuprinde o parte mecanică constituită din : batiu *1*, cărucior *2*, bacul de prindere *3*, rolele de deviere *10* și *12* și tambur *12* ; mecanismul de acționare : motor electric *20*, grup hidraulic *21*, piston *9* ; sistemul acustic: convertor de frecvență *16*, transductor magnetostrictiv *9*, concentrator ultrasonic tip Fourier *6*, suport nodal *23* ; scule : matrițe *7* din carburi metalice și diamante sintetice ; produsul tragerii : sîrme sau bare *5*.

Frecvența de lucru s-a înregistrat cu un numărător electronic universal *17* și un osciloscop *18* prin intermediul amplificatorului *19* ; amplitudinea de oscilație a matriței și a sîrmei s-a măsurat cu traductorul inductiv *14*, conectat la un aparat de înregistrare *15*. Presiunea la piston s-a determinat cu manometrul *22*, iar forța de tragere cu traductorul inductiv *4* montat la capătul de prindere a sîrmei, semnalele obținute fiind înregistrate pe oscilograful *13*.

Ansamblul traductor-concentrator-matriță a oscilat în rezonanță la o frecvență de 18,6 KHz și în condițiile de „mers în gol" s-a obținut o amplitudine de oscilație a matriței de pînă la 20 μm.

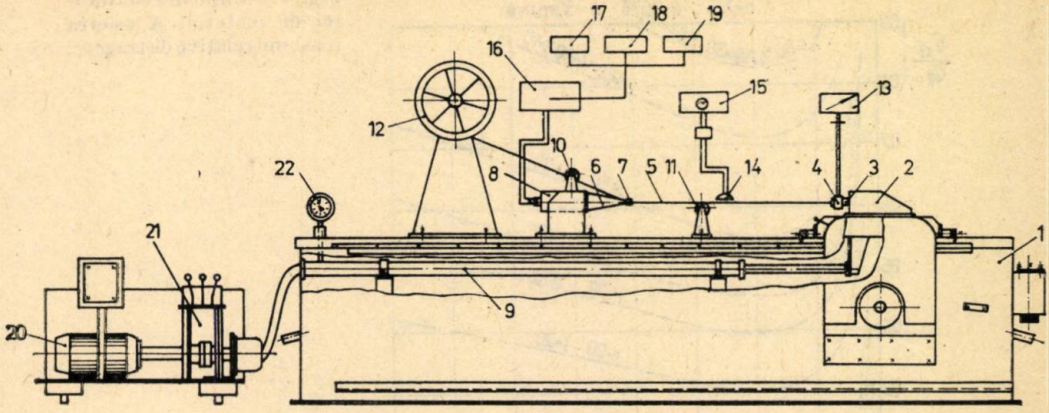


Fig. 2. — Instalația experimentală de trefilare (tragere) în cîmp macrosonic.

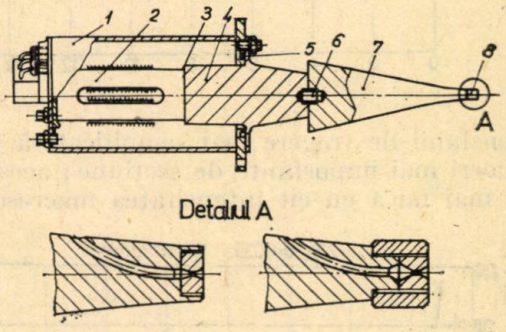


Fig. 3. — Ansamblul transductor-concentrator-matriță : 1. Carcasa pentru apa de răcire ; 2 — tole de nichel ; 3 — îmbinare lipită ; 4 — transformator din oțel inoxidabil ; 5 — garnitura pe etanșare ; 6 — șurub de îmbinare ; 7 — concentrator exponențial ; 8 — matriță.

Construcția instalației cum și metodologia de control stabilită au permis determinarea riguroasă a principalilor parametri tehnologici și acustici, și pe această bază evaluarea eficienței economice a trefilării (tragerii) cu macrosunete în comparație cu procedeul convențional.

4. REZULTATELE OBȚINUTE

În figura 4 este reprezentată diagrama tensiunea relativă de tragere funcție de semiunghiul conului matriței pentru $r = 15$ și 45%, $A = 0{,}033$; $n = 2/5$ și $V_f = 30$ m/min. Menținînd nemodificate valorile parametrilor de lucru dar sporind valoarea constantei A, ceea ce echivalează cu micșorarea limitei de curgere a metalului, rezultă o reducere însemnată a tensiunii de tragere. Aceasta înseamnă că soluția adoptată pentru a descrie influența macrosunetelor asupra deformabilității metalului prin intermediul constantei A corespunde cu datele experimentale.

În ceea ce privește efectul macrosunetelor asupra coeficientului de viscozitate, calculele efectuate cu valorile constantelor B și C din tabela 1 au arătat că : creșterea valorilor constantelor B și C determină o sporire

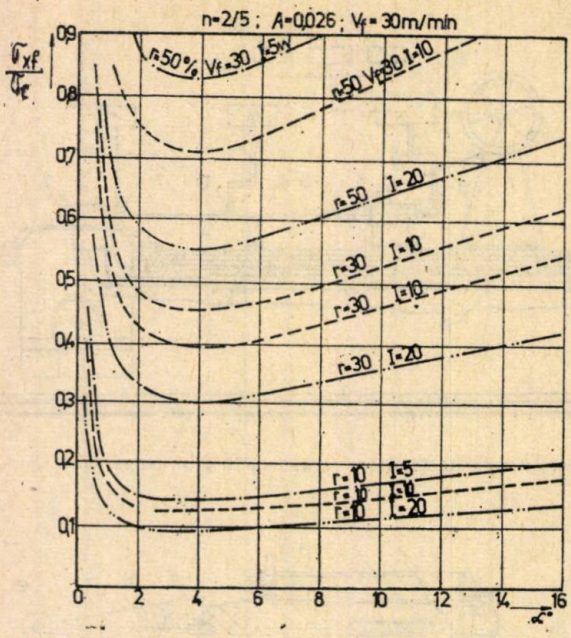


Fig. 4. — Influența constantei de material A asupra tensiunii relative de tragere.

a tensiunii de tragere mai semnificativă pentru unghiuri α mai mari și reduceri mai importante de secțiune; această creștere a tensiunii este cu atît mai mică cu cît intensitatea macrosonică din focarul de deformare este mai mare, fapt ce arată că macrosunetele influențează simțitor coeficientul de viscozitate.

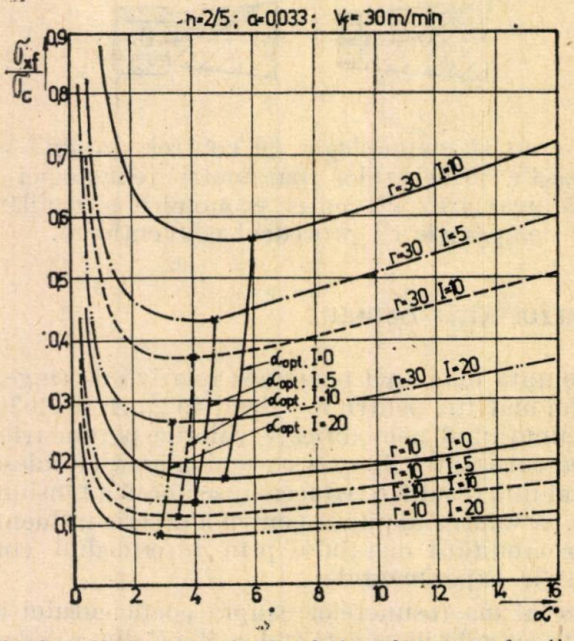


Fig. 5. — Variația tensiunii relative de tragere funcție de factorul n.

Pentru a reliefa influența macrosunetelor asupra frecării de contact s-au trasat grafice pentru diferite valori ale factorului n. În figura 5 se arată curbele pentru $n = 2/5$, $A = 0{,}033$ și $V_f = 30$ m/min. Creșterea factorului n, adică o scădere a coeficientului de frecare, determină o reducere substanțială a tensiunii de tragere mai ales la unghiuri α mici.

Coeficientul de frecare influențează unghiul α_{opt} al semiconului matriței; prin creșterea lui n, α_{opt} este deplasat spre valori mai mici (modificarea lui

α_{opt} funcție de n s-a marcat pe fig. 5). Valorile experimentale privind influența ultrasunetelor asupra unghiului α_{opt} al matriței sînt trecute în graficul din figura 6.

În figura 7 se arată rezultatele experimentale efectuate la o frecvență de 18,2 KHz și la diferite amplitudini de oscilație a matriței care scot în evidență faptul că efectul macrosunetelor asupra reducerii forței de tragere scade cu creșterea vitezei procesului. Rezultatele similare s-au obținut și din calcule. Astfel, în figura 8 s-au trasat curbele pentru redu-

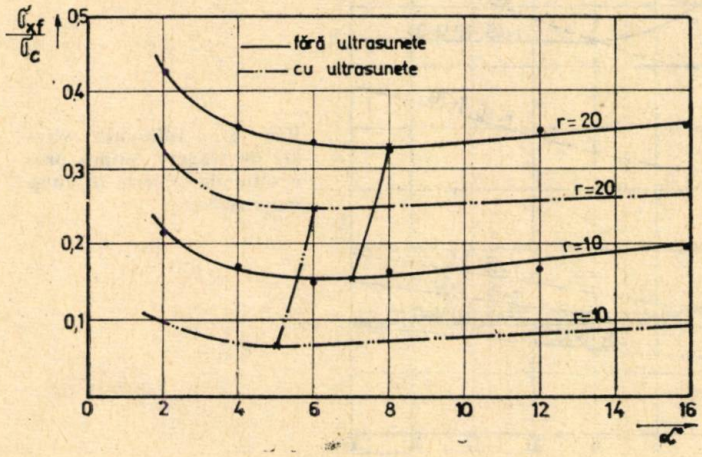


Fig. 6. — Influența macrosunetelor asupra unghiului α_{opt} al matriței $V_f = 10$ m/min.

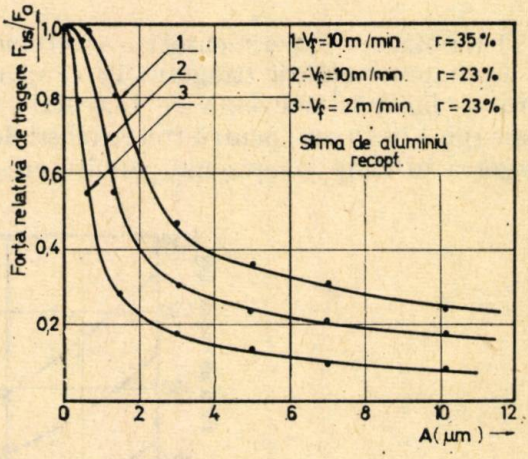


Fig. 7. — Forța relativă de tragere în funcție de viteza amplitudinii de oscilație a matriței.

cerile de secțiune $r = 15$ și 45%, intensitatea macrosunetelor $I = 5$; 10 și 20 W cm^{-2} și $V_f = 30$ m/min. Pentru comparație imediată s-a reprezentat și curba corespunzătoare lui $V_f = 0$.

Scăderea sau anularea completă a efectului macrosunetelor asupra reducerii forței de tragere se explică prin creșterea vitezei de deformație care poate atinge sau chiar depăși viteza amplitudinii de deformație acus-

tică. De aceea, pentru a menține un anumit grad de deformare cu creșterea vitezei de tragere, este necesară mărirea vitezei amplitudinii de oscilație a matriței.

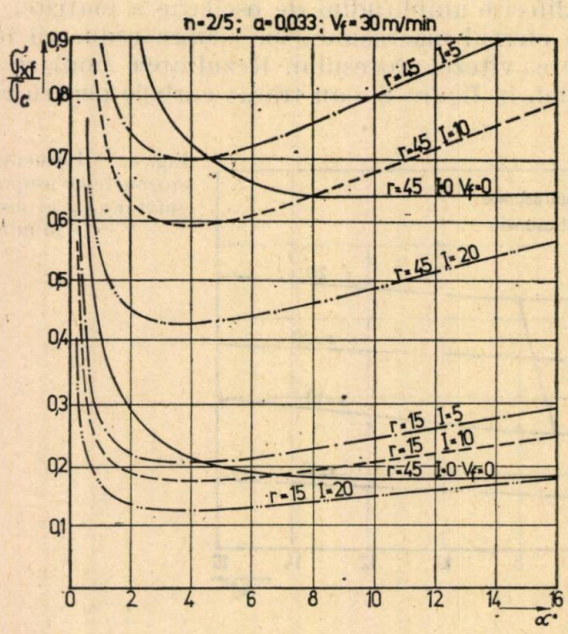


Fig. 8. — Influența vitezei de tragere asupra procesului de tragere în cîmp macrosonic.

Determinarea experimentală a efectului reducerii secțiunii materialului în timpul trefilării (tragerii) în cîmp macrosonic asupra forței de tragere s-a făcut la frecvența de 18,6 KHz și la diferite amplitudini de oscilație (pînă la 12 μm) pentru trei reduceri de secțiune (fig. 9). Se observă că tragerea în cîmp macrosonic permite creșterea însemnată a reducerii

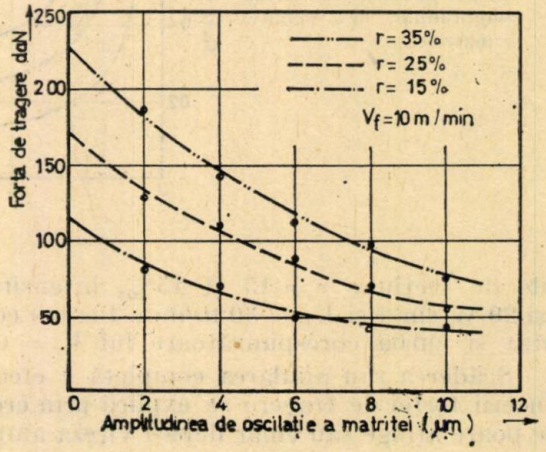


Fig. 9. — Dependența reducerii de secțiune de amplitudinea de oscilație a matriței.

ariei secțiunii transversale a barei pe trecere la o forță de tragere scăzută. Variația tensiunii relative de tragere în raport de reducerea secțiunii determinată cu formula (13) se arată în figura 10.

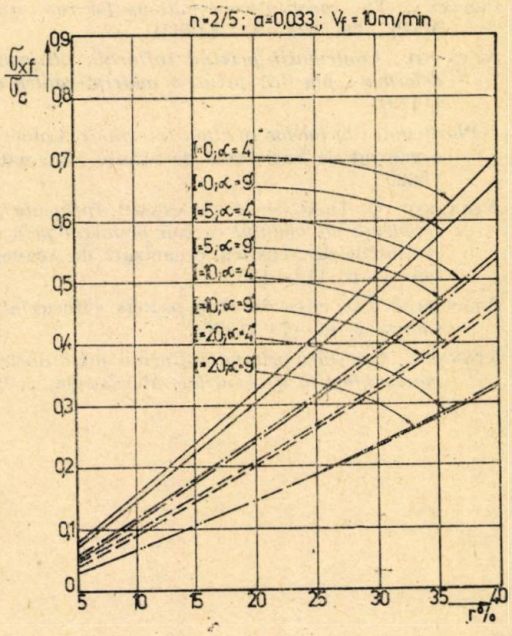


Fig. 10. — Variația tensiunii relative de tragere în raport de reducerea secțiunii.

CONCLUZII

Teoria descrisă a arătat și experimentările efectuate au confirmat valabilitatea folosirii modelului viscoplastic pentru analiza comportării metalelor și aliajelor la deformare plastică în cîmp macrosonic.

Pe baza teoriei descrise s-au elaborat tehnologii de trefilare (tragere) în cîmp macrosonic pentru aliaje de aluminiu greu deformabile. Rezultatele experimentale au arătat că tehnologiile de tragere în cîmp macrosonic sînt mai eficiente în comparație cu procedeele convenționale prin creșterea gradului de deformare pe trecere, prin reducerea numărului de treceri, prin creșterea vitezei procesului și prin îmbunătățirea calității produselor trase.

Primită la redacție la 18 decembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. B. Langenecker, V. O. Jones, *Macrosonic wire drawing and tube bending*, Proceedings of the 1st International Symposium on High Power Ultrasonics, Graz, IPC Science and Technology Press, 1970.
2. B. Avitzur, *Metal forming: processes and analysis*, New York, McGraw Hill Book Company, 1968.

3. N. Atanasiu, *Influența vitezei de prelucrare la deformarea plastică a metalelor printr-o matriță conică*, Constr. maș., *12*, 604—610 (1975).

4. T. Chandra, J. Jonas, *The extrusion force and the mean strain rate during the extrusion of strain rate sensitive materials*, Metallurgical Transactions, vol. I, August, 1970, p. 2079—2082.

5. P. Perzyna, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 321—332 (1963).

6. N. Atanasiu, *Contribuții privind influența ultrasunetelor asupra comportării metalelor la deformare plastică printr-o matriță conică convergentă*, Metalurgia *6*, 312—317 (1975),

7. — *Plasticitatea metalelor în cîmp ultrasonic*, Colocviul de mecanica solidelor deformabile, organizat de Societatea de Științe Matematice, Piatra-Neamț, 25—26 noiembrie, 1962.

8. N. Atanasiu, O. Drăgan, Z. Atanasiu, *Influența ultrasunetelor asupra proprietăților de rezistență ale oțelului carbon prelucrat prin deformare plastică*, A IV-a Conferință Națională de Acustică, organizată de Academia R. S. România, 29—31 mai 1973, vol. II p. 117—125.

9. N. Atanasiu, *The wire drawing process with axial ultrasonic vibration of the die*, Ultrasonics, *2*, 69—74 (1976).

10. N. Atanasiu, *Cercetări privind influența ultrasunetelor asupra frecării de contact la formarea plastică a metalelor*, Metalurgia, *2*, 96—101 (1976).

STUDIUL DEFORMAȚIILOR MECANICE ȘI TERMICE PRIN INTERFEROMETRIE HOLOGRAFICĂ

de I. CUCUREZEANU, P. SUCIU și R. CHIȘLEAG
Institutul politehnic din București

În lucrarea de față se demonstrează aplicabilitatea interferometriei holografice la studiul deformațiilor mecanice și termice ale unor dispozitive, determinîndu-se unghiuri de rotație de aproximativ 28″ și deformații cu săgeata de ~0,7 μ.

INTRODUCERE

În ultimul deceniu, după descoperirea dispozitivelor de tip LASER care constituie surse de lumină cu calități excepționale (monocromaticitate și coerență) pentru fenomenul de interferență, a fost reconsiderată metoda interferențială holografică, care fusese descoperită de D. Gabor încă în anul 1948 [1] și abandonată din lipsa radiațiilor cu calitățile menționate. Diferită principial de metoda fotografică obișnuită, care, înregistrînd numai amplitudini, furnizează imagini plane, metoda holografică conduce la înregistrarea undei obiect însăși, cu toate calitățile ei legate de fază și amplitudine, ceea ce face ca imaginile obținute să prezinte caracteristici tridimensionale. Această proprietate excepțională precum și precizia oferită, de ordinul fracțiunilor de micron, au făcut ca metoda holografică să se dezvolte vertiginos atît din punct de vedere teoretic cît mai ales, prin aplicațiile sale în diverse domenii de activitate [2, 3, 4].

Combinată cu metoda interferometriei clasice, holografia a condus la metoda interferometriei holografice, metodă care față de prima prezintă principalul avantaj că permite determinarea microdeformațiilor complexe ale suprafețelor neprelucrate optic ale obiectelor din mai multe perspective.

În cazul aplicării metodei la studiul suprafețelor obiectelor tridimensionale prelucrate optic, o singură interferogramă holografică este echivalentă cu mai multe interferograme clasice luate sub unghiuri diferite.

Procedeele experimentale mai des utilizate în studiul deformațiilor mecanice sînt : interferometria holografică cu simplă expunere, interferometria holografică cu dublă expunere și interferometria holografică mediată în timp [2] — [4].

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 4, 1977, P. 591 — 596

DISPOZITIVUL EXPERIMENTAL

În lucrarea de față ne-am propus să prezentăm pe două cazuri complexe, de interes pentru industria constructoare de mașini, studiul principalelor tipuri de modificări mecanice (rotații, translații, deformații) și termice (dilatări), care pot fi studiate prin interferometria holografică. În acest scop am ales drept obiecte un simering montat pe un dispozitiv de solicitare pentru prima categorie de probleme și o sudură în X montată pe un dispozitiv de încălzire.

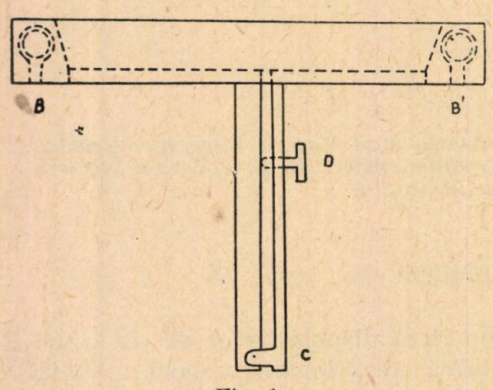


Fig. 1

În figura 1 este reprezentat schematic dispozitivul de solicitare a simeringului studiat.

După cum se vede, acest dispozitiv, prin șurubul D solicită simeringul în B și B'.

Simeringul a fost holografiat cu ajutorul instalației reprezentată în figura 2.

Lumina de la un laser cu He — Ne este divizată de către oglinda semitransparentă OST în două fascicule : primul, după ce a fost lărgit de către obiectivul Ob_1, ajunge la obiect, în timp ce al doilea servește ca fascicul de referință. Unda difuzată de obiect (unda obiect) interferă în planul H cu unda de referință, formînd ceea ce numim holograma obiectului. Acest tablou de interferență a fost înregistrat pe o placă fotografică cu mare putere de rezoluție.

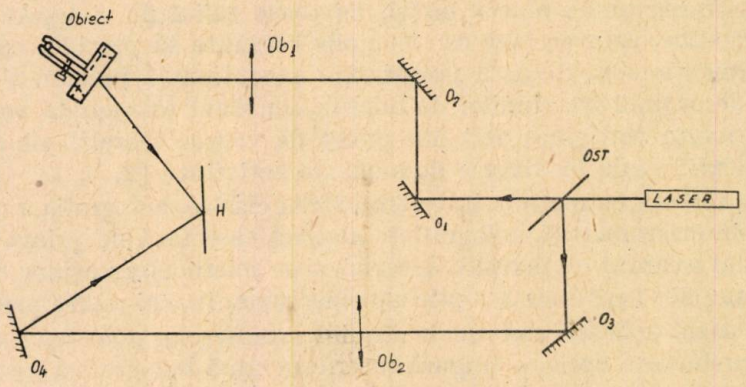


Fig. 2

În cazul de față, utilizînd metoda interferometriei holografice cu dublă expunere, au fost făcute două astfel de înregistrări pe aceeași placă fotografică, prima cu simeringul nesolicitat, iar a doua după ce simeringul a fost supus unei solicitări prin strîngerea șurubului D.

Reconstituirea a fost realizată cu instalația folosită la înregistrare, obturînd fasciculul obiect și așezînd placa fotografică, prelucrată, în poziția avută la înregistrare. Cele două unde obiect reconstituite respectiv

de cele două holograme înregistrate, propagîndu-se după aceeași direcție și fiind coerente între ele, interferă. Rezultatul interferenței este prezentat în figura 3.

Pentru studiul sudurii în X am folosit aceeași instalație holografică. Piesa, acoperită cu o vopsea difuzantă, împreună cu dispozitivul de încălzire a constituit obiectul în montajul din figura 2.

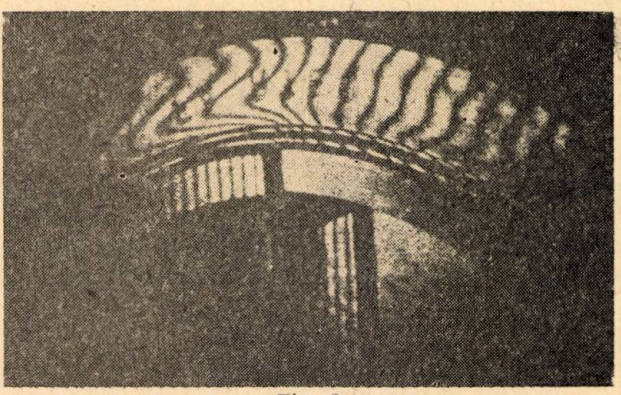


Fig. 3

INTERPRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Referindu-ne în primul rînd la studiul simeringului, din figura 3 se vede că sistemul de franje este proiectat pe imaginea reconstituită a dispozitivului experimental, datorită faptului că peste deformația produsă a fost suprapusă o rotație [5].

Ca în cele mai multe cazuri, și aici franjele de interferență au forme complicate, rezultînd din mișcări complexe sau din mișcări și deformații simultane ale obiectului.

Pentru interpretarea interferogramei din cazul de față împărțim obiectul în zone cu franje similare. Primul grup important este grupul de franje paralele, localizat pe unul dintre semidiscurile de solicitare. Ele se datoresc rotației piesei respective în jurul unei axe, paralele cu diametrul discului de solicitare [5]. Din interfranja măsurată pe figură rezultă un unghi de rotație de 28″.

Existența franjelor paralele pe un singur semidisc dovedește faptul că numai acesta a suferit rotație.

Un alt grup important îl constituie franjele localizate pe simering. Ele se datoresc atît rotației simeringului (imprimată de semidiscul de solicitare), cît și deformațiilor acestuia. Franjele datorate modificărilor simeringului modulează pe cele datorate rotației rezultînd în acest fel franje cu forme complicate.

În partea de sus a simeringului observăm că interfranja este practic constantă de-a lungul simeringului, ceea ce dovedește prezența fenomenului de rotație pură, indicat de noi în figura 4 prin linii întrerupte.

Coborînd spre inelul interior al simeringului, interfranja variază. Aceste variații traduc deformații neuniforme ale piesei.

Interferograma permite calculul stării de deformație în orice punct A al piesei, în raport cu starea unui punct R considerată cunoscută (figura 4). În cazul de față este convenabil să considerăm punctul R situat pe franja de ordin zero, aceasta fiind considerată franja cu cea mai mică deformare.

Deosebirea dintre stările simeringului (deformare+rotație) corespunzătoare punctelor A și R va fi determinată de diferența de drum dintre fasciculele care formează franja A :

$$\Delta_A = N_A \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

unde N_A este ordinul de interferență al franjei ce trece prin A. Această diferență de drum Δ_A este aproximativ egală cu săgeata deplasării în punctul A, care la rîndul ei este dată de suma dintre săgețile Δ_1, determinată de deformația propriu-zisă și Δ_2, determinată de rotație :

$$\Delta_A = \Delta_1 + \Delta_2. \tag{2}$$

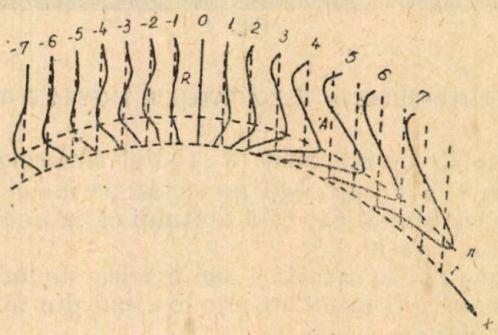


Fig. 4

Mărimea Δ_2 poate fi exprimată prin relația

$$\Delta_2 = N'_A \frac{\lambda}{2}, \tag{3}$$

unde N'_A reprezintă ordinul de interferență al franjei de rotație (reprezentată punctat în figura 4) ce trece prin punctul A.

Combinarea relațiilor (1), (2) și (3) conduce la relația

$$\delta h_A = \Delta_1 = (N_A - N'_A) \frac{\lambda}{2}, \tag{4}$$

care exprimă mărimea $\Delta_1 = \delta h_A$ a săgeții de deformație (exclusiv rotația) în punctul A, în raport cu punctul R considerat drept origine.

În figura 5 este reprezentată mărimea δh pentru diferitele puncte așezate pe două curbe paralele cu marginile simeringului, abscisa x fiind măsurată pe fiecare curbă, începînd de la franja de ordin zero.

Curba *I*, corespunzătoare marginii inferioare a simeringului, indică valori δh pozitive pînă la $\sim 0{,}7\ \mu$, în dreapta franjei de ordinul zero și negative pînă la $\sim 0{,}5\ \mu$, în stînga acesteia, în timp ce curba *II*, corespunzătoare unui șir de puncte situat la distanța de 4 mm față de marginea de jos a simeringului, arată valori negative în dreapta și pozitive în stînga franjei zero.

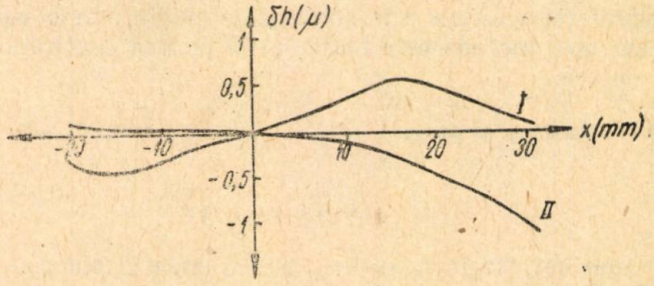


Fig. 5

Valorile δh negative atestă faptul că în punctele respective deformațiile sînt de sens opus rotației Δ_2, iar valorile pozitive arată că aceste deformații sînt de același sens cu rotația.

În figura 6 este prezentată interferograma holografică cu dublă expunere a unei suduri în X, la înregistrare fiind iluminată fața piesei paralelă cu cusătura, temperatura piesei diferind numai cu 5 grade între cele două expuneri.

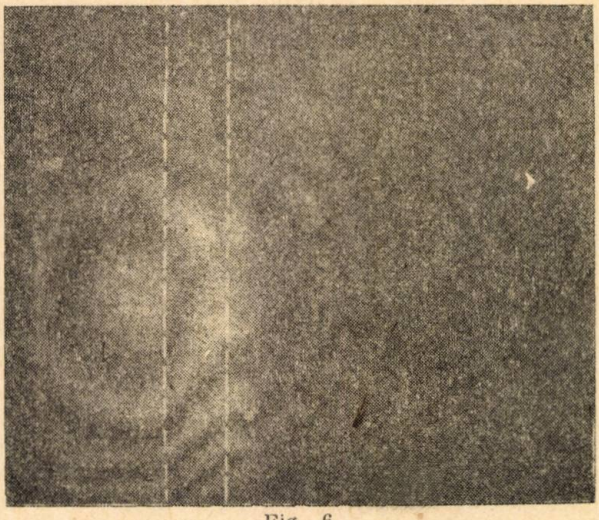


Fig. 6

Se observă două sisteme de franje circulare, centrate diferit, corespunzătoare celor două table sudate. Zona de tranziție cuprinsă între cele două linii întrerupte corespunde cusăturii. Din figură reiese de asemenea că cusătura a fost de calitate mai bună în partea de jos (franjele sînt mai uniforme).

CONCLUZII

Din rezultatele prezentate se desprinde faptul că metoda interferometriei holografice este deosebit de valoroasă pentru studiul deformaţiilor pieselor, oferind informaţii despre modificările suprafeţelor obiectelor tridimensionale cu o precizie de ordinul zecimii de micron, indiferent de materialul din care este confecţionat obiectul, de modul lui de prelucrare, de forma suprafeţei acestuia şi în condiţii de mediu foarte variate.

De asemenea, metoda este foarte utilă pentru controlul nedistructiv al pieselor sudate.

Primită la redacţie la 10 februarie 1975.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Gabor, Nature, **161**, 777 (1948) Proc. Roy. Soc., A, **197**, 454 (1949) Proc. Phys. Soc., B. **64**, 449 (1951).
2. H. M. Smith, *Principles of Holography*, N. Y., J. Wiley, 1969.
3. I. Cucurezeanu, P. Suciu, *Curs de holografie*, Litografia Institutului Politehnic din Bucureşti, 1974.
4. V. Vlad, *Introducere în holografie*, Editura Academiei, 1973.
5. F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois, *Laser Handbook*, vol. 2, 1487, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.
6. I. Cucurezeanu, R. Chişleag, P. Suciu, St. cerc. mec. apl., **36** (1977).

SIMULAREA SISTEMELOR FIZICE CU AJUTORUL CALCULATOARELOR CU STRUCTURĂ HIBRIDĂ

de I. DUMITRESCU

Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Lucrarea constituie o sinteză a posibilităţilor de investigare a proceselor fizice (în special a celor legate de teoria cîmpului) cu ajutorul tehnicilor moderne de calcul hibrid.
Sînt prezentate sistemele de calcul hibrid şi modul cum acestea pot fi utilizate la studiul proceselor descrise de modele formate din sisteme de ecuaţii diferenţiale sau de ecuaţii cu derivate parţiale, aşa cum este cazul proceselor din mecanica fluidelor sau a celor din mecanismele cu parametri distribuiţi.
Este tratat şi un exemplu de simulare prin tehnici hibride a proceselor de scurgere din zăcămintele petroliere.

1. INTRODUCERE

Modelarea şi simularea, mai ales sub forma similitudinii, sînt cunoscute încă de multă vreme; la început au fost utilizate în special în cercetarea ştiinţifică, mai cu seamă în acele domenii ale fizicii în care interveneau probleme de cîmp [20].

În ultimii douăzeci de ani, însă, modelarea şi simularea au dobîndit o extindere remarcabilă, fiind în prezent aplicate în toate ramurile ştiinţei, nu numai în activitatea de cercetare, ci şi în proiectare sau chiar în conducerea operativă a producţiei. Simularea, încurajată de rezultatele spectaculoase obţinute, s-a dezvoltat ea însăşi prin aplicarea unor noi metode şi perfecţionarea mijloacelor de simulare. Astfel, în ultimii cinci ani s-a extins simularea prin utilizarea sistemelor hibride de calcul. Această nouă tehnică a permis rezolvarea unor probleme delicate din domeniul mecanicii fluidelor (în special al mecanicii subterane) şi a făcut posibilă proiectarea optimă a unor sisteme mecanice cu parametri distribuiţi (cum ar fi transmisiile elastice din mecanismele complicate, sistemele de suspensii şi multe alte aplicaţii ale teoriei mecanismelor). Un domeniu în care simularea hibridă a condus la soluţii de mare eficienţă este acela al prevederii comportării zăcămintelor de hidrocarburi fluide şi la proiectarea exploatării acestor zăcăminte.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR.4, 1977, P. 597–615

1.1. INTRODUCERE ÎN TEORIA SIMULĂRII

După cum se știe [3], [5], [9], [15], [19], *simularea* constă în utilizarea analogiilor *fizice* (prin dispozitive numite *simulatoare*) sau *de calcul* (prin reprezentări matematice numite *modele de simulare*) ca mijloace de explorare a comportării unui *sistem obiect* (numit și *original*), pe baza faptului că între elementele simulatorului (sau a modelului de simulare) și ale sistemului obiect (originalul) poate fi stabilită (există) o corespondență biunivocă a cărei esență este izomorfismul. Există deci o *simulare pe sistem* (simulator) și o *simulare pe model*)*.

Pe baza teoremelor de izomorfism (definite în teoria grupurilor din topologie), rezultă că asociind unul din două grupuri izomorfe sistemului obiect, celălalt se asociază simulatorului [19]. Astfel, fie *Cs* „categoria sistemelor" care constă:

(i) dintr-o clasă de obiecte *Ob Cs* denumită clasa sistemelor;

(ii) pentru orice pereche ordonată de obiecte (I, E) este dată o mulțime $Cs(I, E)$ ale cărei elemente se notează cu $f, g, \ldots$ și care se numesc morfismele cu intrarea I și ieșirea E. Pentru un $f \in Cs(I, E)$ se scrie $f : I \to E$, care se citește f este un morfism de intrare (sursă) I și ieșire (adresă) E;

(iii) pentru două perechi oarecare distincte (I, E) și (I', E') se admite că $Cs(I, E) \cap Cs(I', E') = \emptyset$;

(iu) pentru orice tripletă ordonată de obiecte I, E, X ale lui *Ob Cs* este definită o aplicație de mulțimi:

$$\theta(I, E, X) : Cs\,(I, E) \times Cs\,(E, X) \to Cs(I, X),$$

numită compunerea morfismelor, care se mai poate scrie și în forma

$$\theta(I, E, X) \circ (f, g) = g \circ f \text{ pentru } \forall g \in Cs(E, X) \text{ și } \forall f \in Cs(I, E);$$

(u) compunerea morfismelor este asociativă, adică $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(ui) pentru $\forall I \in Ob\ Cs$ mulțimea $Cs(I, I)$ conține cel puțin un element notat 1_I și denumit morfismul identic al lui I.

Atunci, noțiunea generică de *sistem* se definește printr-o categorie care constă din două obiecte I, E și din mulțimea morfismelor $Cs(I, E)$. Cazuri particulare de sisteme sînt:

— *sistemul segment* care este o categorie formată din două obiecte I, E și trei morfisme 1_I, 1_E și $f : I \to E$;

— *sistemul cuplu* care este format din două obiecte I, E și patru morfisme 1_I, 1_E și $f, g : I \rightleftarrows E$;

— sistemul reprezentat printr-o categorie ale cărei obiecte sînt tripletele oronate (I, f, E), adică categoria morfismelor lui *Cs* (notată cu *MCs*). Dacă $(I, f, E), (I', f', E') \in Ob\ MCs$, atunci MCs $[(I, f, E), (I', f' E')]$ este mulțimea tuturor perechilor de morfisme (α, β) și anume $\alpha : I \to I'$, $\beta : E \to E'$ astfel încît $f' \circ \alpha = \beta \circ f$, pentru care se obține diagrama comutativă din figura 1 *a*.

---

* În cadrul acestui articol, prin *model* vom înțelege numai reprezentarea matematică a relațiilor dintr-un sistem (adică ceea ce unii numesc *model matematic*).

Simularea este, în esență, o activitate de investigare strict experimentală. În numeroase cazuri — printre care unul tipic este acela al proceselor de filtrație din zăcămintele petrolifere (pe care în final îl vom prezenta ca exemplu de aplicație a simulării hibride) — studiul experimental al comportării sistemului obiect, direct pe original, nu este posibil. În legătură cu aceasta, să presupunem că sistemul S format din obiectele (I, f, E) nu admite observări experimentale, în timp ce un alt sistem S' format din obiectele (I', f', E') permite un studiu experimental direct. În acest caz, *simularea pe sistem* (simulator) poate fi concepută ca studiul experimental al morfismului f, prin intermediul diagramei comutative din figura 1 *a*, adică studiul compunerii morfismelor în categoria morfismelor lui *Cs*.

Dacă β este un izomorfism inversibil (adică simultan secționabil și retractibil), atunci $f = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha$. Dacă numai α este inversibil, atunci $f' = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$. Dacă α și β sînt simultan izomorfisme (inversibile), atunci asocierea $f \sim \to \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ este o bijecție canonică de la mulțimea $Cs(I', E')$. În acest fel, diagrama comutativă din figura 1 *a* poate fi considerată ca o reprezentare grafică (model geometric) al *simulării pe sistem*.

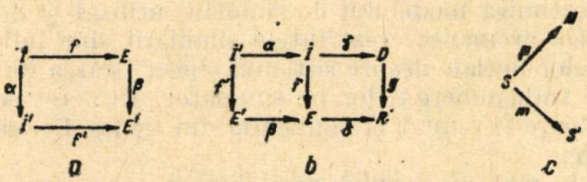


Fig. 1

În ceea ce *privește simularea pe model*, să notăm cu $[S]$ clasa sistemelor izomorfe și cu S_1 un „reprezentant" al acestei clase. Clasa tuturor sistemelor lui *Cs* izomorfe cu S se numește tipul lui S.

Relația dintre două sisteme izomorfe este o relație de echivalență deoarece dacă $f : S \to S'$ este un izomorfism și $f' : S' \to S''$ este un izomorfism, atunci și $f' \circ f : S' \to S''$ este, de asemenea, un izomorfism.

Pentru sisteme-segment izomorfe, diagrama din figura 1 *a* poate fi interpretată în modul următor : S și S' sînt și ele categorii, deci a considera că S și S' sînt izomorfe înseamnă a admite un izomorfism functorial $F : S \to S'$, ceea ce revine la faptul că F este un functor bijectiv și deplin fidel [19]. Aceasta conduce, mai departe, la concluzia că α și β sînt izomorfisme.

Pe baza acestor considerente, se poate afirma că *modelul* M al unui reprezentant S_1 al clasei sistemelor izomorfe $[S]$ este și un model al tipului lui S. Într-adevăr, dacă $\mu : S_1 \to M$, atunci pentru $g : S_1 \to S_2$ rezultă $\mu \circ g^{-1} : S_2 \to M$. În particular, dacă M este de forma $g : D \to R$, unde D reprezintă datele inițiale și R rezultatele finale, se poate construi diagrama din figura 1 *b* din care rezultă

$$\gamma \circ \alpha^{-1} : I' \to D \text{ și } \delta \circ \beta^{-1} : E' \to R.$$

Deci *simularea pe model* are ca obiect studiul experimental al morfismelor tipului unei clase de sisteme.

Diagrama din figura 1 *b* poate fi privită și ca un model grafic al simulării sistemelor în cazul mai general cînd S și S' sînt tipuri diferite, iar M este model al tipului S.

În concluzie :

— dacă δ este inversibil, atunci simularea pe model constă în studiul morfismului $f = \delta^{-1} \circ g \circ \gamma$;

— dacă β este inversibil, atunci simularea pe sistem (simulator) constă în studiul morfismului $f = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha$.

În ambele cazuri se evită experimentarea pe sistemul obiect de simulat (original). Acesta este unul din marile avantaje ale simulării, deoarece în multe cazuri originalul nu poate fi supus (nu este posibil sau nu este permis) unor procedee de studiere de tipul „taie și încearcă", sau încercările efectuate direct pe sistemul obiect durează extrem de mult (în acest caz, dacă este vorba de un proces de conducere, deciziile nu mai sînt aplicabile în „timp real") ; alteori (în cazul unor activități de concepție-proiectare), originalul nici nu există în mod fizic (!) Exemple tipice în acest sens pot fi luate din domeniul mecanicii subterane sau al mecanismelor ce trebuie concepute (proiectate) pentru un anumit scop.

De aceea, în aplicațiile practice, calitatea unei simulări este determinată de perfecțiunea modelului de simulare utilizat și de posibilitățile simulatorului. De asemenea, rezultatele simulării sînt influențate și de exactitatea datelor inițiale despre sistemul obiect (starea inițială), precum și de modul de transpunere a lor pe simulator. În acest sens, diagrama din figura 1 *b* poate fi redusă la counghiul din figura 1 *c*, care reprezintă și el o categorie.

Din cele de mai sus rezultă posibilitatea construirii unei categorii a modelelor cu $M \in Ob\ C_M$, precum și existența unui functor $F : Cs \to C_M$. Prin alegerea unui reprezentant S_A al fiecărui tip $[S]$ se obține un schelet Cs' al categoriei Cs. Ca urmare, rezultă și un functor deplin fidel $F' : Cs' \to C_M$ în virtutea faptului că pentru $\forall S_A,\ S_B \in Ob\ Cs'$, aplicația $F'(S_A, S_B)$ este o bijecție. Aspectul sub care ar putea fi studiate categoriile Cs și C_M, din punctul de vedere al simulării, este următorul : morfismul $\mu : S \to M$ se studiază pornind de la un model inițial M_1, știindu-se că $\mu_1 : S \to M_1$ este retractibil. Se construiește șirul $M_1\ M_2,\ M_3, \ldots$ și se admite că simularea este un proces convergent dacă limita către care tinde acest șir este un izomorfism $\mu_i : S \to M_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Mai general, convergența simulării poate fi exprimată prin counghiul din figura 1 *c*, în care morfismele m și μ devin la limită izomorfisme.

În încheierea acestei scurte introduceri, prezentăm în figura 2 o schemă generală, de principiu, a procesului de simulare, din care rezultă că sistemul obiect (de studiat) se înlocuiește, pe baza unui model, printr-un simulator asupra căruia se efectuează încercări de diferite tipuri, dintre care în cadrul acestui articol ne vom referi la modernul procedeu al *simulării hibride*.

1.2. MIJLOACE DE SIMULARE

Mijloacele tehnice (echipamentele) cele mai utilizate în prezent în procesul de simulare sînt : simulatoarele analogice pasive, calculatoarele analogice, calculatoarele numerice automate și sistemele hibride de calcul.

Simulatoarele analogice pasive [5], mult utilizate în urmă cu 30 de ani, mai sînt eficiente și astăzi în studiul unor procese de filtrație din mecanica fluidelor, fiind uneori folosite chiar în structura unor calculatoare hibride. Majoritatea acestor simulatoare sînt de natură electrică, fiind formate în principal dintr-un mediu conductor, care se realizează fie în formă continuă (băi electrolitice, hîrtie electroconductoare etc.), fie — cel mai adesea — dintr-o rețea R-L-C cu parametri localizați [6]. În acest din urmă caz, este vorba de un simulator discontinuu la care repartiția tensiunilor electrice la noduri (sau a curenților electrici în laturi) este descrisă de un model format dintr-un sistem de ecuații algebrice liniare. Acest sistem de ecuații, dacă originalul constă dintr-un mediu continuu (de exemplu : roca colectoare a unui zăcămînt petrolifer), reprezintă un

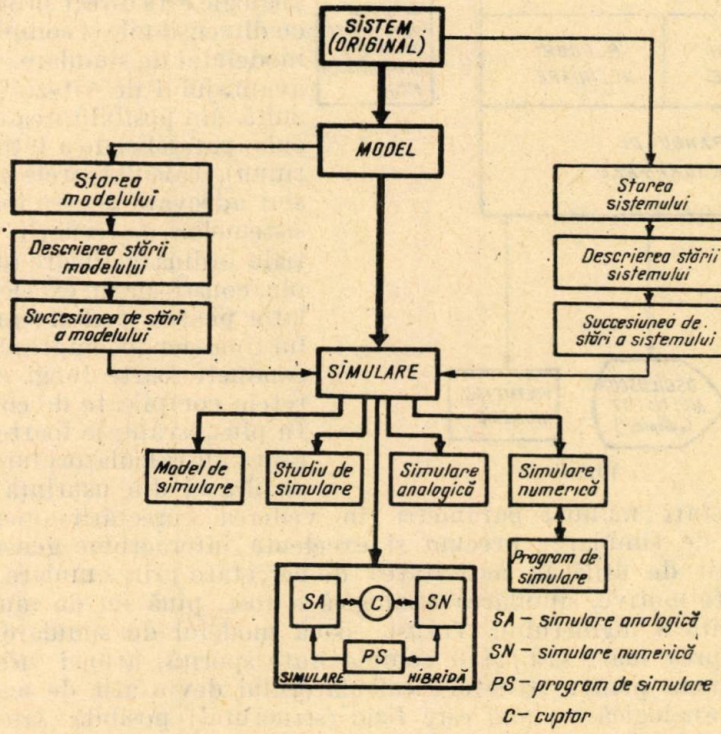


Fig. 2

model discret de simulare care aproximează, în anumite puncte, ecuațiile cu derivate parțiale ce descriu procesele care au loc în original (în cazul exemplului considerat, procesele de filtrație ale hidrocarburilor fluide).

Calculatoarele analogice, a căror configurație standard este indicată în figura 3, reprezintă variabilele unei probleme date (a unui model de simulare) prin tensiunile electrice de la bornele elementelor structurale ale calculatorului (care sînt elemente de calcul, realizate sub forma unor amplificatoare operaționale și a unor potențiometre divizoare de tensiune). Soluțiile sînt generate prin interconectarea acestor elemente de calcul

diverse într-o configurație care stabilește relații matematice analoge cu cele ale problemei, adică realizează formal modelul de simulare (izomorfism). Elementele tip de calcul, din structura activă a calculatorului analogic, sînt capabile să realizeze operații ca : sume algebrice, multiplicarea cu o constantă, multiplicarea și împărțirea variabilelor, integrarea în raport cu timpul, generarea unor funcții neliniare tipice, precum și memorarea, ca și efectuarea unor operații logice. Deoarece calculatorul analogic este o mașină paralel, în care toate variabilele sînt calculate (determinate) simultan și continuu, timpul de calcul nu depinde explicit de dimensiunile și complexitatea problemei. Dar, din același motiv, numărul elementelor de calcul ce trebuie incluse în schema calculatorului analogic este direct proporțional cu dimensiunile și complexitatea modelului de simulare. Datorită avantajului de viteză (care rezultă din posibilitatea de a calcula paralel și de a integra continuu), calculatoarele analogice sînt adecvate pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale ordinare liniare (de exemplu, constituie un excelent simulator pentru studiul transportului fluidelor incompresibile prin conducte foarte lungi sau prin rețele complicate de conducte). În plus, avantaje foarte importante ale calculatorului analogic rezultă și din ușurința cu care pot fi ajustați manual parametri (în vederea corectării operative a modelului de simulare), precum și excelenta interacțiune generală om-mașină, atît de utilă în activitatea de cercetare prin simulare. Pentru toate aceste motive, simularea analogică a fost, pînă nu de mult, tehnica favorită a inginerului. Totuși, dacă modelul de simulare are dimensiuni prea mari sau / și o complexitate sporită, atunci necesitățile de echipament pentru structura calculatorului devin atît de mari încît simularea analogică nu mai este fizic (structural) posibilă sau ajunge prohibită.

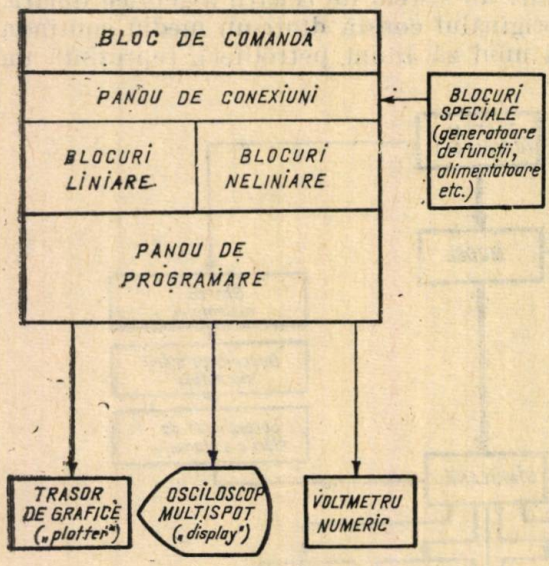


Fig. 3

Calculatorul numeric (este vorba, bineînțeles, de cel automat —cu programe memorate — cu o configurație standard de felul celei din figura 4) reprezintă variabilele unei probleme date prin numere discrete, într-un anumit cod. Soluțiile sînt generate prin formularea problemei ca o secvență de operații aritmetice și logice (program) și prin prelucrarea datelor discrete în conformitate cu acest program. Calculatoarele numerice sînt capabile să realizeze toate operațiile aritmetice (adunare, scădere, înmulțire și împărțire), unele operații de relație („mai mic decît", „mai mare decît", „egal cu" precum și combinații ale acestora), ca și operațiile logice elementare (NU, ȘI, SAU) și operații de memorare (cu introducere ș

extragere de date); de aceea toți algoritmii programelor, pentru orice problemă, trebuie alcătuiți numai din combinații finite ale operațiilor înșiruite mai sus. Din această cauză, au fost elaborate o mare varietate de metode și proceduri numerice prin folosirea cărora este posibil să se rezolve orice fel de problemă matematică, chiar dacă modelul ei include și elemente de analiză infinitezimală (integrări și diferențieri de funcții); pentru aceasta se folosesc metodele de calcul aproximativ prin diferențe finite. Datorită acestor proceduri, ca și caracterului discret al calculatoarelor numerice, modelele de simulare în acest caz sînt modele discrete ce realizează o aproximare a modelului original (izomorfismul modelelor).

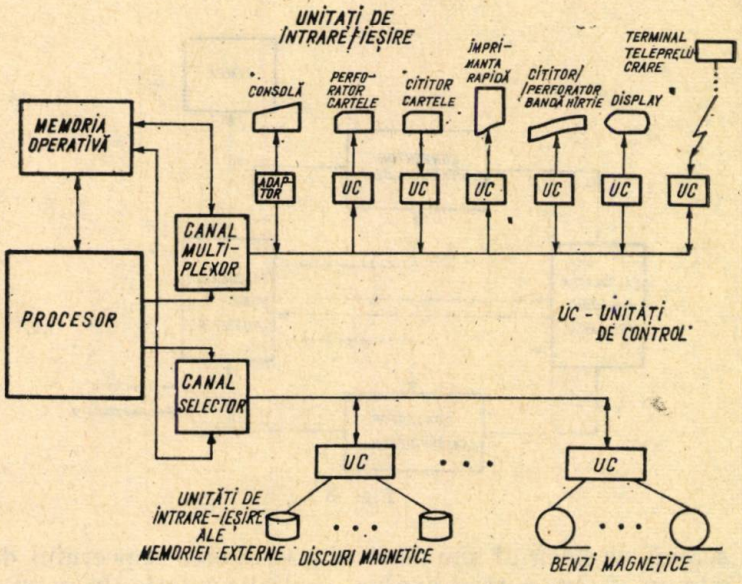


Fig. 4

Mai mult, existența în configurația calculatoarelor numerice a unor unități de memorare cu o foarte mare capacitate permite folosirea unor proceduri specifice pentru tabelarea funcțiilor de mai multe variabile, sub forma unor masive mutidimensionale de date, ce pot fi folosite la generarea foarte precisă a funcțiilor neliniare (de exemplu, în vederea simulării — în mecanica subterană — a unor medii poroase neuniforme, adică neomogene și anizotrope, prin intermediul tensorului permeabilitate [18], care este un tensor de ordinul al doilea, deci cu cîte nouă componente pentru fiecare punct al mediului considerat). Deoarece calculatorul numeric este în esență o mașină serie, necesitățile de echipament sînt — în limite destul de largi — independente de dimensiunile și complexitatea problemei. Dar, din același motiv (al calculului de tip serie), durata calculelor este direct proporțională cu „anvergura" problemei. Proprietățile cele mai importante ale calculatoarelor numerice automate sînt: precizia, versabilitatea, flexibilitatea, independența de „drift", posibilitățile de memorare foarte largi și ușurința în realizarea deciziilor logice. Principial, calculatorul

numeric nu are limitări ale posibilităților de bază pentru rezolvarea unei probleme, dar în practică apar destule restricții (în special determinate de raportul dintre dimensiunile problemei și volumul memoriei operative de care dispune un calculator existent, sau de timpul-calculator care poate fi prea mare în cazul unor probleme complexe rezolvate prin procedee iterative cînd apar viteze mici de convergență a iterațiilor).

O *interconectare hibridă* (după schema de principiu din figura 5) creează condițiile favorabile pentru combinarea avantajoasă a proprietăților complementare ale calculatoarelor analogice și ale celor numerice. Avantajele acestui sistem hibrid apar evidente în două situații specifice [11] și anume :

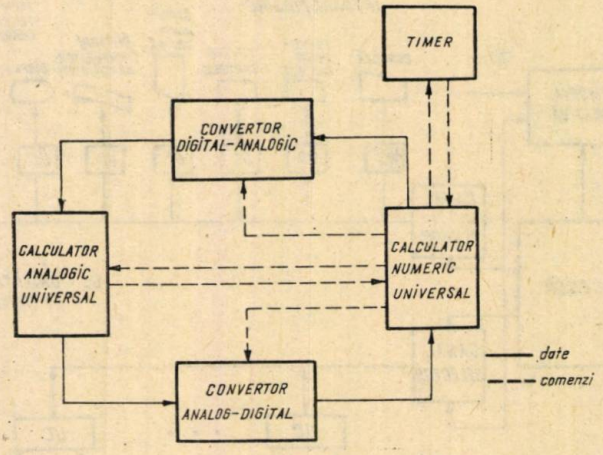


Fig. 5

— scopul de bază al simulării este studierea aspectului de „comunicare" într-un sistem parțial analog, parțial numeric (în acest caz sistemul hibrid permite simularea exactă, în „timp real") ;

— o problemă poate fi tratată, total sau parțial, prin rezolvarea iterativă a unui subset de ecuații diferențiale (multe probleme sau sînt în mod natural de acest tip — așa ca cele din hidrogazodinamica subterană, sau pot fi formulate într-un astfel de mod). În această situație, viteza calculatorului analogic poate fi combinată cu logica și memoria calculatorului numeric, pentru a reduce cantitatea echipamentului analogic sau pentru a diminua durata de calcul în raport cu rezolvarea numai pe calculatorul numeric. Astfel, calculul analogic iterativ poate fi privit ca o subrutină în programul global hibrid. Precizia care se poate obține pe această cale este egală cu precizia părții de calcul analogic.

Aceste avantaje au fost evidențiate și practic, chiar de către primele sisteme hibride realizate, deși acestea aveau o arhitectură mai simplă. Creșterea complexității unor probleme și rezultatele obținute cu primele sisteme hibride au făcut ca, în prezent, să existe nu numai un mare interes față de simularea hibridă, dar și o profilare a utilizării ei efective.

2. SISTEME HIBRIDE DE SIMULARE

Un sistem hibrid de calcul (de tipul general reprezentat în figura 5) permite simularea îmbunătățită a sistemelor fizice (obiect), datorită următoarelor facilități rezultate din conexiunea hibridă [11]:

Programarea analogică automată. Legătura directă cu calculatorul numeric face posibilă aplicarea unor programe numerice speciale pentru rezolvarea automată a unor faze ale problemei programate pe calculatorul analogic. În acest sens, în ultima vreme s-au dezvoltat chiar și cîteva limbaje algoritmice speciale pentru calculul hibrid, așa cum sînt limbajele: HYBRID FORTRAN, HYBRID SYMBOL, HYBRID EXECUTIVE, HYBRID UTILITY, HYTRAN, APACHE (Analog Programming And CHEcking) etc.

Programarea automată a calculatorului analogic. Dacă calculatorul analogic este echipat corespunzător, calculatorul numeric poate controla interconexiunile dintre blocurile analogice, programarea generatoarelor de funcții și comutarea potențiometrelor la valorile necesare în timpul simulării. Principial, toate operațiile de programare a calculatorului analogic arătate mai sus pot fi realizate automat, sub controlul programului rulat pe calculatorul numeric. În cazul proceselor de filtrație din mecanica subterană, chiar numai modificarea parțială a configurației analogice și ajustarea corespunzătoare a potențiometrelor (în concordanță cu parametri de stare ai mediului poros și ai celui fluid), efectuată automat și în timp util de către calculatorul numeric, fac ca simularea hibridă să fie unica tehnică de studiu eficientă la modul practic.

Afișarea rezultatelor și evidența operațiilor. Sistemul hibrid înlesnește atît înregistrarea analogică a variabilelor generate în calculatorul numeric (trasarea graficelor), cît și imprimarea precisă a variabilelor analogice (prin listarea valorilor pe „outprint"-uri). Graficele obținute pe trasoare („plotter" sau / și „display") permit operatorului să urmărească și să dirijeze („monitoring") evoluția soluțiilor în decursul rulării, în timp ce „outprint"-urilor îi dau posibilitatea să facă o analiză precisă și extinsă a rezultatelor. Calculatorul numeric înlesnește, în același timp, obținerea documentelor de evidență cu privire la rularea programului analogic, a duratelor și a procedurilor de operare.

În literatură se întîlnesc foarte puține referiri la simulatoarele hibride, deoarece ele sînt construite numai în cazuri speciale (pentru studiul unei anumite clase de fenomene, restrînsă) și — ca urmare — au un caracter de unicat.

Majoritatea sistemelor hibride aflate în prezent în exploatare sînt constituite din calculatoare analogice universale și din calculatoare numerice universale („GENERAL PURPOSE"), interconectate prin interfețe hibride [17]. Unele din cele mai cunoscute pe plan mondial sînt sistemele hibride al firmei EAI*) ca, de exemplu, sistemul hibrid EAI 590[7].

*) În prezent, cele două firme constructoare de echipamente electronice de calcul, care dețin supremația mondială, au următoarele orientări: IBM, lider în construcția de echipamente numerice (circa 70% din producția mondială) produce întregul set de interfețe hibride pentru cunoscutele ei serii de sisteme numerice IBM/360 și IBM/370; EAI, lider în construcția de echipamente analogice (printre care și calculatorul analogic universal EAI 580), produce atît interfețe hibride (de exemplu seria EAI 693), cît și calculatoare numerice universale (de exemplu seria EAI 640).

Tendința de viitor este acea a creerii unor *configurații multisistem* (cu o structură hibridă ca aceea din figura 6) în vederea optimizării utilizării echipamentelor prin interconectarea lor în sisteme mari (care au și subsisteme satelit), precum și pentru obținerea unor tehnici cu mari resurse de calcul și simulare. În exemplul din figura 6 este vorba de un *multisistem hibrid* care utilizează legătura directă între canalele a două sisteme numerice. Calculatorul numeric mic este utilizat în principal ca interfață numerică între calculatorul numeric mare și sistemul : interfață hibridă -calculator analogic. În acest mod, calculatorul mic poate fi folosit pentru testarea programului hibrid înaintea rezolvării (sau pentru rezolvarea unor probleme care nu necesită un calcul numeric extensiv). Calculatorul mic mai poate fi folosit și pentru controlul perifericelor sistemului numeric mare, în cazul în care calculatorul analogic funcționează independent.

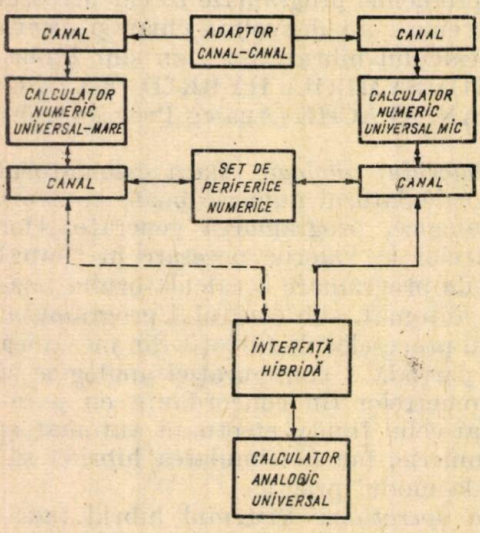


Fig. 6

Revenim asupra ideii că un sistem hibrid poate fi constituit, în principiu, prin interconectarea oricărui calculator numeric universal cu oricare calculator analogic universal (cu condiția utilizării unor interfețe — logice, convertoare N/A și A/N de canal, de control etc. — corespunzător alese), deoarece în prezent, în țara noastră, există numeroase sisteme numerice de calcul (ca, de exemplu, sistemele IMB seriile 360 și 370), care ar putea fi utilizate într-o configurație hibridă în vederea rezolvării unor probleme mai complexe (cum sînt cele ale hidrogazodinamicii subterane). Insistăm și asupra faptului că există multe căi diferite prin care o problemă dată poate fi „împărțită" între cele două calculatoare (numeric și analogic), cu scopul de a obține o viteză și o precizie de calcul sporită, corespunzătoare unor exigențe reale. Astfel, aplicațiile se întind de la cazurile în care calculatorul numeric este utilizat pe perioade lungi numai ca unitate de intrare/ieșire pentru calculatorul analogic, pînă la acelea în care există un calcul numeric și o logică considerabile pentru care calculatorul analogic este folosit numai la unele operații de rutină specifice lui (ca, de exemplu, integrarea unor ecuații diferențiale). În orice situație, sarcina majoră de programare și operare este de a controla fluxul de informație între cele două calculatoare; prin urmare, atenția trebuie concentrată asupra acelor considerente funcționale care se referă la operațiile de interconectare și control ale sistemului. De aceea, beneficiarul (utilizatorul) tehnicii de calcul trebuie să coopereze cu un inginer de sistem (pentru partea de operare și logică) și cu un inginer de echipamente (pentru aparatura de cuplare/interconectare), în vederea realizării unei arhitec-

turi a sistemului hibrid capabilă să asigure o simulare corectă a proceselor de studiat.

În acest sens, atenţia trebuie concentrată asupra unor probleme ca [17]: conversia datelor, transferul de date, eşantionarea simultană a datelor, versatilitatea, controlul sistemului şi sincronizarea operaţiilor (de exemplu cu un „timer", adică un generator de tact cu ciclu de bază reglabil, ale cărui semnale — trenuri de pulsuri — să comande calculul analogic sau să realizeze întreruperile pentru calculatorul numeric în funcţie de ciclul calculului hibrid necesar).

Nu dispunem de spaţiul necesar pentru a intra în detaliile problemelor enumerate mai sus, care sînt specifice interconectărilor hibride, însă — pentru nespecialiştii în domeniul tehnicii de calcul — vom comenta cîteva din ele pentru a demonstra importanţa rezolvării lor corecte în vederea realizării sistemului hibrid dorit. Astfel, în ceea ce priveşte *conversia datelor*, aceasta apare datorită faptului că variabilele dependente de timp sînt reprezentate în calculatorul analogic prin tensiuni electrice la borne continue variabile în timp : $U(t)$, pe cînd într-un calculator numeric o astfel de variabilă este reprezentată printr-o secvenţă de pulsuri care — într-un anumit cod — reprezintă numere discrete ce corespund valorilor eşantionate ale semnalului continuu. Ca urmare, este necesar un echipament de conversie Analog⇆Numeric, $A \leftrightarrows N$ (vezi fig. 5) : convertoarele $A-N$ vor transforma tensiunea electrică de la ieşirea calculatorului analogic într-o secvenţă de pulsuri adecvată intrării în calculatorul numeric, iar convertoarele $N - A$ vor transforma trenul de pulsuri ce exprimă o secvenţă numerică într-o tensiune continuă variabilă în timp necesară intrărilor în calculatorul analogic. Pentru multe din posibilităţile reale ale calculatoarelor analogice, lungimea cuvintelor informaţionale convertite şi transmise trebuie să fie de cel puţin 13 bits (cifre binare), iar sistemul de conversie trebuie să aibă o precizie globală corespunzătoare clasei 0,1 (erori maxime de cel mult $\pm$ 0,1 % din valoarea maximă a mărimii convertite).

Transferul de date între cele două calculatoare ($CA \leftrightarrow CN$) din configuraţia hibridă trebuie să fie eficientă şi rapidă. Cunoscînd că ciclul de calcul hibrid constă din patru operaţii de bază : calculul analogic, transmiterea de date analog-numerică, calculul numeric şi transmiterea de date numeric-analogică, în multe probleme fazele a două sau mai multe operaţii din cele patru de mai sus se pot realiza logic simultan (deci eficient şi rapid). De aici, apare necesitatea ca sistemul numeric să accepte suprapunerea operaţiilor de intrare-ieşire cu calculul şi chiar cu operaţiile de conversie şi multiplexare din canalele de transmitere a datelor.

Versatilitatea este o cerinţă care rezultă din necesitatea ca sistemul hibrid (în fond un calculator specializat) să poată opera într-un domeniu mai larg de probleme. De aceea, sistemul hibrid trebuie să dispună de „abilitatea" de a varia vitezele de eşantionare, de a modifica punctele de intrare/ieşire şi de a explora diverse puncte cu viteze de eşantionare diferite. Acestea conduc la necesitatea posibilităţii de adresare selectivă pentru intrările şi ieşirile calculatorului numeric. De asemenea, interconectarea trebuie să fie astfel realizată încît să permită şi utilizarea independentă a calculatoarelor (analogic şi numeric) în cazul problemelor care nu necesită o simulare hibridă.

Pentru rezolvarea corectă a problemelor de mai sus, o atenție deosebită trebuie acordată așa-numitei *interfețe hibride* [21], deoarece ea este acea parte a sistemului hibrid care trebuie să asigure schimbul de informație între secțiunea numerică și cea analogică a structurii hibride. Punctele principale ale interfeței hibride sînt : intrările numerice, ieșirile numerice, intrările analogice și ieșirile analogice. Interfața hibridă lucrează prin divizarea timpului („time-sharing"), realizînd legătura simultană cu mai multe dispozitive periferice atașate interfeței prin canalul multiplexor al sistemului. Această legătură se face cu mai multe nivele de prioritate, ca, de exemplu,

— nivelul 0 : cereri de transfer de date inițiale de către canalul multiplexor al sistemului ;
— nivelul 1 : cereri de transfer inițiate de :
1.1. : intrările analogice,
1.2. : controlul convertoarelor $A-N$,
1.3 : intrările numerice,
1.4 : controlul convertoarelor $N-A$.

Datorită acestui sistem de priorități, orice transfer de date cu un dispozitiv periferic poate fi temporar suspendat pentru a se executa transferul de date cu un periferic care are o prioritate mai înaltă.

3. UN EXEMPLU DE SIMULARE HIBRIDĂ

Unul din domeniile în care aplicațiile simulării hibride se dovedesc de mare eficiență este acela al mecanicii fluidelor, mai ales în problemele de hidrogazodinamică subterană [12]. De aceea vom prezenta, sumar, un exemplu de simulare hibridă pentru optimizarea exploatării zăcămintelor petrolifere.

După cum se știe, datele cu privire la un zăcămînt petrolifer se îmbogățesc pe măsura exploatării lui, iar condițiile termohidrogazodinamice se modifică tocmai ca urmare a evoluției procesului de exploatare și a utilizării diferitelor procedee de extracție. De aceea, *pentru realizarea unei exploatări raționale se impune efectuarea unui studiu permanent și în mai multe variante al obiectelor expuse exploatării* (o problemă practică de optimizare dinamică). Comportarea în exploatare a unui zăcămînt petrolifer depinde de factori naturali determinați de caracteristicile geologice, fizice și hidrogazodinamice ale zăcămîntului. Numărul mare și diversitatea acestor factori, precum și modificarea — pe măsură ce procesul de exploatare evoluează — a informației cu privire la acești factori și a imaginii zăcămîntului, fac ca soluțiile optime ale problemelor de exploatare să difere de la o etapă la alta. Din această cauză, pentru realizarea permanentă a unui proces optim de exploatare sînt necesare numeroase studii de analiză, calcule de prevedere a comportării zăcămîntului și de proiectare a exploatării efectuate periodic și în mai multe variante posibile (în prezent, s-a ajuns la necesitatea ca pentru fiecare obiectiv în parte proiectarea exploatării lui să fie refăcută la intervale relativ scurte, chiar și de cîte 6 luni !).

În aceste condiții și exigențe (multe obiective, volum mare de date, numeroase variante de executat și interpretat, corelația între stările evolu-

tive ale zăcămîntului, durata mică a studiului, precizia ridicată a soluțiilor), singura tehnică în stare să realizeze conducere optimală a exploatării zăcămintelor petrolifere este simularea hibridă.

În continuare, vom prezenta modul cum se poate efectua această simulare urmărind întocmai schema de procedură din figura 2.

3.1. SISTEMUL OBIECT

Sistemul de studiat (sistemul obiect sau originalul) este format din însăși zăcămîntul petrolifer și procesele de filtrație care au loc aici. Mai în detaliu, structura sistemului obiect este determinată de :

— topologia zăcămîntului (geometria lui, dimensiunile, locul sondelor de extracție și injecție, poziția zonelor productivă și acvifer cu domeniile lor de interferență etc.) ;

— mediul solid, adică roca colectoare, poroasă, considerat ca un mediu neuniform (neomogen și anizotrop) și deformabil (cu geometria porilor variabilă în timp), cu parametri lui fizici specifici ca : porozitatea (m), coeficientul de compresibilitate al mediului poros (β_m), permeabilitatea mediului poros (reprezentată printr-un tensor de ordinul al doilea $\overline{\overline{k}}$, definit prin cele nouă componente ale lui k_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$). Toți acești parametri trebuie considerați ca funcții locale de punct, fapt pe care numai simularea hibridă îl poate realiza (prin memoria de mare capacitate a sistemului numeric și prin calcularea paralel-simultană a valorilor cu ajutorul sistemului analogic) ;

— mediul fluid, format din petrol, gaze și apă, deci din mai multe faze care coexistă în porii rocilor. De aceea trebuie determinată saturația mediului poros în diferitele faze componente ale fluidului, precum și parametri ca : coeficientul de compresibilitate al fluidului (β_l) și viscozitatea fluidului (μ).

Pentru obținerea unor soluții exacte, acest sistem obiect (zăcămînt-proces de filtrație), trebuie analizat în forma sa reală, efectivă și evolutivă, adică :

— zăcămîntul petrolifer reprezintă un complex termohidrogazodinamic unitar, constituit din cele două zone (productivă și acvifer) neseparate prin limite etanșe, ceea ce determină fenomene de interferență între aceste două zone ;

— zăcămîntul este eterogen, atît în privința proprietăților fluidelor conținute, cît și — mai ales — în ceea ce privește proprietățile rocii și ale sistemului fluid-rocă ;

— petrolul, gazele și apa există împreună în mediile poroase, stările lor fizice și fizico-chimice în condiții de zăcămînt fiind diferite de cele corespunzătoare condițiilor standard de presiune și de temperatură ;

— condițiile hidrodinamice ale unui zăcămînt petrolifer sînt influențate de numeroși factori, printre care : situația acviferului (care poate fi un rezervor închis sau deschis), modul de localizare a zăcămîntului în scoarță, natura rocelor colectoare, compoziția și proprietățile mediului fluid etc. ;

— limitele între cele două zone ale unui zăcămînt petrolifer (productivă și acvifer) nu trebuie privite ca niște suprafețe de discontinuitate a

distribuției fluidelor în zăcămînt, care separă net zona petroliferă de zona acviferului sau a capului inițial de gaze (în condițiile de zăcămînt, între aceste domenii se formează, datorită capilarității, zone de tranziție apă-petrol sau gaze-petrol de diferite grosimi).

Numai un sistem hibrid, dotat cu unități de memorie (pentru stocarea valorilor locale și variabile în timp ale parametrilor, precum și cu programele de prelucrare a datelor), înzestrat cu un echipament analog de mare versatilitate (care să reproducă fidel sistemul complex al zăcămîntului), precum și cu un sistem de programe de operare (care să asigure reproducerea automată a modificărilor în timp ale sistemului original), poate constitui un simulator mai precis al unui sistem atît de complex cum este zăcămîntul petrolifer și cu exigențe atît de severe ca cele schițate mai înainte.

Urmărind schema generală de procedură a simulării (vezi fig. 2), ne dăm seama că elementele de dinamică ale sistemului („starea inițială a sistemului" — „descrierea stării curente a sistemului" — „succesiunea de stări ale sistemului" corespunzătoare istoricului unui zăcămînt) nu pot fi asigurate în cadrul simulării decît printr-o memorie de capacitate mare și un pachet de programe cu proceduri de calcul hibrid.

Redarea fidelă a zăcămîntului (ca sistem original) de către simulator depinde, evident, de datele geologice, de măsurătorile efectuate la sonde și de toate observațiile culese în decursul exploatării lui. Un sistem hibrid poate, practic fără limitări, să stocheze orice volum de date și să corecteze operativ structura simulatorului analog în concordanță cu starea „la zi" a zăcămîntului — original.

3.2. MODELUL

În cazul exemplului considerat (extracția petrolului dintr-un zăcămînt dat), modelul constă într-o reprezentare matematică cît mai fidelă a procesului de dislocuire a petrolului, fie de către agenții proprii (gazele care ies din soluție după scăderea presiunii sub presiunea de saturație, gazele care se destind pe măsură ce presiunea de zăcămînt scade și apele marginale sau de fund, care avansează treptat în decursul exploatării), fie de către agenții de dezlocuire injectați de la suprafață, în măsura în care acest proces de scurgere a fluidelor prin medii poroase ne este cunoscut astăzi prin procedeele mecanicii fluidelor (aplicate la scară macroscopică sau — mai bine, în limita posibilului ! — la scara microscopică a geometriei locale a rocei poroase, combinate și cu elemente din teoria statisticii matematice).

Oricum, problema care se pune este, în esență, aceea a determinării, în fiecare punct P, a presiunii p, a vitezei $\bar{v}$, a densității ρ și a temperaturii T a fluidului care se deplasează într-un mediu poros dat (cu domeniul Ω), delimitat de o suprafață Σ, cînd se cunosc cîmpul acestor mărimi în momentul inițial („condițiile inițiale") și în punctele de pe suprafața de contur Σ („condițiile la limită"), știind că $P \in \bar{\Omega}$(unde $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$).

Și în prezent, modelul proceselor de filtrație se elaborează pe baza ecuației de stare (caracteristică), a ecuației continuității și a legii lui Darcy (stabilită experimental), sub forma unor probleme cu condiții la

limită și inițiale în care intervin ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic. Astfel, după cum este bine cunoscut [18], modelul scurgerii fluidelor prin medii poroase poate fi admis (cu bune rezultate practice) ca fiind următorul :

$$-\operatorname{div}\left(\rho^2\,\mu^{-1}k\,.\,\operatorname{grad}\,\varphi\right)=\mathrm{D}_t(m\,\rho), \qquad (1)$$

unde φ este o funcție potențială de forma

$$\varphi=-\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}-g\,x_3,$$

în care x_3 este o coordonată verticală (într-un sistem de referință cartezian ortogonal Ox_i, $i=1, 2, 3$), iar p_0 este o valoare de referință a presiunii fluidului, g fiind accelerația gravitației.

Toate mărimile de mai sus sînt funcții de punct P : presiunea fluidului $p(P)$, viscozitatea fluidului $\mu(P)$, componentele tensorului permeabilității rocii $\bar{\bar{k}}$, adică $k_{ij}(P)$ $(i, j=1, 2, 3)$, accelerația gravitației $g(P)$, funcția potențială $\varphi(P)$, porozitatea $m(P)$ și — evident — coordonata $x_3(P)$, unde $P\in\overline{\Omega}=\Omega\cup\Sigma$, în care Ω este un domeniu deschis și mărginit din spațiul euclidian tridimensional $(\Omega\subset E^3)$ și $\Sigma=\mathrm{Fr}\Omega$. Pentru densitatea fluidului $\rho(p)$, cu $p(P)$, se poate folosi modelul lui M. Muskat și anume :

$$\rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^n\cdot\exp\left[\beta_l\,(p-p_0)\right],$$

unde $\beta_l=\beta_l\,(P)$ este coeficientul de compresibilitate al fluidului, ρ_0 densitatea fluidului la presiunea de referință p_0 și n un coeficient caracteristic naturii fluidului și procesului de filtrație [18].

Una dintre cele mai importante probleme ale analizei exploatării zăcămintelor petrolifere este aceea a dezlocuirii unui fluid de către altul (de exemplu : a petrolului din zăcămînt de către apa de injecție). Aceasta reprezintă o problemă tipică a scurgerii multifazice printr-un mediu poros ; modelele corespunzătoare unor cazuri particulare sînt deduse în [18], cu simplificarea că mediul poros este împărțit de către un front de separație (aproximat ca net) în două regiuni : una care conține fluidul ce urmează a fi dezlocuit (avînd și o saturație ireductibilă în fluidul de dezlocuire) și alta care conține fluidul de dezlocuire (avînd și o saturație reziduală în fluidul dezlocuit).

În cazurile practice și excluzînd problemele particulare sau simplificate, modelele de mai sus nu pot fi soluționate prin metode analitice. Soluțiile cele mai precise, care efectiv pot fi obținute practic, sînt cele date de simularea hibridă.

3.3. MODELUL DE SIMULARE

În cazul simulatorului hibrid pe care îl vom propune mai jos (care are o „secțiune" numerică și un simulator analogic de tip rețea), modelul de simulare este un model cu diferențe finite care aproximează, prin

metoda discretizării [5], ecuațiile cu derivate parțiale (1) considerate într-un domeniu plan ($\Omega \subset E^2$). Cazul real, spațial ($\Omega \subset E^3$), se realizează „repetînd" soluționarea problemei plane (deci pentru anumite valori discrete ale coordonatei x_3) și memorarea rezultatelor de către unitățile periferice ale calculatorului numeric. De fiecare dată, conturul $\Sigma_{x_3=\text{const.}}$ este „fixat" de calculatorul numeric prin cuploarele interfeței hibride, pe baza unui program prestabilit.

Modelul de simulare se stabilește considerînd o rețea spațială de discretizare R_{h_i} de forma

$$R_{h_i} = \{M \mid M = (m_i h_i);\ m_i \in N;\ h_i > 0;\ i = 1, 2, 3\}$$

și pentru fiecare nod $M \in R_{h_i}$ se aleg cîte 26 noduri vecine pentru care se face discretizarea ecuației (1), aceasta ducînd la modelul discret cu cel mai bun ordin de aproximare [5].

Funcției necunoscute $\varphi(P)$ din (1) îi va corespunde o funcție discretă Φ definită pe rețeaua R_{h_i} (adică pe mulțimea finită a nodurilor M din R_{h_i} care aparțin domeniului $\bar{\Omega}$, cu $P \in \bar{\Omega}$). Notînd

$$\Omega_h = \{M \mid M \in R_{h_i} \subset \Omega\},$$

$$\Sigma_h = \mathrm{Fr}\,\Omega_h = \{M \mid M \in R_{h_i} \cap \Sigma = \mathrm{Fr}\,\Omega\},$$

$$\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Sigma_h$$

și știind că ecuația (1) se poate scrie, într-un sistem de referință cartezian ortogonal Ox_i ($i = 1, 2, 3$), și în forma

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\rho^2 \overline{k}}{\mu}\right)_i \mathrm{D}^2_{x_i^2} \varphi + \mathrm{D}_{x_i}\left(\frac{\rho^2 \overline{k}}{\mu}\right)_i \mathrm{D}_{x_i} \varphi = \mathrm{D}_t(m\rho),$$

atunci modelul discret al ecuației (1) scris aici numai pe șapte noduri (în loc de 27), pentru a face economie de spațiu [5] este:

$$(a_{i-1,j,k} - 0{,}5\ b_{i-1,j,k} h_1)\ \Phi_{i-1,j,k} + (a_{i+1,j,k} + 0{,}5 b_{i+1,j,k} h_1)\ \Phi_{i+1,j,k} +$$

$$+ (a_{i,j-1,k} - 0{,}5\ b_{i,j-1,k} h_2)\ \Phi_{i,j-1,k} + (a_{i,j+1,k} + 0{,}5 b_{i,j+1,k} h_2)\ \Phi_{i,j+1,k} +$$

$$+ (a_{i,j,k-1} - 0{,}5\ b_{i,j,k-1} h_3)\ \Phi_{i,j,k-1} + a_{i,j,k+1} + 0{,}5\ b_{i,j,k+1} h_3) \Phi_{i,j,k+1} -$$

$$- 6 a_{i,j,k}\ \Phi_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta t}(m_{t+\Delta t} \cdot \rho_{t+\Delta t} - m_t \cdot \rho_t), \qquad (2)$$

unde nodul $M \in \Omega_h$ a fost notat cu $(i, j, k) \equiv M$, $i, j, k \in N$ (mulțimea numerelor naturale). Pe conturul discret Σ_h se dau valorile $\Phi_{i,j,k}(i, j, k) \in \Sigma_h$.

În ecuațiile (2), h_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt pașii rețelei de discretizare, $a_{i,j,k} = \left(\frac{\rho^2 k}{\mu}\right)_{i,j,k}$ și $b_{i,j,k} = \frac{1}{h_l}\Delta_l \cdot \left(\frac{\rho^2 k}{\mu}\right)_{i,j,k}$ $(l = 1, 2, 3)$, unde Δ_l este operatorul „diferență înainte", iar Δt este pasul finit de timp.

Să remarcăm că (2) formează un sistem de ecuații algebrice liniar, cu atîtea necunoscute $\Phi_{i,j,k}$ cîte noduri (i, j, k) sînt cuprinse în domeniul de discretizare Ω_h. Atunci (2) este și un model de simulare numerică.

Simularea hibridă permite :

— determinarea simultană (prin măsurători pe un simulator analogic) a valorilor $\Phi_{i,j,k}$ $(i, j, k) \in \Omega_h$;

— stocarea acestor valori de către calculatorul numeric, prin unitățile de memorie externă ale echipamentelor lui periferice ;

— compararea, prin programe de calcul, de către calculatorul numeric a mai multor soluții, obținute pentru mai multe variante ;

— corectarea (prin interfața hibridă) de către calculatorul numeric (pe baza unui program de trecere de la o variantă la alta) a parametrilor specifici elementelor structurale din simulatorul analogic ;

— alegerea, pe baza unor criterii programate, de către calculatorul numeric, a variantei optime și reprezentarea grafică : spațială (printr-un „digital plotter") sau tabelat (printr-un „listing" cu valori) a soluțiilor optime $\Phi_{i,j,k}$.

Este de remarcat faptul că studiul prin simularea hibridă a unui zăcămînt petrolifer este constituit dintr-o serie de aproximații succesive (pentru fiecare interval finit Δt ales), care dau în mod gradat o „certitudine" din ce în ce mai mare asupra validității hotărîrilor ce s-ar putea lua pentru exploatarea rațională (optimă !) a zăcămîntului.

3.4. SIMULATORUL HIBRID

Simulatorul hibrid cu care s-ar putea realiza studiul comportării în exploatare a zăcămintelor petrolifere, ar putea avea configurația minimală (cea mai „ieftină") redată în schema bloc din figura 7.

Acest simulator este format dintr-o rețea electrică $R-C$ plană ca simulator analogic (SA) al zăcămîntului petrolifer, cu o „anvergură" minimă de 1280 noduri. O „densitate" mai mare a acestei rețele nu este absolut necesară (cum se crede în general !), deoarece datele despre zăcămînt, ce se pot obține efectiv cu o bună precizie, sînt mult prea puține și fac prea costisitoare o rețea cu mult mai multe noduri, pentru care nu s-ar putea realiza toate indicațiile necesare (din lipsă de valori precise). Este, însă, necesar ca rezistoarele și condensatoarele rețelei să fie reglabile (în circa 10 trepte) ; aceasta se poate realiza prin : rezistoare cuplate în serie în laturile rețelei și un set de relee electromagnetice cu contacte de șuntare (de tip „selector telefonic").

Acestui simulator (SA pe figura 7) i se atașează și un generator de funcții (GF), care asigură condițiile pe frontieră și la sondele simulate, prin valori reglabile de tensiuni electrice la noduri.

Simulatorul *SA* reproduce analogic repartiția parametrilor (ρ, k_{ij}, μ — prin rezistențele R și m, β — prin capacitățile C) și a mărimilor de lucru (p — prin tensiuni electrice la noduri; q — prin curenții electrici din laturi; amplasarea sondelor și frontul de dislocuire — prin semnalele produse de *GF*) în mai multe variante posibile.

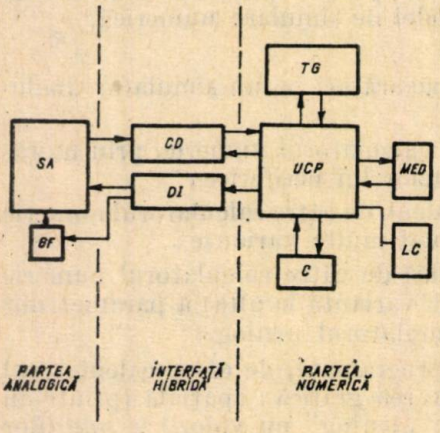


Fig. 7

Partea numerică a simulatorului hibrid este formată dintr-un sistem de calcul universal care realizează următoarele faze ale simulării:

— introducerea datelor (printr-un lector de cartele perforate *LC*);

— prelucrarea datelor (citite prin *LC* sau/și „extrase" prin măsurători pe simulatorul analogic *SA*) în vederea transpunerii pe rețea sau a corectării operative a parametrilor în funcție de măsurătorile de presiune, precum și interpretarea finală a rezultatelor în vederea alegerii variantei optime;

— memorarea datelor privind evoluția și istoricul zăcămîntului cu ajutorul unor unități periferice cu discuri magnetice (*DM*), precum și a pachetelor de programe de aplicație;

— extragerea soluțiilor, sub forma unor grafice, realizată de un trasor de grafice *TG* (de pildă un „digital plotter");

— efectuarea unor corecturi de către un operator uman sau comunicarea de mesaje, prin consola *C*.

Sistemul numeric are — în aceste scopuri — o unitate de centrală de prelucrare *UCP*, de tip clasic, a cărei memorie operativă este suficient să aibă capacitatea de 32 kocteți.

Interfața hibridă, cu totul specifică acestei aplicații, care „leagă" părțile analogă și numerică, este compusă dintr-un colector de date (*CD*) și un așa-numit distribuitor de informație (*DI*).

Colectorul de date (*CD*) este format dintr-un canal multiplexor cu 128 de subcanale care explorează rețeaua simulatorului analog (*SA*) nod cu nod, pe grupe de 128 noduri și un convertor analog-numeric. Distribuitorul de informație (*DI*) se compune dintr-un decodificator care comandă releele ce șuntează elementele R, C ale rețelei simulatorului analog (*SA*), aceste relee reprezentînd ieșirile numerice ale interfeței hibride. Distribuitorul de informație comandă și generatorul de funcții în scopul realizării condițiilor la limită (pe contur și în locurile de amplasare a sondelor).

Într-o astfel de configurație minimală, dar eficientă, ar putea fi utilizat cu succes și calculatorul românesc FELIX C-32 U, cu condiția atașării unui periferic pentru trasarea graficelor, precum și a realizării interfeței hibride care nu prezintă complicații prea mari. De asemenea, construirea unei rețele $R-C$ cu 1280 noduri și cu relee de șuntare în scopul

modificării în trepte a parametrilor $R-C$ nu este o problemă nici complicată și nici prea costisitoare.

În concluzie, simularea hibridă, în mod eficient, a problemelor de mecanică subterană este — în prezent — realizabilă cu echipamente care se construiesc deja în țara noastră.

De altfel, în planul de lucru al Institutului de cercetări și proiectări electronice (I.C.E.) București este prevăzută elaborarea în anul 1977 (cu posibilități de livrare în anul 1978) a unui sistem automat de colectare și imprimare a datelor, care poate măsura prin 10 pînă la 100 canale, cu o viteză de circa 10 măsurări/secundă, tensiuni continue de natură analogică. Principial, acest sistem constă dintr-un multiplexor (care comută subcanalele de măsurat și produce pulsurile de tact pentru inițierea măsurării), un voltmetru numeric și o imprimantă a rezultatelor (cu lucru „serie"). Sistemul permite programarea punctelor de măsurare, astfel încît poate fi conectat la un calculator pentru comanda procesului de măsurare și prelucrarea rezultatelor (în acest scop, interfața este asigurată în conformitate cu recomandările CEI — comitet 66). Acest sistem ar putea asigura „legătura" între un simulator analogic de tip rețea $R-C$ (de felul lui SA din figura 7) și un calculator numeric FELIX C-32 U.

Primită la redacție la 30 octombrie 1976.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Blunden, H. Krasnow, *The process concept as a basis for simulation modeling*, Simulation, **9**, *2*, (1967).
2. G. Burgin, *APACHE — some encouraging experiences*, Simulation, **6**, *1*, (1966).
3. D. N. Chorafas, *La simulation mathématique et ses applications*, Paris, Dunod, 1966.
4. E. J. Cremeans, *The trend in simulation*, Computers and Automation, **17**, *1* (1968).
5. I. Dumitrescu, *Simularea cîmpurilor potențiale cu aplicații la exploatarea zăcămintelor de petrol* (rezumatul tezei de doctorat), București, Litografia I.P.G.G., 1970.
6. I. Dumitrescu, *Rețele electrice pentru modelarea cîmpurilor potențiale*, Buletinul I.P.G.G. **XIV** (1966).
7. * * * *EAI 590 Hybrid Computing System*, Form 952007 EAI.
8. J. Feytis, *Firmware for Hybrid Configuration of Digital and Analog Computers*, Proceedings of the 7-th AICA Conference, Prague, August 1973.
9. F. W. Graham, *The character of simulation*, Simulation, **8**, *5* (1967).
10. G. Hannauer, *Automatic Patching for Analog and Hybrid Computers*, Simulation, **12**, *5*, (1969).
11. * * * *Hybrid Computing Systems*, Form E20—0053 IBM-DPA.
12. Gr. Ioachim, T. Oroveanu, *Rezolvarea pe cale analogică a unor probleme de curgere a lichidelor compresibile prin medii poroase*, Buletinul I. P. G. G., **XIII** (1965).
13. G. A. Korn, *Recent Computer-System Developments and Continuous System Simulation*, Proceedings of the 7-th AICA Conference, Prague, August 1973.
14. G. A. Korn, T. M. Korn, *Electronic Analog and Hybrid Computers*, New York, Mc. Graw-Hill, 1972.
15. * * * *Les méthodes de simulation*, Paris, Dunod, 1968.
16. * * * *More definitions*, Simulation, **8**, *1* (1967).
17. A. Nica, *Sisteme hibride de calcul*, București, Academia „Ștefan Gheorghiu", 1975.
18. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București, Editura Academiei R.S.R., 1966.
19. N. Racoveanu, *Un model al simulării sistemelor*, Studii și cercetări de calcul economic și cibernetică economică, 4, 1969.
20. C. A. E. Uhling, *Fields and methods of their simulation and exploration*, Simulation, **8**, *3* (1967).
21. * * * *Symulation by Hybrid Computer*, Form EAI (1969).

RECENZII

BEYER R. T., Nonlinear Acoustics (Acustică neliniară). Naval Ships Systems, Department of the Navy, Washington, 1975, X + 405 pag., 191 fig.

Cercetările recente de mecanică a solidelor și a fluidelor subliniază tot mai mult necesitatea luării în considerare a diferitelor tipuri de efecte neliniare. În cazul undelor mecanice în diferite medii și materiale acest aspect capătă o importanță aparte.

Monografia profesorului R. T. Beyer de la Universitatea Brown — S.U.A., urmărește prezentarea principalelor chestiuni de acustică neliniară susceptibile de importante consecințe teoretice și practice.

După ce în introducere sînt trecute în revistă originea și evoluția principalelor probleme ale acusticii neliniare, autorul consacră un prim capitol revederii bazelor acusticii liniare. Avînd în vedere că, în general, cauzele de comportări neliniare sînt generate de surse, mediul de propagare și sistemul de detecție, în continuare se ia în considerare această sistematizare, consacrîndu-se cîte un capitol (al II-lea), surselor de oscilații neliniare și, respectiv, fenomenelor de propagare neliniară în fluide (al III-lea); sînt avute de asemenea în vedere aspecte teoretice speciale precum și modalitățile de verificare experimentală (elemente elastice neliniare, efectul amortizării asupra oscilațiilor neliniare, neliniaritățile membranelor, formularea și rezolvarea ecuației de propagare a undelor în diferite variante, surse de amplitudine acustică finită etc.).

Capitolul al IV-lea se referă la undele de șoc. Sînt date ecuațiile fundamentale,se studiază structura undei de șoc și fenomenul de reflexie; în continuare este prezentat tubul de șoc. În sfîrșit, pot fi menționate rezultatele interesante referitoare la boom-ul sonic și exploziile submarine.

Capitolul al V-lea conține elemente de aeroacustică (ecuațiile lui Lightill, sursele de tip mono-, di- și cvadrupol, emisiile acustice induse de neuniformitatea curgerii fluidelor).

Un întreg capitol (al VI-lea) este consacrat studiului presiunii de radiație (formulările lui Rayleigh și, respectiv Langevin, analiza efectelor de ordin superior, efectul reflexiei precum și procedee și aparatură de măsură a presiunii de radiație).

Capitolele al VII-lea și al VIII-lea descriu două fenomene importante pentru punerea în evidență a efectelor neliniare: fluturarea și cavitația. În privința primului subiect pot fi menționate prezentarea ecuațiilor fundamentale, cazul undelor plane într-un mediu infinit, al tubului cilindric circular, propagarea undelor plane între pereți plane paraleli, undele staționare, curgerea oscilatorie în vecinătatea unui cilindru precum și interesante modalități de studiu experimental. În ceea ce privește fenomenul de cavitație sînt expuse teoria statică și teoria dinamică subliniindu-se principalele tipuri de aproximații; un spațiu important este acordat studiilor experimentale, originii și stabilității nucleelor de cavitație, zgomotului specific precum și sonoluminiscenței.

Interacțiunile neliniare ale undelor acustice sînt tratate în capitolele al IX-lea și al X-lea, teoretic și, respectiv, experimental. După trecerea în revistă a principalelor teorii existente se analizează absorbția și difracția reciprocă a undelor acustice, interacțiunea impulsurilor de amplitudine finită; sînt exemplificate în continuare transmisia și recepția în cîmp apropiat și la infinit pentru rețeaua parametrică, interacțiunile neliniare în zgomotul intens.

În ultimul capitol (al XI-lea) al lucrării, intitulat propagări neliniare în solide, după trecerea în revistă a aspectelor generale ale chestiunii, sînt prezentate vibrațiile rețelelor cristaline în aproximația Debye, undele neliniare în rețelele cristaline, deducerea constantelor elastice de ordinul al III-lea și determinarea lor pe cale experimentală. În continuare sînt expuse interacțiunea undelor mecanice în solide și undele de suprafață neliniare îndeosebi, din punctul de vedere al posibilităților de studiu experimental.

Cartea conține cîte un index de autori și de subiecte. Bibliografia compusă din 321 de referiri este judicios repartizată pe capitole.

Concentrarea unui extrem de bogat material informativ într-un spațiu relativ restrîns permite nu numai obținerea într-un minimum de timp a unei imagini reale asupra importanței studiilor asupra efectelor neliniare, ci și indicații utile relativ la principalele direcții moderne de studiu. În acest fel, cartea poate fi deosebit de utilă tuturor celor interesați de problemele referitoare la efectele neliniare ale undelor mecanice.

H. Paven

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁRA

FINDLEY W. N., LAI J. S., ONARAN K., Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials (Fluajul și Relaxarea materialelor neliniar viscoelastice). North-Holland, Amsterdam, New York—Oxford, 1976, XIII + 352 pag. 91 fig., $ 34.50.

Proiectarea diferitelor tipuri de structuri mecanice moderne de înaltă performanță impune, de la bun început, cunoașterea cu un înalt grad de precizie a legilor de comportare a diferitelor tipuri de materiale. Întrucît materialele reale prezintă un spectru larg de comportări, în funcție de condițiile de utilizare, diferitele tipuri de aproximări ce se fac în mod obișnuit au evident domenii limitate de valabilitate.

Cartea profesorilor Findley W. N. (Universitatea Brown-S.U.A.), Lai J. S. (Universitatea Utah — S.U.A.) și Onaran K. (Universitatea tehnică din Istambul — Turcia) se ocupă de studierea sistematică a comportării viscoelastice neliniare, avînd în vedere atît ideile teoretice fundamentale, cît și prezentarea metodelor experimentale necesare pentru obținerea unor date cu înalt grad de precizie, care să poată fi apoi utilizate cu succes și în proiectare.

Primele două capitole cuprind aspecte introductive referitoare la diferitele tipuri de comportări mecanice, la procesele de fluaj și relaxare precum și la examinarea succintă a evoluției studiului fluajului la metale și la polimeri atît din punctul de vedere al datelor experimentale, cît și al formulării matematice a problemei.

În capitolul al III-lea sînt prezentate elemente utile privind stările de tensiune și respectiv de deformație, iar în capitolul următor se încheie pregătirea pentru trecerea la expunerea legilor de comportare mecanică a materialelor, după trecerea în revistă a legilor de conservare și de mișcare în mecanica mediilor continue.

Capitolul al V-lea cuprinde expunerea legilor de comportare (ecuații constitutive) în cazul comportării viscoelastice liniare. Sînt descrise modele simple de comportare (Hooke, Maxwell, Kelvin-Voigt, Burgers, Maxwell-generalizat și Kelvin-Voigt-generalizat), în cazul fluajului și respectiv al relaxării. În continuare sînt date formele diferențială și integrală a legilor de comportare pentru diferite stări de tensiune. Apoi se trece la studierea comportării viscoelastice în cazul unor solicitări periodice, exemplificîndu-se noțiunile de modul și complianță complexe, și disipare pe baza modelelor simple amintite mai sus. Includerea aspectelor legate de solicitările (sau deformațiile) periodice poate părea surprinzătoare la prima vedere în cadrul proceselor de fluaj sau relaxare) dar ea este extrem de utilă atunci cînd se caută informații referitoare la intervale foarte scurte de timp. În sfîrșit, este amintită dependența de temperatură a proprietăților viscoelastice și principiul de suprapunere timp-temperatură.

Analiza tensiunilor în viscoelasticitatea liniară este exemplificată pe parcursul capitolului al VI-lea, folosindu-se principiul de corespondență elasticitate-viscoelasticitate, în cazul barelor.

În capitolul al VII-lea este expusă pe larg metoda reprezentării prin integrale multiple în cazul comportării viscoelastice neliniare. Se prezintă cazul solicitării uniaxiale precum și cel al stării complexe de tensiune. În continuare, rezultatele generale sînt aplicate materialelor incompresibile și celor cu compresibilitate liniară, în condițiile în care relația tensiune-deformație este neliniară, făcîndu-se analiza critică a consecințelor ipotezelor de lucru. Alte aspecte interesante incluse în acest capitol vizează aproximarea legilor de comportare neliniare pentru intervale reduse de timp, viscoelasticitatea liniară finită precum și bazele teoretice ale legilor termodinamice de comportare.

Două capitole (al VIII-lea și al IX-lea) sînt consacrate în întregime studierii detaliate a fluajului și relaxării neliniare în cazuri complexe de solicitare atît în experimente simple, cît și în experimente de tip secvențial. Este descris modul în care se pot determina funcțiile nucleu care apar explicit în ecuațiile constitutive. Apoi este prezentată aproximarea prin liniarizare fizică a funcțiilor nucleu. În continuare, în capitolul al X-lea, sînt expuse legile de transfer fluaj-relaxare în cazul neliniar, avîndu-se în vedere diferite tipuri de solicitări.

Capitolul al XI-lea cuprinde expunerea efectului important al temperaturii asupra materialelor cu comportare viscoelastică neliniară în cazul fluajului. Sînt prezentate determinarea funcțiilor nucleu dependente de temperatură, fluajul în cazul variației continue a temperaturii pentru starea uniaxială, al întinderii combinate cu torsiunea și, în sfîrșit, instabilitatea dilatării termice.

Analiza tensiunilor în viscoelasticitatea neliniară, prezentată în capitolul al XII-lea are în vedere, principial, aceleași două aspecte întîlnite în cazul viscoelasticității liniare : caracterizarea proprietăților mecanice și rezolvarea problemelor la limită. Exemplificarea modului de rezolvare al problemelor de analiză a tensiunilor care conduce în cazul neliniar la seturi de ecuații neliniare diferențiale, integrale sau integro-diferențiale se face în cazul torsiunii unei bare cilindrice, a încovoierii pure a unei bare și a solicitării axial simetrice a unui cilindru cu pereții groși.

Ultimul capitol al cărții conține expunerea critică a unor principii generale și a metodelor experimentale de cercetare în mecanica mediilor deformabile vizînd fluajul și relaxarea. Prezentarea unor variante de aparate de precizie completează în mod firesc sugestiile referitoare la măsurarea și controlul diferiților parametri mecanici.

Cartea conține un număr de șase anexe consacrate simbolurilor folosite în lucrare, descrieri matematice a legilor de comportare viscoelastică neliniară, proprietăților funcțiilor treaptă și impuls, transformării Laplace, deducerii principiului suprapunerii din reprezentarea integralelor multiple și tabele de transformări uzuale.

Un index pe subiecte și pe autori, incluse la sfîrșitul lucrării facilitează examinarea cărții.

Bibliografia, conținînd peste 300 de referiri este extrem de utilă aprofundării bogatului material cuprins în lucrare.

Bogata cantitate de informație cuprinsă în această carte, expunerea sistematică a unor probleme actuale de o deosebită importanță atît în privința aspectelor fundamentale cît și al posibilităților de folosire directă în numeroase aplicații în domenii importante ale industriei, fac din această carte în care pot fi găsite și direcții interesante de cercetare viitoare în domeniul comportării mecanice a materialelor, un util instrument de lucru pentru un număr mare de specialiști.

H. Paven

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 36, nr. 5 Septembrie—Octombrie 1977

SUMAR

STUDII

H. DUMITRESCU, V. DRĂGOI, Determinarea undei de şoc generate printr-o injecţie vectorială într-o curgere supersonică 623
VALERIU BĂNUŢ, Calculul structurilor neliniar elastice 635
MARCEL D. STERE, Metode numerice de analiză structurală 647
I. MUNTEANU, ANA NEGRU, Rigiditatea barei drepte în statica, stabilitatea şi dinamica structurilor 665
T. HUIDU, Asupra unei metode de calcul în fotomecanica bidimensională 675
C. AVRAM, R. FRIEDRICH, Cercetări teoretice şi experimentale privind grinzile pereţi din beton armat 687
GELU ONU, Calculul radierelor elastice pe coloane 701
N. TRUICĂ, Un model matematic al sistemului oscilant format de suspensia şi transmisia unui automobil aflat în regim de funcţionare tranzitoriu . . . 715
ANDREI RIPIANU, Consideraţii asupra calculului contragreutăţilor afectate arborilor cotiţi 731
GHEORGHE ZIDARU, Proprietăţi geometrice ale profilelor NACA 741
MIHAI TEODORESCU, Influenţa stării structurale şi a caracteristicilor mecanice ale oţelului OLC 45 asupra prelucrabilităţii prin aşchiere 747

NOTE

VOICU SAFTA, Contribuţii la cercetarea deformării plastice în condiţiile stării spaţiale de solicitare 755
MIRCEA PASCOVICI, Întinderea filmului continuu de lubrifiant între două suprafeţe inelare plane paralele în rotaţie 761

RECENZII 767

DETERMINAREA UNDEI DE ŞOC GENERATE PRINTR-O INJECŢIE VECTORIALĂ ÎNTR-O CURGERE SUPERSONICĂ

de H. DUMITRESCU; V. DRĂGOI
I.M.F.C.A., Bucureşti

În lucrare se propune o metodă de calcul a cîmpului de curgere supersonic, rezultat din interacţiunea dintre o pînză de pulverizare injectată vectorial într-un curent supersonic, determinîndu-se şi unda de şoc generată. Avînd la bază ecuaţiile parametrizate ale pînzei de injecţie, asimilată ca o linie de jet, determinate în lucrarea [1], se determină în continuare forma undei de şoc, generată de interacţiunea dintre pînza de pulverizare şi curentul supersonic în care se realizează injecţia.

1. INTRODUCERE

Obţinerea de performanţe ridicate pentru motoarele statoreactoare cu combustie supersonică a fost şi rămîne în continuare în centrul atenţei cercetătorilor din acest domeniu. În lucrarea [6] se arată că utilizarea unor flăcări de difuzie în combustia supersonică este mai avantajoasă decît arderile cu detonaţie, datorită pierderilor de presiune totală mai mici.

În procesul de ardere difuzivă, combustibilul este injectat direct în curentul de aer supersonic, amestecîndu-se rapid cu acesta. Dacă temperatura şi presiunea amestecului sînt suficient de ridicate, aprinderea se produce spontan şi timpul de combustie este foarte scurt. Acest tip de combustie supersonică, dirijată prin procesul de amestec, poate fi utilizat pentru un domeniu larg de numere Mach fără a modifica geometria motorului şi pare a fi cel mai avantajos pentru motorul statoreactor. Astfel, au fost întreprinse studii extensive asupra combustiei supersonice care utilizează flăcări difuzive, dar rămîn în continuare multe probleme care trebuie rezolvate. Una din aceste probleme se referă la modul în care este injectat combustibilul pentru a obţine o distribuţie uniformă a acestuia în camera de combustie fără a avea o pierdere de presiune totală prea mare şi perturbaţii ale curgerii.

Recent, cîmpul curgerii produs de injecţia transversală a devenit obiectul studiilor orientate spre statoreactoare. Practic, în camera de combustie a statoreactorului, structura jetului de combustibil în apropierea deschiderii de injecţie determină penetraţia jetului, şi amestecul turbulent al combustibilului injectat cu curentul de aer supersonic controlează combustia supersonică. Astfel, în tratarea teoretică întreprinsă în această lucrare, s-a urmărit determinarea penetraţiei jetului considerat ca o

pînză infinit subțire de fluid perfect cu debit finit și a undei de șoc, în ipoteza că injecția se face sub un unghi α, care nu depășește valoarea critică, corespunzătoare numărului M_∞, caz, în care unda de șoc OS rămîne atașată în punctul O (fig. 1), iar curentul de gaz rămîne supersonic în aval.

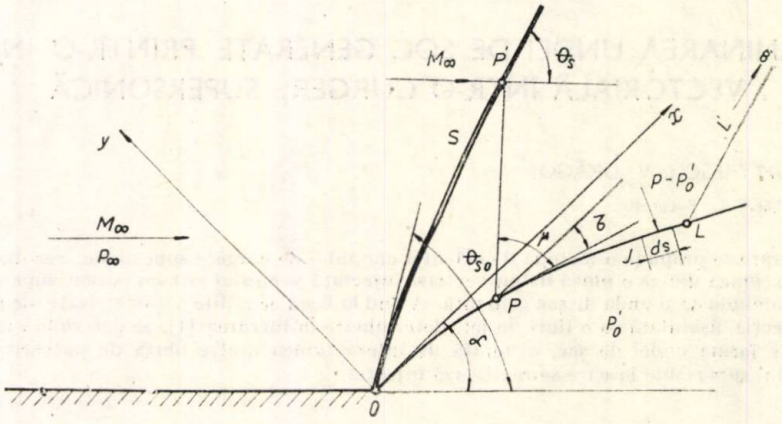


Fig. 1

Forma undei de șoc indusă direct în curgerea principală determină mărimea și caracterul regiunii de interacțiune pentru aplicațiile legate de controlul exterior al rachetelor, iar în cazul injecției combustibilului ea determină pierderea totală de presiune care însoțește procesul de injecție.

2. DETERMINAREA FORMEI PÎNZEI DE JET

În lucrarea de față ne propunem să studiem interacțiunea dintre un jet și un curent principal cauzată de injecția transversală a unui gaz combustibil într-un curent de aer supersonic rece, adică fără combustie. Vom considera deci, o curgere supersonică plană M_∞ (fig. 1); din punctul O, care este urma în planul mișcării a fantei de injecție, țîșnește, sub unghiul α față de curentul principal, pînza de jet a cărei urmă plană este OJ. În avalul pînzei de jet aerul este în repaus la presiunea p'_0. În punctul O se formează o undă de șoc OS, considerată atașată în acest punct, iar presiunea p'_0 o presupunem mai mică decît presiunea p_0 imediat după unda de șoc în punctul O, adică

$$p'_0 < p_0. \tag{1}$$

În această ipoteză, după compresiunea prin șoc de la p_∞ la p_0, care are loc în punctul O, urmează o destindere continuă pînă la p'_0, curba jetului fiind astfel îndreptată către aerul în repaus.

În aceste condiții raportul p'_0/p_∞, dintre presiunea p'_0 a aerului în repaus și presiunea p_∞ a curentului neperturbat poate fi supraunitar sau subunitar. În cazul cînd raportul este supraunitar ($p'_0 > p_\infty$), valoarea sa este totuși limitată, în mod implicit, prin condiția (1), deoarece între p_∞ și p_0 există o relație determinată de condițiile trecerii gazului prin unda de

şoc. În realitate, în cazul raportului p_0'/p_∞ subunitar, destinderea se face numai pînă la presiunea p_∞, după care pînza de jet se distorsionează brusc.

Fie ρ_j, v_j, q_j densitatea, viteza şi debitul gazului combustibil care formează pînza de jet, vom presupune că mărimea

$$I = \rho_j v_j q_j \tag{2}$$

este constantă pînă la infinit aval, în lungul pînzei de jet, ipoteză care corespunde realităţii cel puţin în apropierea punctului de injecţie O.

Prin aplicarea teoremei impulsului pentru un element al liniei de jet, se găseşte următoarea condiţie la limită:

$$p - p_0' = -I\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, \tag{3}$$

în care p este presiunea curentului de aer supersonic şi τ unghiul de deviaţie. Pentru simplitatea calculelor se utilizează un sistem de axe de coordonate rotit cu unghiul α, astfel că axa absciselor este tangentă la linia de jet în punctul O; avînd $\tau_0 = 0$, iar în oricare alt punct al liniei de jet τ va fi negativ.

Pentru determinarea formei liniei de jet, se utilizează formula coeficientului de presiune în funcţie de deviaţie:

$$C_{p_e} = \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)\frac{2}{\gamma M_0^2} = \frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_0^4}{M_0^2-1}\sin^2\tau}\cdot\sin\tau + \\ + \frac{\gamma+1}{2}\frac{M_0^2}{M_0^2-1}\sin^2\tau \tag{4}$$

luînd ca valori de referinţă numărul Mach M_0 şi presiunea p_0 a curentului imediat după unda de şoc în punctul O, calculate cu ajutorul relaţiilor cunoscute din teoria undelor de şoc [2], [5]:

$$M_0^2 = M_\infty^2 \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2 C_p^{(0)} - C_p^{(0)}\left(1 + \frac{\gamma}{4}M_\infty^2 C_p^{(0)}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}M_\infty^2 C_p^{(0)}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{4}M_\infty^2 C_p^{(0)}\right)}, \tag{5}$$

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{2}{\gamma M_\infty^2} C_p^{(0)}, \tag{6}$$

$$C_p^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\sqrt{+1\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2-1}\sin^2\alpha}\sin\alpha + \\ + \frac{\gamma+1}{2}\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2-1}\sin^2\alpha, \tag{7}$$

unde γ este raportul căldurilor specifice.

Formula (4) este valabilă atît pentru compresiune ($\tau > 0$), cît şi pentru expansiune ($\tau < 0$), pe un larg interval de deviaţie şi numere Mach [2] fiind în perfect acord şi cu metoda caracteristicilor.

Folosind expresia coeficientului de presiune, condiţia la limită (3) poate fi scrisă sub forma

$$C_{p_e} - C'_p = -\frac{2}{\gamma M_0^2}\,\frac{I}{p_0}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, \tag{8}$$

unde $C'_p = \dfrac{2}{\gamma M_0^2}\left(\dfrac{p'_0}{p_0} - 1\right)$ este coeficientul de presiune corespunzător aerului în repaus la presiune p'_p.

Deoarece pe linia jetului putem scrie :

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cdot\cos\tau, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cdot\sin\tau, \tag{9}$$

deducem

$$\mathrm{d}x = -\frac{2}{\gamma M_0^2}\cdot\frac{I}{p_0}\,\frac{\cos\tau\cdot\mathrm{d}\tau}{C_{p_e} - C'_p}, \tag{9a}$$

$$\mathrm{d}y = -\frac{2}{\gamma M_0^2}\cdot\frac{I}{p_0}\,\frac{\sin\tau\cdot\mathrm{d}\tau}{C_{p_e} - C'_p}. \tag{9b}$$

Prin integrarea ecuaţiilor (9), în care vom face mai întîi următoarea schimbare de variabilă

$$\frac{\gamma+1}{4}\,\frac{M_0^2}{\sqrt{M_0^2-1}}\sin\tau = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right), \tag{10}$$

şi apoi cu notaţiile

$$\beta^2 = 1 + \frac{\gamma+1}{4}\,M_0^2 C'_p, \tag{11}$$

$$n^2 = 1 + 2\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\frac{M_0^4}{M_0^2 - 1}, \tag{12}$$

se obţin ecuaţiile parametrice ale liniei jetului :

$$x = \frac{I\sqrt{M_0^2-1}}{\gamma M_0^2 p_0}\int_1^{\zeta}\frac{\zeta'^2+1}{\zeta'^2(\beta^2-\zeta'^2)}\,\mathrm{d}\zeta', \tag{13a}$$

$$y = \frac{I\sqrt{M_0^2-1}}{\gamma M_0^2 p_0}\int_1^{\zeta}\frac{\zeta'^4-1}{\zeta'^2(\beta^2-\zeta'^2)\sqrt{-\zeta'^4+2n^2\zeta'^2-1}}\,\mathrm{d}\zeta'. \tag{13b}$$

Integralele din expresiile (13) se vor efectua începînd din punctul O, unde $\tau_0 = 0$, sau $\zeta = 1$ conform relaţiei (10) fie numeric, aşa cum am

procedat în lucrarea de față, fie analitic, ca în lucrarea [1], în care se dă o metodă analitică aproximativă, pentru calculul integralei eliptice din ecuația (13b).

Parametrul β dat de relația (11), depinde de presiunea p_0' corespunzătoare aerului în repaus, valorile lui fiind cuprinse între

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma} \leqslant \beta^2 < 1, \tag{14}$$

care corespund cazurile limită : $p_0' = 0$, respectiv $p_0' - p_0$ pentru care s-a considerat problema.

3. STABILIREA CURBEI UNDEI DE ȘOC

Acum vom considera o linie de jet oarecare, ale cărei ecuații parametrice le-am dedus mai sus și vom presupune că aceasta generează în amonte o configurație ca și un profil solid cu aceeași formă (modelul curgerii în jurul unui corp solid echivalent).

După comprimarea la intrarea prin unda de șoc OS, curentul suferă o expansiune, astfel încît într-un punct P de pe linia jetului (fig. 1), viteza este W, iar numărul Mach M. Pe o linie caracterisrică PP', făcînd cu tangenta la linia de jet unghiul μ (sau $\sin \mu = 1/M$), parametrii curentului rămîn neschimbați.

Atunci curgerea în amonte de linia jetului va fi determinată dacă vom reuși să scriem ecuațiile liniilor caracteristice, precum și ale undei de șoc OS.

În continuare, calculul implică următoarele etape :

a) Determinarea parametrilor curgerii imediat după unda de șoc în punctul O de pe linia jetului, cu ajutorul relațiilor din teoria undelor de șoc [5] :

$$M_0^2 \sin^2(\theta_{s0} - \alpha) = \frac{4 + (\gamma - 1) M_\infty^2 C_p^{(0)}}{2(2 + \gamma M_\infty^2 C_p^{(0)})}, \tag{15}$$

unde avem, tot din aceeași teorie,

$$\sin^2 \theta_{s0} = \frac{1}{M_\infty} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{4} M_\infty^2 C_p^{(0)} \right) \tag{16}$$

și $C_p^{(0)}$ dat de relația (7).

b) Determinarea numărului Mach, M, într-un punct oarecare pe linia de jet se face calculînd mai întîi coeficientul de presiune C_{p_e} în urma expansiunii curentului cu unghiul τ, plecînd de la numărul Mach M_0, cu ajutorul relației (4).

Se poate calcula acum coeficientul de presiune în punctul P, raportat la M_∞,

$$C_p - C_p^{(0)} + \left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma}{2} C_p^{(0)} \right) M_0^2 C_{p_e} \tag{17}$$

şi numărul Mach M al curentului în acelaşi punct,

$$M^2 = \left(\frac{2}{\gamma-1} + M_0^2\right)\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_0^2 C_{p_e}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{2}{\gamma-1}. \tag{18}$$

Cu aceste date putem trece acum la construirea curbei undei de şoc utilizînd metoda dată în lucrarea [3] pentru curgerea în jurul profilelor aerodinamice.

Fie X_f şi Y_f (fig. 1) coordonatele unui punct P de pe linia jetului, şi X_s şi Y_s coordonatele punctului P', în care caracteristica dusă din punctul P intersectează unda de şoc. Ecuaţia undei de şoc va rezulta atunci din condiţia ca, după saltul în punctul P', corespunzător unghiului θ_s, curgerea M_∞ să realizeze parametrii din punctul P de pe linia jetului, adică trebuie să fie satisfăcute relaţiile :

$$Y_s - Y_f = (X_s - X_f)\,\mathrm{tg}(\mu + \tau), \tag{19a}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y_s}{\mathrm{d}X_s} = \mathrm{tg}(\theta - \alpha), \tag{19b}$$

$$\sin^2\theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma+1}{4} C_p = \sin^2\theta_{s0} +$$

$$+ \frac{\gamma+1}{4}\left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma}{2} C_p^{(0)}\right) M_0^2 C_{p_e}. \tag{19c}$$

Relaţia (19a) reprezintă ecuaţia caracteristicii PP', relaţia (19b) este ecuaţia de definiţie a pantei undei de şoc, iar relaţia (19c) exprimă legătura între unghiul undei de şoc şi coeficientul de presiune C_p după salt, a cărei valoare este dată de (17).

De îndată ce s-a găsit conturul liniei de jet, pentru numărul Mach M_∞ şi unghiul de injecţie α date, se poate determina ecuaţia undei de şoc.

Fie $X_f = X_f(\zeta)$ şi $Y_f = Y_f(\zeta)$ ecuaţiile parametrice ale liniei de jet. Pentru orice ζ putem găsi atunci coordonatele X_f, Y_f, valoarea deviaţiei τ şi apoi valorile parametrilor C_{p_e} (relaţia 4), μ (relaţia 18, $\mathrm{ctg}^2\mu = M^2-1$) şi θ_s (relaţia 19c); din ecuaţiile (19a) şi (19b) rezultă apoi valorile coordonatelor X_s şi Y_s ale punctului P' de pe unda de şoc.

Eliminînd Y_s din ecuaţiile (19a) şi (19b), se obţine

$$X_s \mathrm{tg}(\mu + \tau) - \int_0^{X_f} \frac{\mathrm{d}X_s}{\mathrm{d}X_f} \mathrm{tg}(\theta_s - \alpha)\,\mathrm{d}X_f = X_f\,\mathrm{tg}(\mu + \zeta) - Y_f, \tag{20}$$

unde am ţinut seama că unda de şoc este ataşată în punctul O ($X_f = 0$, $Y_f = 0$, $X_s = 0$). Cunoscînd $X_s = X_s(X_f)$ dat de ecuaţia (20), Y_s se poate calcula direct din (19a). Prin urmare problema se reduce la găsirea lui X_s.

În acest scop vom observa că, linia de jet fiind de formă regulată, tangentă la axa absciselor, ecuaţia ei poate fi reprezentată printr-un polinom de grad oarecare g, adică putem scrie :

$$Y_j = \sum_{i=0}^{g} a_i X_j^i \qquad (a_0 = a_1 = 0); \tag{21}$$

În mod asemănător, putem reprezenta funcţiile $\mathrm{tg}(\theta_s - \alpha)$ şi $\mathrm{tg}(\mu + \tau)$ care intervin în ecuaţiile (19) şi (20) prin polinoamele de grade oarecare, h şi l

$$\mathrm{tg}(\mu + \tau) = \sum_{i=0}^{h} b_i X_j^i; \quad \mathrm{tg}(\theta_s - \alpha) = \sum_{i=0}^{l} c_i X_j. \tag{22}$$

Deoarece orice polinom poate fi considerat ca un polinom de grad mai mare, avînd însă o parte din coeficienţi nuli se poate lua întotdeauna în dezvoltările (21) şi (22),

$$g = h = l = k,$$

k fiind cel mai mare dintre numerele întregi g, h, l.

Coordonata X_s a unui punct de pe unda de şoc o vom reprezenta atunci prin seria de puteri

$$X_s = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_j^n, \tag{23}$$

în care s-a inclus condiţia de ataşare în punctul O ($A_0 = 0$). Coeficienţii A_n se determină din condiţia ca dezvoltarea (23) să verifice identic ecuaţia (20).

Introducînd expresiile (21), (22) şi (23) în ecuaţia (20) şi identificînd termenii în X_j^n se obţine

$$(b_0 - c_0)A_n = \sum_{i=1}^{k} \left[\left(1 - \frac{i}{n} \right) c_i - b_i \right] A_{n-i} + \sum_{i=0}^{k} (\delta_{i+1,n} b_i - \delta_{i,n} a_i)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{24}$$

în care $\delta_{i,n}$ este simbolul lui Kronecker

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = n, \\ 0 \text{ pentru } i \neq n, \end{cases}$$

iar $(k + 1)$ numărul de termeni ai polinoamelor (21) şi (22). La efectuarea sumelor după indicele i se are în vedere ca

$$A_{n-i} = 0 \text{ pentru } n - i \leqslant 0.$$

Coeficienţi A_n rezultă succesiv din sistemul (24). Pentru cazul $p_0'/p_\infty < 1$ este posibil ca pentru anumit punct L de pe linia de jet, panta caracteristicii să devină egală cu panta undei de şoc :

$$\mathrm{tg}(\theta_s - \alpha) = \mathrm{tg}(\mu + \tau), \quad (X_j = X_{jL}). \tag{25}$$

Unda de șoc și caracteristica din punctul L nu se mai intersectează (X_s, $Y_s \to \infty$ pentru $X_j = X_{jL}$), și prin urmare, dezvoltarea (23) este convergentă pentru $X_j < X_{jL}$.

Din punct de vedere fizic rezultă că, în punctul L de pe linia de jet curgerea a revenit la presiunea p_∞ în timp ce unda de șoc OS s-a transformat pe ultima porțiune într-o linie Mach, paralelă cu caracteristica din punctul L. Întrucît curgerea principală este dominantă în regiunea de interacțiune, rezultă că destinderea după unda de șoc se face numai pînă la presiunea p_∞, după care jetul se distorsionează, modelul pînzei de jet infinit subțire cu impuls constant nemaifiind corect.

Prin urmare, pentru $p = p_\infty$ ($C_p = 0$) din relațiile (17) și (19c) rezultă

$$M_0^2 C_{p_e} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{M_\infty^2 C_p^{(0)}}}; \quad \sin\theta_s = \frac{1}{M_\infty}; \quad X_j = X_{jL}. \tag{26}$$

Prima relație (26), împreună cu (4) ne permite acum să determinăm X_{jL}. Mai întîi se calculează

$$\sin(-\tau_L) = \frac{\sqrt{M_0^2 - 1}}{M_0^2 \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} + \frac{3\gamma - 1}{M_\infty^2 C_p} + \left(\frac{2}{M_\infty^2 C_p^{(0)}}\right)^2}}. \tag{27}$$

Apoi, cunoscînd deviația τ_L a curentului în punctul L, dată de (27), se deduce ușor X_{jL} folosind ζ_L dat de relația

$$\frac{dY_j}{dX_j} = \operatorname{tg}\tau_L = \frac{\zeta_L^2 - 1}{\sqrt{-\zeta_L^4 + 2n^2\zeta_L^2 - 1}}. \tag{28}$$

Totodată X_{jL} este raza de convergență a dezvoltării (23); în orice punct $X_j < X_{jL}$, această dezvoltare converge ca seria geometrică avînd rația $q = X_j/X_{jL}$[3].

În cazul raportului p_0'/p_∞ supraunitar există o limitare mai puternică, dezvoltarea (23) fiind convergentă pînă la $X_{jL1} < X_{jL}$, iar X_{jL1} corespunde punctului unde avem $p = p_0'$. Restricția care apare acum este de ordin fizic și este dată de faptul că destinderea se face numai pînă la presiunea p_0', după care structura jetului se modifică și ipoteza făcută inițial nu se mai respectă.

4. METODA PRACTICĂ DE CALCUL

Pentru aplicații în locul ecuațiilor parametrice (13) ale liniei de jet se va utiliza ecuația (21) limitată la primii cinci termeni:

$$Y_j = a_2 X_j^2 + a_3 X_j^3 + a_4 X_j^4 \quad (a_0 = a_1 = 0), \tag{29}$$

în care X_j şi Y_j sînt nişte coordonate adimensionale definite ca

$$X_j = \frac{\gamma M_0^2 p_0}{I\sqrt{M_0^2-1}}x, \quad Y_j = \frac{\gamma M_0^2 p_0}{I\sqrt{M_0^2-1}}y. \tag{30}$$

Această limitare se justifică mai ales ţinînd seama că în determinarea curbei undei de şoc intervine de fapt porţiunea anterioară a liniei de jet, care nu diferă mult nici de o parabolă de gradul al doilea. În mod asemănător, ţinînd cont că nici curba undei de şoc nu variază rapid, iar expansiunea curentului are loc pe un interval redus de deviaţie, putem folosi şi pentru funcţiile $\operatorname{tg}(\theta_s - \alpha)$ şi $\operatorname{tg}(\mu + \tau)$ dezvoltări în cinci termeni

$$\operatorname{tg}(\theta_s - \alpha) - c_0 = c_1 X_j + c_2 X_j^2 + c_3 X_j^3 + c_4 X_j^4; \quad (c_0 = \operatorname{tg}(\theta_{s0} - \alpha)), \tag{30 a}$$

$$\operatorname{tg}(\mu + \tau) - b_0 = b_1 X_j + b_2 X_j^2 + b_3 X_j^3 + b_4 X_j^4; \quad (b_0 = \operatorname{tg}\mu_0). \tag{30 b}$$

Fie $X_{ji} \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ abscisele a patru puncte de pe linia de jet, în care ecuaţia (29) şi (30) trebuie să fie verificate. Coeficienţii a_i, b_i, $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ rezultă imediat rezolvînd sistemele liniare respective de patru ecuaţii cu patru necunoscute.

Coeficienţii A_n rezultă apoi din (24) în care facem $k = 4$:

$$(b_0 - c_0)A_n = \sum_{i=1}^{4}\left[\left(1 - \frac{i}{n}\right)c_i - b_i\right]A_{n-i} + \sum_{i=0}^{4}(\delta_{i+1,n}b_i - \delta_{i,n}a_i) \tag{31}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Înmulţind relaţia (31) cu X_j^n şi făcînd suma $\sum_{n=1}^{\infty}$ rezultă

$$X_s \sum_{i=0}^{4}(b_i - c_i)X_j^i = \sum_{i=0}^{4} b_i X_j^{i+1} - Y_j - \sum_{n=1}^{6}\frac{c_1 A_n}{n+1}X_j^{n+1} - \tag{32}$$

$$- \sum_{n=1}^{4}\frac{2c_2 A_n}{n+2}X_j^{n+2} - \sum_{n=1}^{3}\frac{3c_3 A_n}{n+3}X_j^{n+3} - \frac{4}{5}c_4 A_1 X_j^5 + R(X_j),$$

în care pentru $X_s \leqslant X_{jL}$ adică practic pentru porţiunea care interesează a undei de şoc, am neglijat restul

$$R(X_j) = -\sum_{n=7}^{\infty}\left(\frac{c_1 X_j}{n+1} + \frac{2c_2}{n}\frac{A_{n-2}}{A_n} + \frac{3c_3}{n}\frac{A_{n-3}}{A_n} + \right. \tag{33}$$

$$\left. + \frac{4c_4}{X_j(n-1)}\cdot\frac{A_{n-5}}{A_n}\right)A_n X_j^n.$$

S-a găsit că atunci cînd X_s variază de la $X_s = 0$ la $X_s = X_{jL}$, corespunde unei variaţii $0 \leqslant X_j \leqslant 0{,}25\ X_{jL}$.

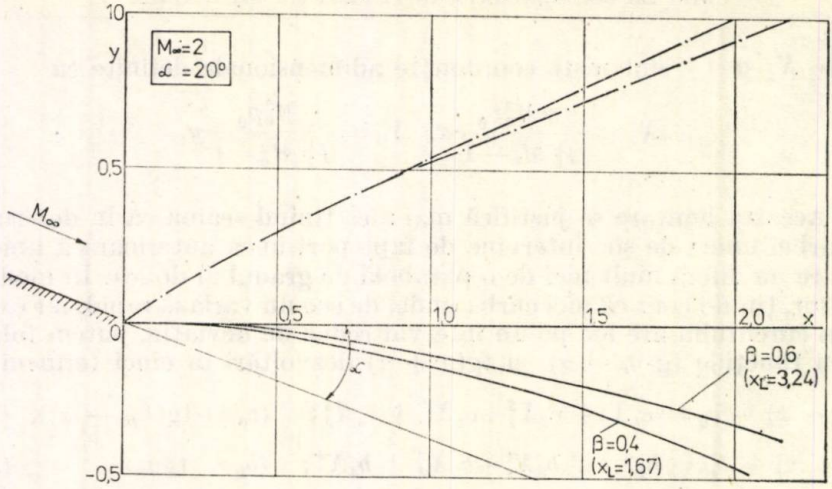


Fig. 2

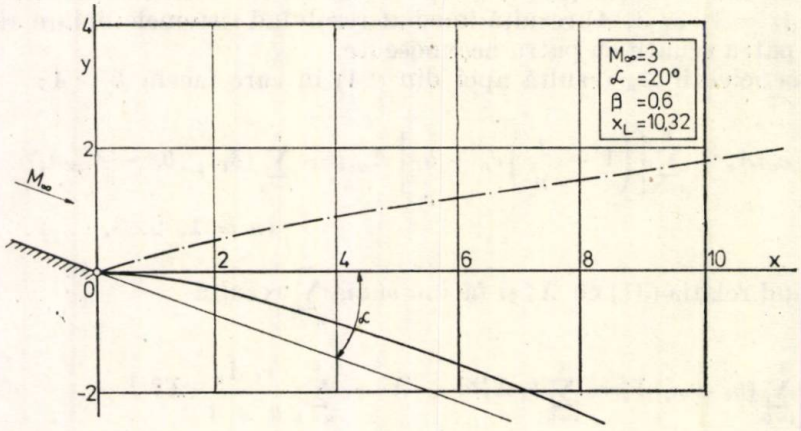


Fig. 3

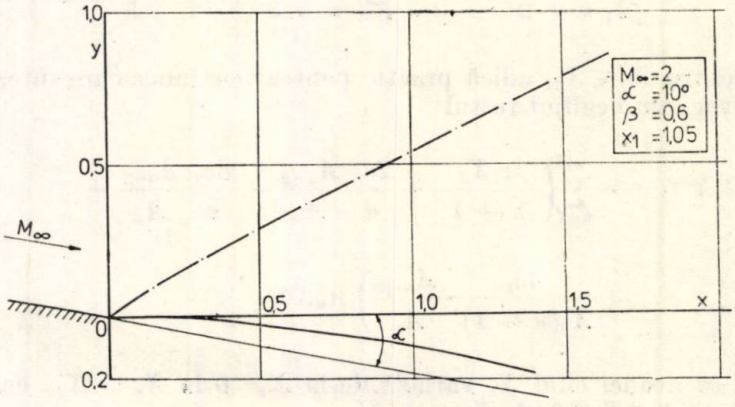


Fig. 4

În consecinţă, pentru determinarea coeficienţilor a_i, b_i, $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ care intră în expresiile (29) şi (30) pot fi alese punctele $X_{j1}=0{,}06$, $X_{j2} = 0{,}12$, $X_{j3} = 0{,}18$, $X_{j4} = 0{,}24$.

Cunoscînd X_s dat de (32) rezultă imediat Y_s din (19a)

$$Y_s = Y_j + (X_s - X_j) \sum_{i=0}^{4} b_i X_j^i. \tag{34}$$

Ecuaţiile (32) şi (34) reprezintă ecuaţiile parametrice ale undei de şoc.

Calculele au fost efectuate pentru un jet avînd $\beta = 0{,}4$ şi $0{,}6$, care ţîşneşte la incidenţele $\alpha = 10°$ şi $20°$ într-un curent cu $M_\infty = 2$ şi 3.

În diagramele din figurile 2, 3 şi 4 sînt date rezultatele în ceea ce priveşte pînza de jet şi forma undei de şoc. Se observă că unda de şoc este determinată de porţiunea anterioară a liniei de jet, pentru $X_s \geqslant X_{jL}$ unda de şoc devenind aproape o linie dreaptă.

În concluzie, putem spune că pe baza formulei (4) s-a dezvoltat o metodă simplă şi precisă pentru determinarea formei undei de şoc de interacţiune care însoţeşte injecţia gazoasă transversală într-o curgere supersonică.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, D. Pantazopol, *Devierea unui curent supersonic plan paralel cu ajutorul unei pînze de jet subţiri*, St. cerc. mec. apl. **22**, *4* (1966).
2. E. Carafoli, *On a unitary formula for compresion-expension in supersonic hypersonic flow*, Rev. Mec. Appl., **7**, *5* (1962).
3. E. Carafoli, C. Berbente, *Determinarea cîmpului de presiuni în mişcarea plană supersonică — hipersonică moderată*, St. cerc. mec. apl., **27**, *5* (1968).
4. J. Schetz, *Interaction shock shape for transverse injection in supersonic Flow*, J. Spacecraft, **7**, *2* (1970).
5. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*, Bucureşti, Edit. Acad., 1957.
6. A. Ferri, *Possible Directions of Future Rresearch in Air Breathing Engines*, AGARD Combustion and Propulsion Colloquium: Milan, Italy, April 1960, Pergamon Press London, 1960.

CALCULUL STRUCTURILOR NELINIAR ELASTICE

de VALERIU BĂNUȚ

Institutul de construcții București

În lucrare se prezintă calculul de ordinul I și II al structurilor cu comportare neliniar elastică, forma relației $\sigma - \varepsilon$ fiind de forma funcției Ramberg-Osgood. În acest sens este analizată forma matricei de rigiditate a elementelor de bară cu diferite tipuri de legături la capete. De asemenea, se prezintă rezultatele obținute cu ajutorul a două programe de calcul special întocmite.

1. INTRODUCERE

Fenomenul deformării structurilor sub acțiunea încărcărilor exterioare este un fenomen complex. Relațiile dintre diferitele elemente ce determină sau caracterizează poziția de echilibru a structurii sînt relații neliniare. În consecință, exprimarea matematică a fenomenului real este, dacă nu imposibilă, cel puțin de o mare dificultate.

Adoptarea unor ipoteze simplificatoare referitoare la relațiile efort unitar—deformație specifică, deformația specifică—deplasare și forță —deplasare conduce la modele matematice diferite pentru fenomenul deformării structurii și, inevitabil, la diferite răspunsuri ale structurii la acțiunile exterioare.

Forma cea mai simplă a acestor relații este forma liniară. Modelul liniar al fenomenului real a condus la rezultate satisfăcătoare pentru practica curentă, într-o gamă largă de probleme. Totuși, calculul liniar nu poate reprezenta unele fenomene sau nu conduce la soluții corecte, cum este cazul problemei pierderii stabilității, cazul structurilor cu deplasări mari, cazul materialelor cu comportare neliniar elastică accentuată etc.

Cerințele practice actuale necesită adoptarea unor structuri de rezistență din ce în ce mai complexe sau realizarea unor structuri de mare serie la un preț de cost cît mai scăzut. Asigurarea condițiilor de rezistență și stabilitate concomitent cu condiția de economicitate impune o analiză mult mai riguroasă a structurilor de rezistență, prin luarea în considerație a efectelor neliniarității.

În calculul structurilor de rezistență, aria problemelor neliniare este determinată de două surse de neliniaritate :

— neliniaritatea geometrică, datorită schimbărilor în geometria structurii prin trecerea din poziția inițială în poziția deformată,

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 5, 1977, P. 635 – 646

— neliniaritatea fizică, datorită proprietăților fizice-mecanice ale materialelor.

În realitate, cele două forme de neliniaritate coexistă.

2. NELINIARITATE GEOMETRICĂ

Ipotezele simplificatoare specifice calculului geometric neliniar sînt următoarele :

— materialul se comportă liniar elastic (fig. 1*a*)

— relația forță—deplasare este o relație neliniară (fig. 1*b*)

— relația deformație specifică—deplasare este o relație neliniară. În cazul unei bare cu continuitate perfectă, la capete această relație are forma :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 - y\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \tag{1}$$

— ecuațiile de echilibru static se raportează la forma deformată a structurii, care, nefiind cunoscută inițial, determinarea soluției se face printr-o succesiune de cicluri de calcul utilizînd metode iterative sau metoda pas cu pas.

Problemele care se înscriu în această categorie de neliniaritate sînt calculul de ordinul II și de stabilitate, și calculul structurilor cu

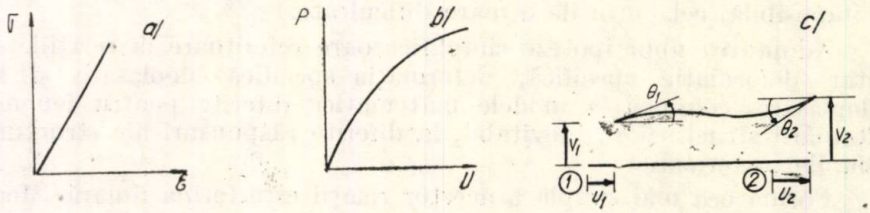


Fig. 1

deplasări mari. Calculul de ordinul II și de stabilitate este specific structurilor cu deplasări și deformații mici, $\Psi = \frac{v}{l}$. În cazul structurilor cu deplasări mari trebuie să se țină seama de variația lungimii elementelor, adică

$$\Psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{l_1}\,;\quad \Delta l = \sqrt{(l+u)^2 + v^2} - l, \tag{2}$$

unde $l_1 = l + \Delta l$, $u = u_2 - u_1$ și $v = v_2 - v_1$ (fig. 1*c*).

Relația forță—deplasare are forma :

— $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}_e\boldsymbol{u}$ pentru element, (3a)

— $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}_s\boldsymbol{U}$ pentru structură, (3b)

iar relația dintre variația forțelor și variația deplasărilor este :

$$- \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}_t \mathrm{d}\boldsymbol{u} \quad \text{pentru elemente,} \tag{4a}$$

$$- \mathrm{d}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}_t \mathrm{d}\boldsymbol{U} \quad \text{pentru structură,} \tag{4b}$$

unde $\boldsymbol{k}_s$ și $\boldsymbol{K}_s$ reprezintă matricea de rigiditate secantă, iar $\boldsymbol{k}_t$ și $\boldsymbol{K}_t$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă sau de rigiditate instantanee. Elementele ambelor matrice sînt funcții de deplasările nodurilor [2], ceea ce înseamnă că structura și elementele componente își modifică rigiditatea în timpul deformării în sensul că aceasta scade pe măsură ce forțele exterioare cresc. De remarcat că relațiile (4) sînt exacte pentru variații infinitesimale ale forțelor. Pentru variații finite relația este aproximativă, uzual căpătînd forma

$$\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}_t \cdot \Delta\boldsymbol{u} \tag{5a}$$

și

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}_t \cdot \Delta\boldsymbol{U}, \tag{5b}$$

gradul de aproximație fiind dat de mărimea pasului de variație a forțelor exterioare $\Delta\boldsymbol{P}$.

3. NELINIARITATE FIZICĂ

Ipotezele simplificatoare în acest tip de calcul sînt :
— materialul se comportă neliniar elastic (fig. 2),
— relația forță—deplasare este o relație neliniară (fig. 2).

În cadrul acestei lucrări se admite că materialul rămîne în domeniul elastic de comportare, iar structura reprezintă un sistem conservativ — încărcarea și descărcarea avînd loc după aceeași curbă.

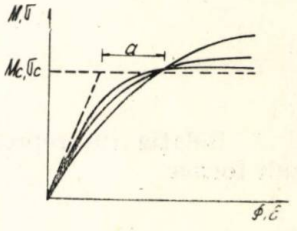


Fig. 2

Considerînd că ecuațiile de echilibru static se raportează la poziția inițială, se obține calculul de ordinul I neliniar elastic. Dacă ecuațiile se exprimă în raport cu poziția deformată a structurii, atunci calculul este de ordinul II neliniar elastic. Aceste două tipuri de calcul vor fi analizate în continuare.

Relația efort unitar—deformație specifică și relația moment—curbură sînt relații de tip Ramberg-Osgood și anume :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 + a\left|\frac{\sigma}{\sigma_c}\right|^{r-1}\right), \tag{6}$$

$$\Phi = \frac{M}{EI}\left(1 + a\left|\frac{M}{M_c}\right|^{r-1}\right), \tag{7}$$

unde a, r și σ_c respectiv a, r și M_c sînt trei parametri care definesc relația considerată (fig. 2).

În expresiile (6) și (7) σ_c și M_c reprezintă efortul unitar și momentul de comparație care pot fi, de exemplu, efortul unitar de curgere și momentul plastic.

3.1. CALCULUL DE ORDINUL NELINIAR ELASTIC

Majoritatea lucrărilor existente în domeniul calculului neliniar elastic se ocupă cu calculul de ordinul I. Dintre acestea este de remarcat și o interesantă contribuție românească [10].

Problemele esențiale în calcul de ordinul I sînt determinarea matricei de rigiditate și determinarea soluției problemei.

În calculul fizic neliniar matricea de rigiditate a elementului de bară se obține prin inversarea matricei de flexibilitate, iar soluția problemei se obține prin metoda pas cu pas. Precizia calculului este cu atît mai mare cu cît pașii de variație a forțelor sînt mai mici.

3.1.1. Matricea de flexibilitate și matricea de rigiditate a elementului de bară

Fie bara din figura 3 și sistemul de coordonate atașat acesteia.

Se consideră bara încărcată numai cu forța axială N. Variația lungimii barei sub acțiunea acestui efort este

$$u = \int_0^l \varepsilon_x \mathrm{d}x, \tag{8}$$

de unde, ținînd seama de (6) și înlocuind $\sigma = N/A$, după integrare se obține

$$u = \frac{Nl}{EA}\left(1 + a\left|\frac{N}{N_c}\right|^{r-1}\right). \tag{9}$$

Relația (9) reprezintă relația deformație—efort care se poate scrie sub forma

$$u = \frac{lN}{EA} H_5, \tag{10}$$

unde $H_5 = 1 + a\left|\frac{N}{N_c}\right|^{r-1}$ reprezintă funcția de corecție a rezultatului din calculul liniar elastic. Cu N_c s-a notat efortul axial de comparație.

Fie acum bara încărcată cu momentele încovoietoare M_1 și M_2. Rotirea și săgeata în secțiunea curentă, produse de cele două momente încovoiteoare aplicate simultan, se determină cu relațiile

$$\varphi_x = -\int_0^l \Phi_x \mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$v_x = \int_0^l \varphi_x \mathrm{d}x. \tag{12}$$

Momentul încovoietor în secţiunea curentă fiind

$$M_x = M_1 - T \cdot x = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} x, \tag{13}$$

din (11) şi (12), după integrare, se obţine

$$EI\,\varphi_x = -M_1 x + \frac{Tx^2}{2} + \frac{aM_x^2}{(r+1)T} \left| \frac{M_x}{M_c} \right|^{r-1} + C_1 \tag{14}$$

şi

$$EIv_x = -\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{Tx^3}{6} - \frac{aM_x^3}{(r+1)(r+2)T} \left| \frac{M_x}{M_c} \right|^{r-1} + C_1 x + C_2. \tag{15}$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile de capăt :

— pentru $x = 0$, $v_x = 0$ şi

$$C_2 = \frac{aM_1^3}{(r+1)(r+2)T^2} \left| \frac{M_1}{M_c} \right|^{r-1}, \tag{16a}$$

— pentru $x = l$, $v_x = 0$ şi

$$C_1 = \frac{l}{3} M_1 - \frac{l}{6} M_2 - \frac{al}{(r+1)(r+2)(M_1+M_2)^2} \times \left(M_1^3 \left| \frac{M_1}{M_c} \right|^{r-1} + M_2^3 \left| \frac{M_2}{M_c} \right|^{r-1} \right). \tag{16b}$$

Cunoscînd valorile constantelor C_1 şi C_2, se poate determina rotirea şi săgeata în secţiunea curentă (φ_x şi v_x).

Pentru $x = 0$ rezultă $\varphi_x = \varphi_1$, iar pentru $x = l$ rezultă $\varphi_x = \varphi_2$, rotirile φ_1 şi φ_2 avînd expresiile :

$$\varphi_1 = \frac{l}{6EI} (H_1 M_1 - H_2 M_2), \tag{17}$$

$$\varphi_2 = \frac{l}{6EI} (-H_3 M_1 + H_4 M_2), \tag{18}$$

unde s-au introdus notaţiile :

$$\begin{aligned} H_1 &= 2 + X_1 - Y_1; & H_2 &= 1 + Y_2, \\ H_3 &= 1 + X_1; & H_4 &= 2 + X_2 - Y_2, \\ X_1 &= \frac{6a}{(r+1)(1+M_2/M_1)} \left| \frac{M_1}{M_c} \right|^{r-1}, \\ Y_1 &= \frac{X_1}{(r+2)(1+M_2/M_1)} \end{aligned} \tag{19}$$

şi X_2, Y_2 pentru cazul în care M_1 se schimbă cu M_2.

Relațiile (17) și (18), reprezintă, de asemenea, relația deformație—efort, pentru cazul încărcării cu momentele încovoietoare de capăt.

Notînd $q^T = \{\varphi_1 \varphi_2 u\}$ și $Q^T = \{M_1 M_2 N\}$, relațiile (10), (17) și (18) se pot scrie sub următoarea formă matriceală dezvoltată :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{lH_1}{6EI} & -\frac{lH_2}{6EI} & 0 \\ -\frac{lH_3}{6EI} & \frac{lH_4}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{lH_5}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{bmatrix} \tag{20}$$

sau în formă simbolică

$$q = f_s Q, \tag{21}$$

unde f_s reprezintă matricea de flexibilitate secantă.

Diferențiind relația (21) în raport cu M_1, M_2 și N se obține relația dintre variația deformațiilor și variația eforturilor

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\varphi_1 \\ \mathrm{d}\varphi_2 \\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{lR_1}{6EI} & -\frac{lR_3}{6EI} & 0 \\ -\frac{lR_3}{6EI} & \frac{lR_2}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{lR_4}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}M_1 \\ \mathrm{d}M_2 \\ \mathrm{d}N \end{bmatrix}, \tag{22}$$

care simbolic se scrie

$$\mathrm{d}q = f_t \mathrm{d}Q, \tag{23}$$

unde f_t reprezintă matricea de flexibilitate tangentă sau de flexibilitate instantanee.

În relația (22) s-au introdus următoarele notații :

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 + A_1 - 2B_1 + 2D_1 + 2D_2, \\ R_2 &= 2 + A_2 - 2B_2 + 2D_2 + 2D_1, \\ R_3 &= 1 + B_1 + B_2 - 2D_1 - 2D_2, \\ R_4 &= 1 + ar \left| \frac{N}{N_c} \right|^{r-1}, \\ A_1 &= \frac{6a}{1 + M_2/M_1)} \left| \frac{M_1}{M_c} \right|^{r-1}, \\ B_1 &= \frac{6a}{(r+1)(1 + M_2/M_1)^2} \left| \frac{M_1}{M_c} \right|^{r-1}, \\ D_1 &= \frac{6a}{(r+1)(r+2)(1 + M_2/M_1)^3} \left| \frac{M_1}{M_c} \right|^{r-1} \end{aligned} \tag{24}$$

și A_2, B_2, D_2 pentru cazul în care M_1 se schimbă cu M_2.

Matricea de rigiditate a barei se obține prin inversarea matricei de flexibilitate :

— matricea de rigiditate secantă are forma :

$$\boldsymbol{k}_{ds} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l}\cdot\frac{H_4}{H} & \frac{6EI}{l}\cdot\frac{H_3}{H} & 0 \\ \frac{6EI}{l}\cdot\frac{H_2}{H} & \frac{6EI}{l}\cdot\frac{H_1}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{lH_5} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

unde $H = H_1 \cdot H_4 - H_2 \cdot H_3$,

— matricea de rigiditate tangentă are forma

$$\boldsymbol{k}_{dt} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l}\cdot\frac{R_2}{R} & \frac{6EI}{l}\cdot\frac{R_3}{R} & 0 \\ \frac{6EI}{l}\cdot\frac{R_3}{R} & \frac{6EI}{l}\cdot\frac{R_1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{lR_4} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

unde $R = R_1 \cdot R_2 - R_3^2$.

Relațiile efort—deformație și relația variația eforturilor—variația deformațiilor au forma (27) și, respectiv (28)

$$Q = k_{ds} \cdot q, \tag{27}$$

$$\mathrm{d}Q = k_{dt} \cdot \mathrm{d}q. \tag{28}$$

Matricea de rigiditate secantă nu este simetrică, din care cauză în calcul se utilizează cu precădere matricea de rigiditate tangentă.

Trecerea de la sistemul de coordonate din figura 3 la sistemul de coordonate din figura 1*c* (coordonate deplasări) se face cu relația de forma generală

$$\boldsymbol{k} = T^T k_d T \tag{29}$$

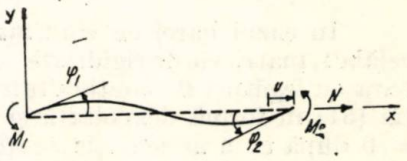


Fig. 3

T fiind matricea de transformare a deplasărilor în deformații [2], iar k_d fiind matricea de rigiditate secantă sau matricea de rigiditate tangentă.

Aplicînd relația (29) matricei (26) rezultă matricea de rigiditate tangentă pentru bara cu legături de continuitate perfectă la capete (30), în coordonatele din figura 1*c*. În expresiile elementelor matricei (30) s-a notat $R_5 = R_1 + R_2 + 2R_3$,

$$k_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 & -\frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3}\cdot\frac{R_5}{2R} & \frac{6EI}{l^2}\cdot\frac{R_2+R_3}{R} & 0 & -\frac{12EI}{l^3}\cdot\frac{R_5}{2R} & \frac{6EI}{l^2}\cdot\frac{R_1+R_3}{R} \\ & & \frac{4EI}{l}\cdot\frac{3R_2}{2R} & 0 & -\frac{6EI}{l^2}\cdot\frac{R_2+R_3}{R} & \frac{2EI}{l}\cdot\frac{3R_3}{R} \\ & & & \frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{l^3}\cdot\frac{R_5}{2R} & -\frac{6EI}{l^2}\cdot\frac{R_1+R_3}{R} \\ & \text{Simetrică} & & & & \frac{4EI}{l}\cdot\frac{3R_1}{2R} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Relația dintre variația eforturilor și variația deplasărilor are forma

$$\mathrm{d}S = k_t \cdot \mathrm{d}u, \tag{31}$$

unde

$$\mathrm{d}u^T = \{\mathrm{d}u_1 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}\theta_2\} \quad \text{și}$$

$$\mathrm{d}S^T = \{\mathrm{d}N_1 \mathrm{d}T_1 \mathrm{d}M_1 \mathrm{d}N_2 \mathrm{d}T_2 \mathrm{d}M_2\}. \tag{32}$$

În cazul barei cu continuitate perfectă la un capăt și articulată la celălalt, matricele de rigiditate se pot determina fie pe aceeași cale ca pentru bara cu legături de continuitate perfectă la capete, fie pornind de la relația (31) în formă dezvoltată și introducînd condiția $\mathrm{d}M_1 = 0$ sau $\mathrm{d}M_2 = 0$ după cum articulația se află în capătul 1 sau 2 al barei. Din aceste condiții se obțin rotirile $\mathrm{d}\theta_1$ și $\mathrm{d}\theta_2$ care se înlocuiesc în expresiile celorlalte eforturi.

Matricea de rigiditate tangentă pentru bara articulată în capătul 2 are forma (33), iar pentru bara articulată în capătul 1 are forma (34),

unde s-au introdus notaţiile

$$R_6 = 1 + \frac{3ar}{r+2}\left|\frac{M_1}{M_c}\right|^{r-1}, \tag{35}$$

$$R_7 = 1 + \frac{3ar}{r+2}\left|\frac{M_2}{M_c}\right|^{r-1}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{k}_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 & -\frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 \\ & \frac{3EI}{l^3R_6} & \frac{3EI}{l^2R_6} & 0 & -\frac{3EI}{l^3R_6} & 0 \\ & & \frac{3EI}{lR_6} & 0 & -\frac{3EI}{l^2R_6} & 0 \\ & & & \frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3EI}{l^3R_6} & 0 \\ & \text{Simetrică} & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{k}_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 & -\frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 \\ & \frac{3EI}{l^3R_7} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3R_7} & \frac{3EI}{l^2R_7} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{EA}{lR_4} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3EI}{l^3R_7} & -\frac{3EI}{l^2R_7} \\ & \text{Simetrică} & & & & \frac{3EI}{lR_7} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

3.1.2. Exemplu de calcul

Calculul de ordinul I al structurilor la care se consideră neliniaritatea fizică se efectuează prin metoda pas cu pas, utilizînd relația $\Delta P = K_t \Delta U$, deoarece matricea de rigiditate tangentă este simetrică, fapt care aduce avantajele cunoscute în utilizarea memoriei calculatorului.

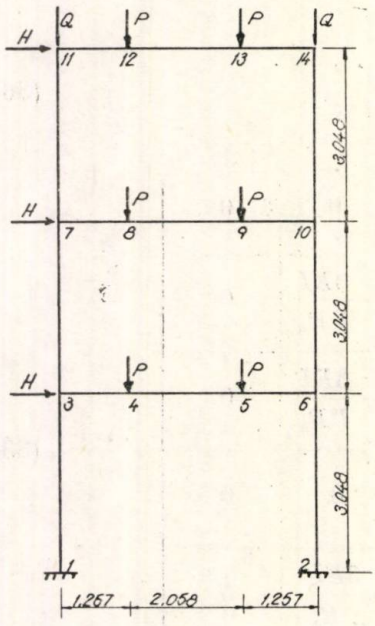


Fig. 4

Ca exemplu de calcul a fost adoptată structura din figura 4, structură studiată teoretic și experimental la Fritz Engineering Laboratory [12].

Stîlpii sînt formați din profile 5M18.9 avînd $M_c = 4{,}62$ tm și $N_c = 90{,}7$ t, iar riglele din profile 10 W = 25 avînd $M_c = 12{,}21$ tm și $N_c = 119{,}5$ t.

Cu ajutorul porgramului CANEL 1 au fost studiate patru cazuri și anume $r = 10, 20, 40$ și 80. În toate cazurile parametrul a din expresia Ramberg-Osgood a fost considerat cu valoarea $a = 1$.

Presupunînd că forțele variază proporțional, mărimea pașilor fiind constantă, $\Delta H = 0{,}0756$ t, $\Delta P = 0{,}869$ t, $\Delta Q = 0{,}869$ t au fost obținute rezultatele prezentate în figura 5. Se constată că, pe măsură ce parametrul r crește, comportarea oțelului se

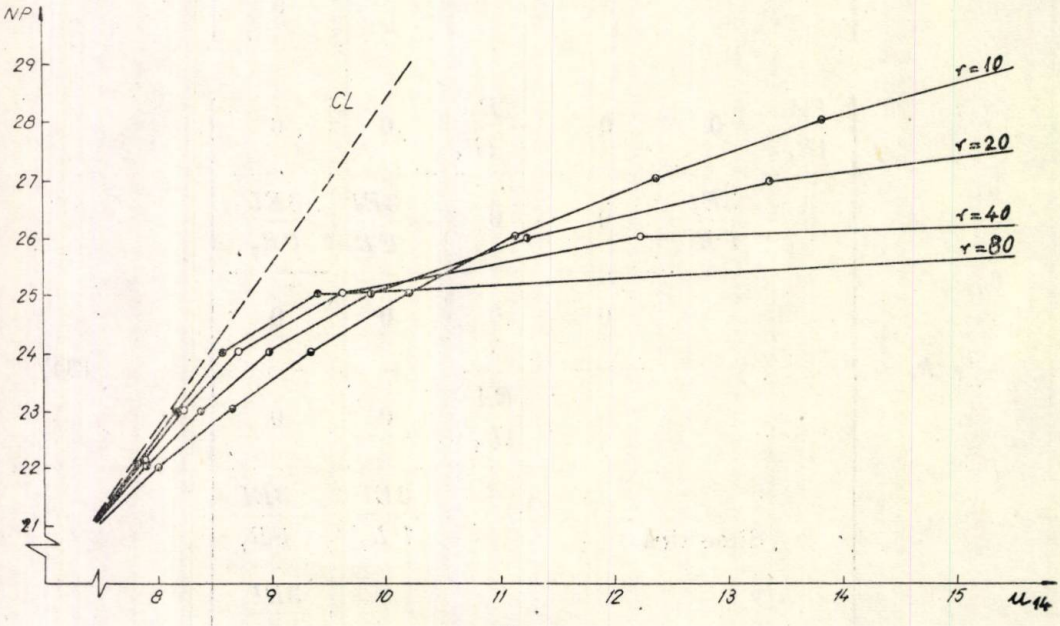


Fig. 5

apropie de comportarea elasto-plastică, ceea ce se obține pentru $r = \infty$. În raport cu calculul liniar elastic deplasările sînt mai mari și anume pentru valorile mici ale parametrului r, atît timp cît momentul încovoietor este mai mic decît momentul de comparație (M_c) și în mod special pentru valorile mari ale parametrului r cînd momentul încovoietor se apropie de valoarea momentului de comparație.

3.2. CALCULUL DE ORDINUL II NELINIAR ELASTIC

Calculul de ordinul II neliniar elastic ține seama atît de comportarea neliniar elastică a materialului, cît și de modificarea geometriei structurii în cursul deformării sub acțiunea încărcărilor exterioare.

Matricea de rigiditate a barei nu se poate stabili direct în calculul de ordinul I, în cazul materialului cu comportare neliniar elastică și cu atît mai mult acest lucru nu este posibil în cazul introducerii și efectului variației geometriei elementului.

În consecință, în calculul de ordinul II neliniar elastic, introducerea modificării geometriei structurii s-a efectuat utilizînd metoda corectării succesive a lungimii barelor [2]. Cu ajutorul programului CANEL 2 s-au reluat cazurile studiate la calculul de ordinul I. Dintre rezultatele obținute, în figura 6 s-au prezentat comparativ cazurile $r = 10$ și $r = 80$. Se constată că introducerea în calcul a modificării geometriei structurii conduce la deplasări mai mari, ceea ce înseamnă că structura are o rigiditate mai mică decît aceea considerată în calculul de ordinul I.

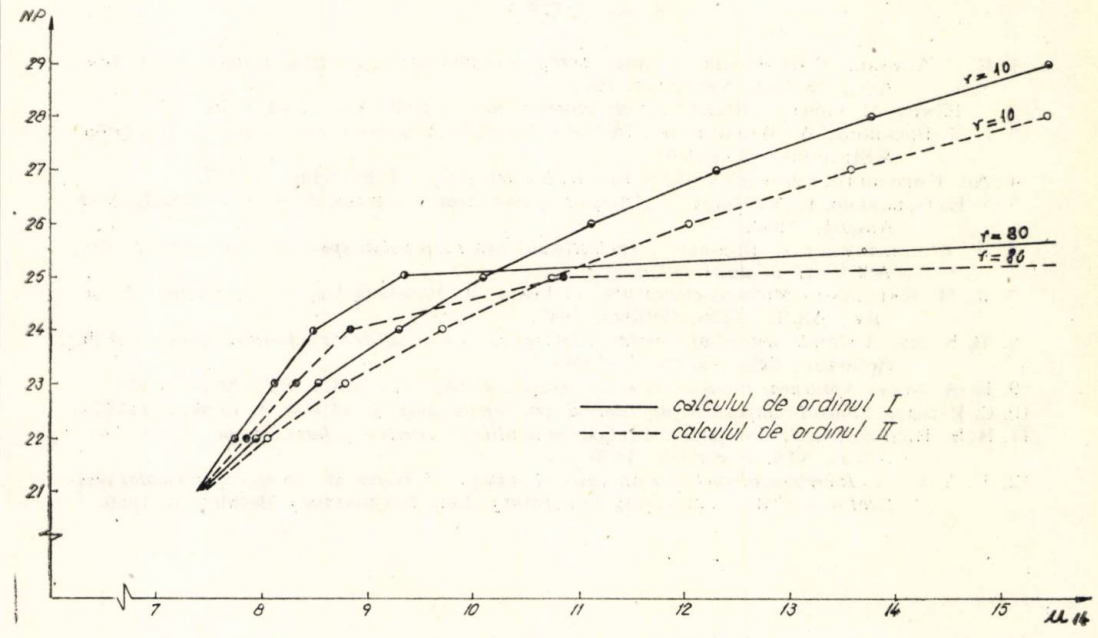


Fig. 6

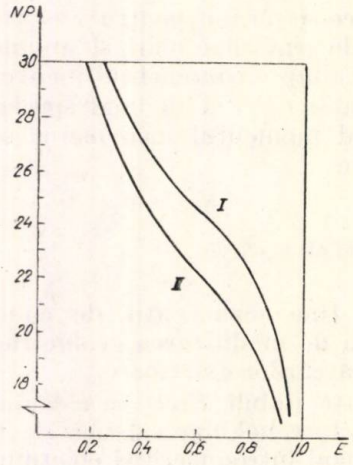


Fig. 7

În figura 7 este prezentată comparativ variația modulului de elasticitate în secțiunea 14 pentru elementul 11—14.

4. CONCLUZII

În legătură cu calculul neliniar al structurilor se desprind următoarele concluzii :

— Calculul neliniar, luînd în considerație atît neliniaritatea comportării materialului, cît și neliniaritatea geometrică, reprezintă forma cea mai corectă a calculului structurilor.

— Calculul elastic neliniar utilizînd expresii de tip Ramberg-Osgood necesită cunoașterea valorilor parametrilor ce definesc comportarea neliniară a materialului.

— Calculul de ordinul II elastic neliniar se poate efectua utilizînd metoda corectării succesive a lungimii elementelor.

— Calculul neliniar este mai costisitor decît calculul liniar, de aceea el este recomandabil în cazul structurilor unor construcții importante sau pentru structuri de mare serie.

Primită la redacție la 15 noiembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. R. J. Alvarez, C. Birnstiel, *Inelastic analysis of multistory, multibay frames*, J. St. Div., ASCE, ST 11, November, 1969.
2. V. Bănuț, H. Popescu, *Stabilitatea structurilor elastice*, Edit. Academiei, 1975.
3. L. J. Bockholt, W. Weawer Jr., *Inelastic dynamic analysis of thier buildings*, Computers & Structures, **4**, (1974).
4. Al. Gheorghiu, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, 1975.
5. J. E. Goldberg, R. M. Richard, *Analysis of nonlinear structures*, J. St. Div., ASCE, ST4, August, 1963.
6. J. J. Jonatowski, C. Birnstiel, *Inelastic stiffned suspension space structures*, J. St. Div., ASCE, ST6, June, 1970.
7. J. M. Kaldjian, Moment-curvature of beam of Ramberg-Osgood functions, J. St. Div., ASCE, ST 5, October, 1967.
8. B. Klein, *A simple method of matrix structural analysis, nonlinear problems*, Journal of the Aerospace Sciences, **26**, *6*, (1959).
9. K. A. Noor, *Nonlinear analysis of space trusses*, J. St. Div., ASCE, ST3, March, 1974.
10. C. Pacoste, *Studiul comportării neliniare a structurilor*, Bul. St. al Inst. de Constr., *4* (1973).
11. R. M. Richard, E. J. Goldberg, *Analysis of nonlinear structures: force method*, J. St. Div., ASCE, ST6, December, 1965.
12. E. Yarimci, *Incremental inelastic analysis of framed structures and some experimental verifications*, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University Bethlehem, 1966.

METODE NUMERICE DE ANALIZĂ STRUCTURALĂ

de MARCEL D. STERE

I.M.F.C.A., București

Motto

"The purpose of computing is insight not numbers" [1]

HAMMING, R.W. [2]

Prezentarea unei succinte analize comparative a trei dintre cele mai eficiente și folosite procedee numerice de analiză structurală: metoda diferențelor finite (MDF), metoda elementelor finite (MEF), metoda relaxării dinamice (MRD). Lucrarea este însoțită de un număr consistent de referințe bibliografice.

1. INTRODUCERE

Problema fundamentală în analiza structurilor o constituie determinarea distribuției de tensiuni și deformații într-o structură solicitată de un sistem de sarcini, în condiții de lucru date.

În această analiză trebuie să se obțină rezultate cît mai precise pentru a se putea proiecta structuri optime.

Configurațiile și solicitările diverselor tipuri de structuri folosite în construcțiile reale fac, în mod practic, inaplicabile metodele clasice de analiză structurală pentru a se obține precizia necesară realizării unor structuri cu performanțe superioare.

Analiza structurilor cu „venerabilele" metode clasice constituie un procedeu evident de așezare a „carului înaintea calului" [2].

Problemele de determinare a tensiunilor se rezolvau prin căutarea corespondenței acestora cu modelele din diversele cărți sau cataloage de soluții predeterminate pentru problemele cu care inginerii și matematicienii s-au întîlnit în decursul multor zeci de ani.

Dacă forma piesei solicitate analizate, sau sistemul de sarcini nu coincideau cu cele din soluțiile cunoscute, analistul făcea ca acestea să fie cel mai bine aproximate de soluțiile existente, în general prin efectuarea de simplificări de formă sau sistemul de sarcini aplicat astfel încît problema să fie soluționată manual, în stilul „clasic". Analistul știa că rezultatele obținute erau aproximative dar era mai bine așa decît dacă n-ar fi fost nici o determinare a cîmpului de tensiuni.

Pe de altă parte, metodele experimentale deși pot furniza date destul de precise, sînt prea costisitoare și necesită, în general, un timp destul de îndelungat pentru efectuarea lor.

---

[1] "Scopul calculului îl constituie înțelegerea, nu numerele".

[2] Cunoscut matematician contemporan.

După cel de-al doilea război mondial cerințele impuse de realizarea unor structuri eficiente și problemele noi puse de construcția avioanelor de mare viteză și, printr-o fericită coincidență ajutate de dezvoltarea construcției de calculatoare electronice numerice (CEN) au necesitat punerea la punct a unor noi procedee de analiză structurală mai adecvate pentru soluționarea corespunzătoare a problemelor complexe apărute.

În perioada 1947—1973 au fost puse la punct sau perfecționate o serie de procedee numerice de calcul bazate pe folosirea CEN [1], [41], [40], [62], [3], [83].

După o *extensivă* consultare a literaturii privind procedeele numerice de analiză structurală și evoluția lor în ultimul deceniu a rezultat clar că trei dintre acestea și anume : MDF, MRD și MEF sînt cele mai eficiente și sînt selectate în cazurile în care se dorește o rezolvare a unei probleme reale, utile.

Validitatea lor a fost verificată cu succes pe numeroase structuri, aceste procedee extinzînd enorm gama de probleme ce pot fi în prezent soluționate.

În ultimul deceniu lărgindu-se folosirea CEN pentru problemele de analiză structurală, chiar de complexitate moderată, procedeele numerice au fost adoptate în majoritatea institutelor de cercetare și proiectare din țările dezvoltate industrial.

Dezvoltarea calculelor folosind CEN, în această perioadă a devenit atît de impetuoasă încît analiza structurilor folosind *metodele aproximative*, clasice — chiar la problemele unde se obțin rezultate satisfăcătoare cu aceste procedee, a devenit nenecesară.

Mai jos, în figura 1.1 se reproduce și se completează o clasificare a metodelor de analiză structurală dată de Przemieniecki, J.S. [1].

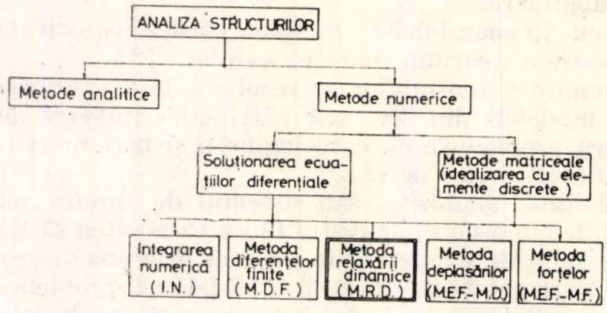


Fig. 1.1. — Metode de analiză structurală.

Fiecare din procedeele indicate în fig. 1.1 cu excepția MRD, folosită doar într-un număr restrîns de lucrări, sînt bine cunoscute și prezentate într-o literatură foarte bogată.

Recentele dezvoltări ale tehnicilor de analiză matriceală a structurilor și programele de calculator corespunzătoare au redus analiza structurilor pentru elementele componente ca bare, plăci și învelișuri la un simplu procedeu de *rutină*.

Cea mai eficientă metodă de soluționare pentru o problemă structurală dată se va evalua pe baza următoarelor criterii :

1. ușurință de formulare :

2. durata și dificultatea întocmirii programului pentru CEN;
3. memoria de calculator necesară;
4. viteza și precizia. de calcul;
5. ușurința de analiză și interpretare a rezultatelor.

De aceea este importantă cunoașterea și evaluarea comparativă a potențialelor diverselor procedee de calcul.

Ca un prim pas în această direcție, lucrarea de față își propune să realizeze o scurtă trecere în revistă a particularităților esențiale și posibilităților de utilizare, cu comentarea corespunzătoare a avantajelor și dezavantajelor, a celor mai eficiente și răspîndite tehnici numerice de soluționare: MDF, MEF și MRD. Într-un asemenea articol de sinteză pot fi date însă numai succinte prezentări ale celor trei tehnici, însoțite de referințele cele mai interesante și de primă utilitate.

2. METODE NUMERICE DE ANALIZĂ STRUCTURALĂ

2.1. METODA DIFERENȚELOR FINITE (MDF)

MDF este cel mai vechi procedeu numeric dintre cele analizate în prezenta lucrare. MDF este un procedeu matematic, utilizabil la soluționarea ecuațiilor diferențiale ce descriu comportarea structurilor analizate.

MDF, prin folosirea algebrei matriceale în soluționarea problemelor de analiza structurilor, permite reducerea problemei integrării sistemului de ecuații diferențiale ce definesc o problemă la o modalitate mult mai simplă: rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice. Sistemul de ecuații care rezultă poate fi soluționat eficient folosind CEN.

În esență, în acest procedeu ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale sînt înlocuite cu ecuații cu diferențe finite care, împreună cu condițiile de frontieră corespunzătoare, permit determinarea comportării structurii.

Relația fundamentală ce se obține este de tipul

$$Ax = b, \tag{2.1}$$

unde A este matricea coeficienților ecuațiilor;
x — vectorul deplasărilor necunoscute;
b — vectorul sarcinilor aplicate.

Metoda este folosită de foarte mult timp [3], [4], [5]. Istoricul și principiile de bază ale procedeului sînt în mod detaliat prezentate de Wang Chi Teh [6], Crandall S. H. [7], Samarski A. A. [8], Collatz, L. [6], Forsythe, G. F. și Wasow, W. R. [23].

Metoda de tratare corespunde felului de a gîndi al inginerului, procedeul de analiză fiind similar cu altele folosite în tehnică [4].

Pentru a scrie și a aplica o schemă cu diferențe finite trebuie să se efectueze următoarele două etape principale [8]:

(a) Să se înlocuiască variația continuă a argumentului domeniului cu o variație discretă;

(b) Trebuie să se înlocuiască operatorul diferențial cu un operator cu diferențe finite.

De asemenea, trebuie să se formuleze o descriere analoagă, în diferențe finite, pentru condițiile de frontieră și pentru condițiile inițiale ale problemei.

După realizarea acestei proceduri se ajunge la un sistem de ecuații algebrice de tipul (2.1).

Pentru a se ușura memorarea și soluționarea sistemului de ecuații acestea se dispun ca în figura 2.1.

Pe domeniul analizat (structura dată) se alege o mulțime finită de puncte și soluția aproximativă se determină tocmai în aceste puncte.

Această mulțime finită de puncte este denumită *rețea*. Diversele puncte se numesc *nodurile* rețelei. Funcția determinată în nodurile rețelei se numește *funcția* de rețea.

În MDF se înlocuiește domeniul variației continui a argumentului printr-o rețea, adică printr-un domeniu de variație *discretă a argumentului*.

În mod practic se realizează o aproximare a *spațiului soluțiilor ecuației* diferențiale originale cu spațiul funcțiilor de rețea.

Caracteristicile soluției cu diferențe finite și, în particular, apropierea acesteia de soluția exactă depind (mult) de alegerea rețelei.

În soluționarea problemei trebuie să se evalueze cît mai bine *convergența*, *stabilitatea* și *precizia* schemei cu diferențe finite.

În lucrările lui Samarski A. A. [8], Babuška I. [18], Richtmyer R. și Morton K. W. [19] sînt investigații suficiente în legătură cu aceste probleme esențiale în aplicarea MDF.

Ecuațiile obținute vor fi liniare sau neliniare în funcție de sistemul continuu original, dacă a fost liniar sau neliniar.

Ordinul sistemului este egal cu numărul de puncte al rețelei de calcul.

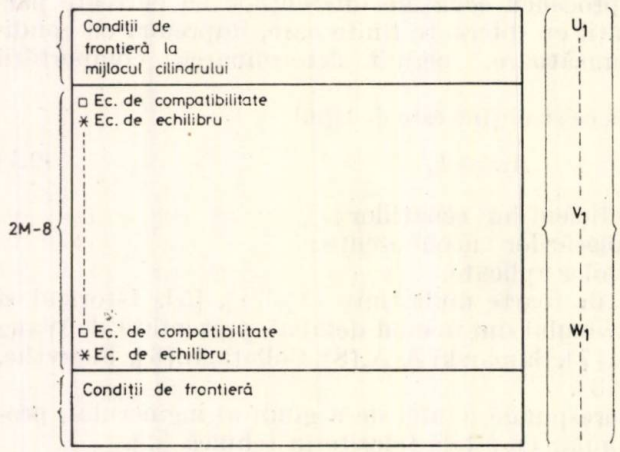


Fig. 2.1. — Aranjarea ecuațiilor în soluționarea prin MDF. Exemplul de calcul pentru un înveliș cilindric.

Pasul rețelei se determină în funcție de precizia aproximației dorite, valoare ce se stabilește la începutul analizei [3].

Cel mai folosit procedeu în analiza structurilor este așa-zisul „cu diferențe centrale", descris în detaliu în textele de metode numerice [7], [8], [20].

Sistemul de ecuații cu diferențe finite obținut are o structură cvasi-diagonală (fig. 2.1).

MDF, în condițiile actuale ale existenței calculatoarelor electronice numerice puternice, ce permit soluționarea precisă a unui sistem mare de ecuații, a devenit deosebit de atractivă.

MDF se remarcă prin simplitate, precizie și generalitate și este deosebit de eficientă în studiul a numeroase tipuri de structuri.

MDF are o serie de avantaje deosebite ce determină o largă folosire a acesteia.

Dintre aceste avantaje cele mai importante sînt:

1. Simplifică și mecanizează considerarea unor factori importanți în aplicațiile practice:
   — condițiile de rezemare;
   — condițiile de încărcare;
   — geometria structurii;
2. Slaba dependență a procedeului de:
   — geometria structurii;
   — caracteristicile elastice ale materialelor;
   — caracterul stării inițiale de tensiune,
3. Se obține o bună aproximare (a soluției) cu un număr relativ mic de parametri,
4. Metoda este deosebit de versatilă, putînd fi aplicată atît la sistemele continui, cît și la cele discontinui,
5. Metoda permite elaborarea unor procedee universale de analiză statică și a stabilității structurilor,
6. Procedeul poate fi aplicat în mod unitar pentru grupuri tipice de structuri dovedindu-se a fi foarte eficientă prin realizarea unor programe de calcul adecvate,
7. Spre deosebire de aplicarea metodelor energetice, de exemplu, care necesită un volum mare de calcule numerice, care, dacă nu sînt verificate cu atenție, pot duce la erori serioase, soluționarea prin MDF implică o relativ simplă programare pe calculatorul electronic. Se pot crea programe ce pot fi utilizate eficient în proiectare fără a se solicita cunoștințe speciale utilizatorilor. Universalitatea procedeului creează o reală posibilitate de realizare a unui algoritm pentru soluționarea unei game largi de structuri.

Această posibilitate este evidentă urmărind macroschema logică a aplicării procedeului prezentată în figura 2.2.

Astfel, într-o singură subrutină se pot cuprinde toate combinațiile posibile de condiții limită pentru o structură.

Într-o altă subrutină sînt cuprinse condițiile de echilibru și compatibilitate pentru structura analizată.

Se pot considera cu ușurință diversele tipuri de teorii de analiză structurală (de exemplu, în analiza învelișurilor aceasta constituie o necesitate).

Înlocuirea unei subrutine cu cea corespunzătoare tipului de structură analizat asigură programului universalitatea susamintită.

8. MDF este, de asemenea, superioară procedeului energetic în care se consideră un model pentru soluție, procedeu dificil de manipulat

căci, pentru a se satisface cît mai riguros condițiile de frontieră, trebuie considerați un număr mare de termeni din funcția deplasării prezumată, ceea ce complică foarte mult calculul.

9. MDF asigură un criteriu de convergență necondiționată prin reducerea dimensiunilor pasului rețelei de calcul. Pentru obținerea unei precizări suficiente este necesar să se folosească o rețea mai fină.

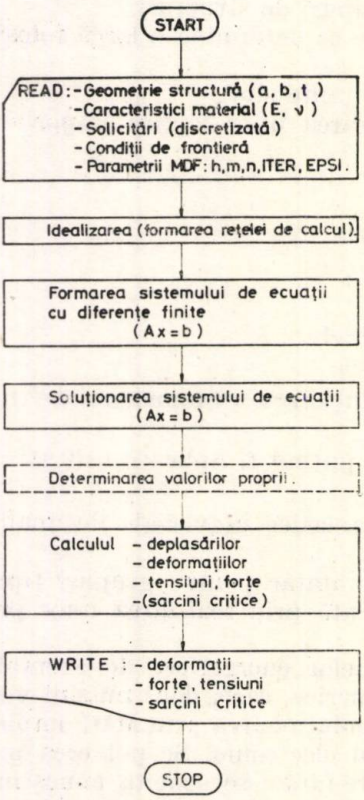


Fig. 2.2. — Macroschema logică a procesului de calcul în aplicarea M.D.F.

La alte procedee numerice (MEF, de exemplu) convergența este mai intuitivă și depinde de o idealizare corespunzătoare prin elementele finite care reprezintă structura,

10. Posibilitatea de soluționare a problemelor în care intervin proprietăți variabile ale materialelor.

În acest caz soluționarea se face în două etape

a) în prima parte se scriu ecuațiile de echilibru, independente de proprietățile materialului;

b) în a doua parte sînt definite forțele în concordanță cu proprietățile locale ale materialului.

Combinarea celor două părți dă soluția completă. Procedeul se poate extinde la domeniul elasto-plastic.

Alături de avantajele enumerate mai sus metoda are și o serie de dezavantaje, dintre care cele mai importante sînt:

1. Ordinul ridicat al sistemului de ecuații algebrice obținut.

Astfel, pentru asigurarea unei precizii suficiente trebuie ales un pas mic al rețelei de calcul, ceea ce are ca efect un ordin mare al sistemului. În aplicațiile practice recente se folosesc curent sistemele de 1 000—5 000 (10 000) ecuații.

Această problemă are două aspecte:

— limitarea impusă de memoria calculatorului disponibil. Aceasta poate fi evitată pentru toate problemele practice folosind tehnici adecvate de memorare [10];

— precizia soluției este afectată serios în cazul sistemelor mari. Aceasta rămîne o problemă delicată chiar pentru actuala generație de CEN.

Se pot soluționa cu ușurință sisteme de ecuații foarte mari, dar precizia soluției constituie o problemă ce trebuie analizată în parte la fiecare aplicație.

De aceea dimensiunile matricei care se obține în cazul idealizărilor fine constituie o limitare pentru metodă.

2. În cazul soluționării problemelor în care intervin proprietăți variabile ale materialelor metoda devine dificil de aplicat.

3. Fiecare problemă constituie un exemplu numeric diferit;

4. În soluționarea efectivă trebuie folosite condiții concrete de frontieră;

Structurile cu geometrii complexe pot duce la o dificilă considerare a condițiilor de frontieră într-o serie de probleme;

5. O altă obiecție care este adusă metodei de unii autori constă în faptul că prin folosirea acestei metode este necesară prea puțină „gîndire inginerească" (21). Or, cunoașterea aspectului fizic este o parte importantă în soluționarea efectivă a unei probleme tehnice.

NOTĂ. În pofida recentei popularități a MEF, metodele bazate pe tehnica cu diferențe finite rămîn deosebit de eficiente pentru soluționarea problemelor descrise de ecuații cu derivate parțiale.

Probleme ce se pot studia curent prin aplicarea MDF:

— starea de tensiune și deformație într-o structură;

— stabilitatea structurilor (se determină valorile proprii și vectorii proprii ai matricei coeficienților A);

— tensiuni termice.

Principalele avantaje în utilizare ale acestei metode deosebit de intuitive apar într-o serie de probleme, dificil de soluționat cu alte procedee, cum sînt:

— existența unei stări inițiale de deformație neomogenă;

— studiul barelor, plăcilor și învelișurilor de grosime variabilă;

— analiza structurilor cu condiții de frontieră complexe;

— analiza structurilor cu geometrie complicată (exemplu, cu decupări)

— existența unor solicitări exterioare complicate.

În ultimul timp au fost realizate procedee eficiente de memorare a coeficienților matricei A considerînd particularitatea acesteia de a fi de tipul cvasidiagonală (o bandă în jurul diagonalei principale). Un astfel de procedeu este dat de Jennings A. [10].

Sistemul de ecuații algebrice obținut se soluționează prin diverse procedee bine puse la punct: Gauss-Seidel, suprarelaxare; Gauss-Jordan, Gauss [11], [12], [13], [14].

În cazul analizei stabilității trebuie calculate valorile proprii ale matricei coeficienților. Sînt puse la punct numeroase procedee, special create pentru soluționarea pe CEN [15], [16], [17].

2.2. METODA ELEMENTELOR FINITE (MEF)

După cel de-al doilea război mondial, problemele noi puse de calculul avioanelor de mare viteză și, printr-o fericită coincidență, ajutate de dezvoltarea calculatoarelor electronice, au dus la crearea unei noi metode de abordare — Metoda elementelor finite — procedeu numeric de calcul pentru structurile complexe, deosebit de eficientă în analiza structurilor, care, cu metodele clasice, sînt „imposibil" de abordat.

Bazele metodei au fost puse în perioada 1947—1957 și au fost completate ulterior de o literatură care a atins deja, în prezent, proporții enorme. În lista de referințe sînt indicate numai textele esențiale asupra procedeului. Astăzi, prin introducerea și folosirea largă a CEN de mare putere, MEF a devenit o metodă „clasică" [1], [40], [44], [56].

O prezentare compactă și profundă a esenței MEF se găsește în lucrările lui Zienkiewicz [42], Przemieniecki [4], Oden [44], Vainberg [61] și al.

De asemenea, cărțile lui Przemieniecki (1963), Zienkiewicz, O.C. [62], Holland [63], Oden [64], Rubinstein [56] acoperă fundamentele metodei într-un mod comprehensiv.

Literatura în acest domeniu apare într-un ritm foarte accelerat încît un articol de sinteză asupra fundamentelor procedeului ar trebui să fie însoțit de un adevărat „recital" de referințe bibliografice. La ora actuală există peste 3 000 de cărți și articole, în afara rapoartelor interne realizate de marile institute și firme.

MEF aplică calculul matriceal pe scară largă nu numai pentru a simplifica scrierea și algoritmul de calcul ci și pentru a prezenta o elegantă și concisă tratare matematică.

Creată inițial din necesitatea analizei structurilor complexe întîlnite la avioanele de mare viteză (aripi în săgeată, fuselaje cu structură foarte complicată etc.), metoda s-a generalizat și s-a extins la foarte multe domenii ale tehnicii și științei contemporane cum ar fi, de exemplu, în: analiza statică a structurilor aerospațiale; analiza construcțiilor de nave; analiza barajelor; calculul construcțiilor civile; teoria plasticității; teoria elasticității; teoria aeroelasticității; vibrații; stabilitatea structurilor; transferul de căldură; industria chimică; industria nucleară; mecanica fluidelor etc.

Elementele de bază și diversele aspecte ale aplicațiilor practice sînt descrise detaliat în literatura consacrată procedeului.

Majoritatea lucrărilor s-au ocupat de ameliorarea fundamentelor descrierii matematice a metodei (de exemplu convergența) ori de dezvoltarea unor noi elemente finite cu mai multe grade de libertate. Acestea din urmă au o deosebită importanță practică.

Noua tehnică a avut o mare influență asupra practicii de proiectare, asigurînd o precizie și ordonare a calculelor, eliminînd coeficienții diverși, utilizați în metodele inginerești anterioare, elemente ce reflectau incertitudinea în calcul.

MEF s-a maturizat și a fost perfecționată, în principal, în industria aerospațială. De mai mulți ani procedeul este folosit pentru analiza structurilor avioanelor moderne.

Avioanele Concorde, Corvette, A 300, Lockeed L—1011, Alphajet, F—14, F—15 etc., sînt calculate prin aplicarea metodei elementelor finite.

Principala condiție necesară în aplicarea MEF o constituie existența unor CEN puternice.

Matricele care sînt manipulate și sistemele de ecuații care trebuie soluționate în acest procedeu sînt de ordine de la cîteva zeci pînă la circa 10 000. Or, aceste operații sînt de neimaginat a fi efectuate fără a dispune de calculatoare adecvate.

BAZELE METODEI. DEFINIȚII. FORMULAREA PROBLEMEI

Există numeroase monografii și articole ce clarifică bazele fizice și matematice ale metodei [40], [43], [42], [44], [55], [65], [66], [67], [60], [45], [58], [62].

O serie de studii prezintă metoda cu ajutorul procedeului Rayleigh-Ritz [68], [69], altele printr-o abordare tip Galerkin [70], [71].

În esență, MEF poate fi realizată cu ajutorul unui procedeu de obținere a soluției aproximative cu parametri nedeterminați, în termeni de un sistem de funcții de coordonate.

Orice metodă de calculare a acestor parametri, care asigură convergență la soluția corectă prin creșterea numărului de parametri, este, în mod egal, validă.

Ideea de bază a MEF o constituie simularea comportării reale prin aproximarea acesteia cu un model alcătuit din elemente relativ mici („elemente finite") pentru care se poate exprima comportarea elastică într-un mod relativ simplu și cu o precizie suficientă.

Cîmpul de deplasări este definit, printr-o combinație de moduri de deplasare preselectate, denumite funcții de formă.

Deplasările în interiorul unui element pot fi obținute prin interpolarea deplasărilor de la noduri cu ajutorul unei scheme de interpolare specificate.

Valorile particulare ale parametrilor ce definesc familia funcțiilor de formă sînt determinate prin minimizarea energiei potențiale a sistemului. Această configurație este interpretată ca o aproximație satisfăcătoare a comportării structurii.

Descrierea cîmpurilor cele mai complexe poate fi realizată cu ajutorul unei biblioteci de elemente finite destul de limitată.

Ipoteza fundamentală a MEF constă în a considera că starea cîmpului variabil într-o subregiune a structurii este descrisă complet de valorile variabilelor necunoscute într-un număr finit de puncte (denumite noduri) localizate pe frontierele elementului.

Succesul sau insuccesul modelului în a reprezenta condițiile în structură depinde în primul rînd de setul de funcții de formă selectate și de condițiile de compatibilitate impuse în lungul frontierelor elementului.

Pentru a asigura o descriere cît mai apropiată de realitate a structurii analizate trebuie satisfăcute o serie de condiții dintre care următoarele două sînt obligatorii (65) :

(a) cerința de completitudine.
Funcția de formă trebuie să includă deplasările de corp rigid și stările de deformație constantă asociate cu problema analizată.

(b) cerința de continuitate.
Configurațiile produse de funcțiile de formă trebuie să asigure satisfacerea minimului de condiții de compatibilitate asociate cu problema analizată. Compatibilitatea trebuie să fie menținută în lungul întregului perimetru al elementelor.

Pentru o structură idealizată analiza tensiunilor și deplasărilor în structură sub un sistem de sarcini se reduce la o problemă pur matematică (de analiză numerică).

Ecuaţiile care se scriu sînt :
(1) ecuaţiile de echilibru,
(2) ecuaţiile de compatibilitate,
(3) relaţiile tensiuni-deplasări.

În figura 2.3 este arătată macroschema logică a programului de calcul pentru aplicarea MEF.

În mod practic în MEF se determină soluţia ecuaţiei.

$$[K]\{d\} = \{R\} \tag{2.2}$$

unde

$[K]$ este matricea de rigiditate a structurii (matrice simetrică pozitiv definită);
$\{d\}$ — vectorul deplasărilor punctelor nodale;
$\{R\}$ — vectorul sarcinilor exterioare.

Soluţia căutată este de forma

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i. \tag{2.3}$$

Cu alte cuvinte, în MEF structura reală continuă (sistemul fizic) este înlocuită cu un model echivalent (structura idealizată) din elemente structurale discrete, avînd caracteristicile elastice şi inerţiale exprimabile în formă matriceală.

Matricele care reprezintă aceste proprietăţi sînt considerate ca fiind nişte blocuri constitutive, care, asamblate împreună, în concordanţă cu legile obţinute din teoria elasticităţii, definesc caracteristicile statice şi dinamice ale structurii reale.

Analiza structurii se efectuează cu mijloace algebrice, iar soluţia constituie o aproximaţie a soluţiei fizice reale (aproximaţie fizică).

Selectarea funcţiilor pentru deplasări şi formarea matricei de rigiditate sînt operaţiile cele mai importante în MEF.

Procedeul are un mare avantaj practic şi intuitiv căci poate fi aplicat la structuri complexe ce pot fi reprezentate uşor prin modele fizice vizualizate, simple.

MEF lasă o mare varietate de posibilităţi la dispoziţia analistului. Numai experienţa în calcule a analistului permite determinarea celei mai bune căi.

Există două procedee principale în analiza cu elemente finite (72) :
(a) metoda forţelor,
(b) metoda deplasărilor.

Ambele metode au la bază procedeul de idealizare a structurii reale printr-un număr finit de elemente conectate între ele prin puncte nodale.

Metodele diferă între ele prin maniera de satisfacere a condiţiilor de echilibru şi compatibilitate a deplasărilor.

În lucrarea [71] Argyris face o succintă prezentare a acestor tehnici.

În metoda matriceală a deplasărilor se formează o matrice de rigiditate a structurii, şi deplasările necunoscute sînt determinate pentru condiţiile de încărcare date prin soluţionarea sistemului

$$\{R\} = [K]\{d\}. \tag{2.2'}$$

În metoda matriceală a forțelor se formează o matrice de flexibilitate, și forțele interioare sînt necunoscutele ce trebuie determinate.

La prima vedere, abordarea prin metoda forțelor pare mai atractivă, dar entuziasmul dispare rapid constatîndu-se că, dacă punctele nodale nu sînt selectate cu atenție, se pot dovedi inadecvate pentru un sistem de sarcini și o geometrie dată. În folosirea la calculul structurilor mari și de formă complexă metoda forțelor s-a dovedit incapabilă de a calcula precis și în mod economic. În majoritatea cazurilor practice metoda forțelor a dovedit deficiențe care nu au putut fi depășite.

Spre deosebire de aceasta metoda deplasărilor poate fi folosită fără dificultăți la structuri complexe și este foarte convenabilă pentru automatizarea calculelor.

Programele pentru aplicarea metodei deplasărilor tind să aibă o accentuată notă de generalitate, permițînd analiza unei game foarte largi de tipuri de structuri.

Programele pentru aplicarea metodei forțelor sînt scrise în vederea soluționării anumitor tipuri limitate de structuri. Încă de la început a fost folostită pentru soluționarea numerică a problemelor în care apar sisteme slab condiționate. Această tendință s-a accentuat așa mult încît a devenit un dezavantaj pentru metoda forțelor, nefiind posibil să fie programată pentru o structură generală, completă.

Dealtfel, peste 90—95% din literatura publicată în ultimii 5—8 ani este destinată diverselor probleme referitoare la aplicarea metodei deplasărilor.

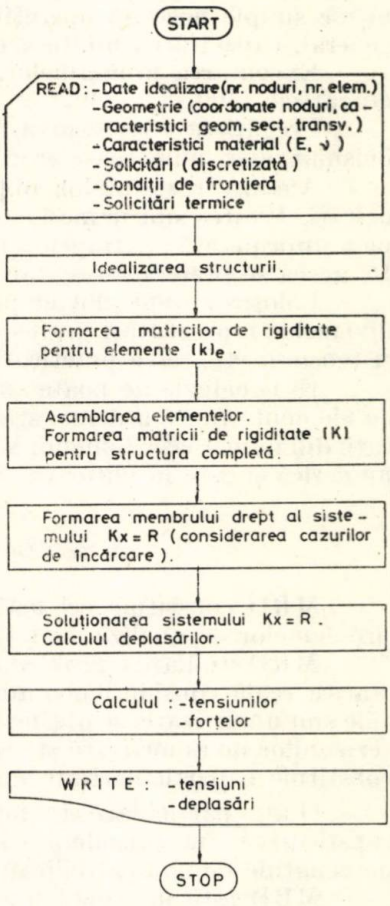


Fig. 2.3. — Macroschema logică a programului de calcul pentru aplicare M.E.F.

În ultimul timp au fost efectuate și o serie de încercări de realizare a unor modele hibride [73], [74], [75].

Avantajele metodei

MEF este complet generală în privința geometriei structurii, caracteristicilor materialelor, condițiilor de frontieră și solicitărilor aplicate.

Analiza structurilor cu discontinuități (decupări), a structurilor neomogene, constituie domenii în care metoda dă rezultate remarcabile, calcule, care, practic, nu se pot efectua cu alte metode.

MEF permite o convenabilă considerare a tensiunilor inițiale și a tensiunilor termice.

MEF permite o relativ ușoară considerare a modificărilor elementelor în timpul proiectării.

Dezavantajele metodei

Dezavantajul principal îl constituie faptul că și la analiza unor probleme simple necesită operații cu matrice destul de mari ce depășesc, în general, capacitatea multora din calculatoarele din generațiile mai vechi.

Executarea programelor, chiar și a unora mai simple, necesită sute de cartele (300 — 2 000).

Pregătirea și verificarea datelor de intrare este laborioasă și, în mod obișnuit, apar numeroase erori (în speciale cele umane) [42].

Analiza rezultatelor obținute poate prezenta, de asemenea, dificultăți. Acestea sînt în mod obișnuit obținute în forma unei liste de numere pe o imprimantă ; extragerea informațiilor necesare cere foarte mult timp. De aceea se preferă prezentarea grafică a rezultatelor.

Folosirea unui plotter pentru scrierea directă de către calculator a diverselor reprezentări grafice : idealizarea structurii, curbele de deplasări și tensiuni etc., este practicată din ce în ce mai mult [42].

În concluzie de poate sublinia că amploarea aplicațiilor procedeului cu elemente finite a demonstrat eficiența și versatilitatea acesteia în aplicații din numeroase domenii. MEF se dovedește a fi cea mai generală metodă numerică și care în viitor va cunoaște o și mai largă răspîndire.

2.3. METODA RELAXĂRII DINAMICE (MRD)

MRD constituie cel mai recent procedeu numeric de soluționare a problemelor de analiză structurală [83]—[85], [88]—[93].

MRD studiază o problemă dinamică fictivă, echivalentă cu o problemă statică reală considerînd o amortizare vîscoasă, astfel că, după ce oscilațiile sînt amortizate, se obține soluția problemei staționare date. Adăugarea termenilor de amortizare și accelerare (artificială) la ecuațiile de echilibru constituie o particularitate distinctivă a MRD.

O altă particularitate importantă a MRD constă în faptul că ecuațiile constitutive sînt considerate separat de ecuațiile de echilibru dinamic și de ecuațiile de compatibilitate.

MRD este în esență un procedeu iterativ (în deplasări) de soluționare a formulărilor cu diferențe finite a ecuațiilor dinamice folosite pentru descrierea comportării structurii avînd însă avantajul unei analogii cu un proces fizic.

Frankel definește această abordare „iterație Richardson de gradul doi" [89].

În procesul de calcul mărimile în iterație de rangul $(k+2)$ sînt definite prin valorile din iterațiile $(k+1)$ și (k), iterațiile fiind „legate" cu o variabilă timp.

Otter, J.R.H. folosește analogia cu mișcarea oscilatorie amortizată pentru vizualizarea progresului iterației [86].

Modul de considerare a ecuațiilor permite o includere a condițiilor de frontieră în mod simplu și direct fie în deplasări, fie în tensiuni. De asemenea, se pot introduce cu ușurință termenii neliniari ce apar în formulare.

Considerarea problemei dinamice echivalente elimină necesitatea soluționării directe a sistemului de ecuații cu diferențe finite și calculul se realizează cu o simplă subrutină de substituție pentru CEN.

Ecuațiile sînt soluționate cu o tehnică explicită de integrare „pas cu pas" și printr-o alegere corespunzătoare a coeficienților de amortizare și incrementului de timp este posibil să se obțină convergența rapidă la soluția formei cu diferențe finite a ecuațiilor diferențiale inițiale.

Metoda are avantajul că desfășurarea soluționării problemei poate fi clar identificată și urmărită în toate etapele procesului de soluționare.

MRD constituie o elegantă, concisă și versatilă tratare a unor probleme interesante și dificile în practica inginerească actuală, necesitînd folosirea numai a unor calculatoare de putere mică sau medie.

Dacă în privința metodei de soluționare forma particulară de iterație folosită în MRD nu oferă avantaje față de alte procedee iterative, avantajele organizării calculului pe CEN în ce privește economia de memorie și ușurința de programare sînt considerabile.

În esență, metoda se bazează pe faptul că un sistem structural efectuînd vibrații amortizate, excitat de o forță constantă, în final ajunge în repaus în poziția deplasată de echilibru static a sistemului sub acțiunea forței.

Analiza dinamică realizată în MRD se bazează pe soluționarea ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor structurii idealizate.

Tensiunile în elemente și deplasărilor nodurilor structurii idealizate datorită oricărui set de sarcini exerioare pot fi determinate cu ușurință folosind un procedeu de integrare numerică a ecuației vibrației amortizate structurii :

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F, \tag{2.3'}$$

cu alegerea unor coeficienți de amortizare și a unui increment de timp adecvați, cu considerarea condițiilor inițiale

$$\begin{aligned} \dot{d} &= f_1, \\ d &= f_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

unde

M este matricea maselor (diagonală),
C — matricea de amortizare,
K — matricea de rigiditate,
F — vectorul sarcinilor aplicate,
d — vectorul deplasărilor,
$\dot{d}$ — viteza (derivată în raport cu timpul a deplasării).

Trebuie subliniat faptul că obiectul calculelor în MRD nu este totuși studiul mișcării ci determinarea tensiunilor și deplasărilor statice ale structurii. De aceea, pentru obținerea unor rezultate optime din punct de vedere al economicității soluționării, în MRD este esențial a se utiliza o amortizare apropiată de cea critică și de a folosi un increment de timp maxim posibil.

În MRD nu este necesar ca matricea de rigiditate să fie explicit memorată și implică numai operații aritmetice doar cu elemente nenule. De asemenea, în MRD, densitățile folosite sînt fictive (cu valori arbitrare), alese numai în scopul realizării unei eficiențe de calcul maxime și pot, dacă este necesar, să ia valori diferite în diferite regiuni ale structurii.

În MRD se consideră că soluția sistemului de ecuații (obținut de exemplu, printr-o idealizare cu MEF sau MDF)

$$[K]\{d\} = \{F\} \tag{2.5}$$

coincide cu cea a ecuației (2.3′) dacă $\dot{d}$ și $\ddot{d}$ devin nule.

Precizînd că $[M]$ și $[C]$ sînt pozitiv definite, $\dot{d}$ și $\ddot{d}$ interpretate ca derivatele succesive în raport cu timpul ale lui d, vor tinde spre zero cînd timpul crește nedefinit.

Macroschema logică a procedeului este inicată în figura 2.4.

Metoda explicită utilizată are avantajul soluționării rapide pe calculator, necesitînd numai efectuarea de produse și sumări, operații ce necesită puțin timp pentru calculator.

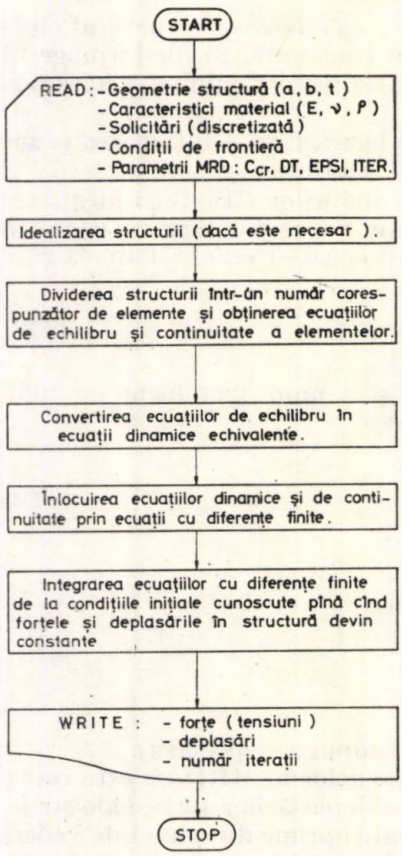


Fig. 2.4. — Macroschema logică a programului de calcul pentru aplicarea M.R.D.

Avantajele MRD :

a) ușurința de formulare : sînt folosite ecuațiile elasticității în forma cea mai simplă a acestora (ecuațiile de echilibru dinamic, ecuațiile constitutive, ecuațiile de compatibilitate). Ecuațiile sînt folosite în mod separat, ceea ce permite să se introducă cu ușurință ecuațiile pentru deplasările mari, să se considere deformații inițiale, să se includă ușor variate condiții de frontieră ;

b) ușurință de programare : nucleul programului îl constituie o subrutină de substituție deosebit de simplă, eficientă și economică.

c) ușurință de aplicare : parametri optimi ai procesului de calcul se stabilesc relativ ușor ; datele geometrice și mecanice necesare în calcul se pregătesc simplu și repede ;

d) ușurința de înțelegere și evaluare a rezultatelor : există posibilitatea urmăririi desfășurării complete a calculului. Rezultatele obținute sînt prezentate sintetic și ușor de urmărit și evaluat. Aceasta permite folosirea cu succes a MRD atît în cercetare, cît și în proiectare.

e) economicitate : atît întocmirea programului, cît și rularea acestuia pe calculator necesită timpi foarte mici, deci o foarte bună eficiență economică.

Dezavantaje.

a) Dezavantajul principal al metodei constă în faptul că aspectul cvasidinamic al procedeului ascunde natura reală a procesului iterativ ;

b) definirea incrementului de timp și a factorului de amortizare poate crea anumite dificultăți cînd experiența în calcul este mică.

3. CONCLUZII

ZIENKIEWICZ, O. C. [96] arată că „inventarea" calculelor cu diferențe finite și a diverselor procedee variaționale (în special, MEF) au soluționat „în principiu" problemele tehnice ale calculului structurilor.

ZIENKIEWICZ, O. C. spune „în principiu" deoarece reducerea numărului de necunoscute de la o mulțime infinită la una finită permite ca problema să se reducă la soluționarea unui sistem de ecuații algebrice. Din nefericire, în multe probleme practice importante, numărul de ecuații care trebuie soluționate este foarte mare, ceea ce duce la complicații serioase ca timp de soluționare și precizie a rezultatelor. Chiar pentru actuala generație de CEN se ating ușor limite ce nu pot fi depășite. Din această cauză, cercetările spre economie au devenit mai insistente.

În funcție de cazul concret al unei structuri de analizat se alege procedeul cel mai adecvat de soluționare.

Selectarea procedeului este determinată de:

— complexitatea problemei studiate,
— calculatorul electronic disponibil,
— gradul de complexitate al algoritmului de programat,
— rapiditatea și economicitatea în obținerea soluției,
— timpul de mașină necesar pentru soluționare (deci costul soluționării).

Universalitatea în aplicare, programele de calcul disponibile, precizia soluției, constituie condiții necesare de precizat în alegerea metodei de soluționare.

În același timp cerința de economicitate joacă un rol important în aprecierea și selectarea unui procedeu de soluționare. Costul analizei poate fi, în general, divizat în trei componente principale:

— costul pregătirii problemei pentru analiza pe calculator,
— costul rulării pe calculator,
— costul analizei rezultatelor de la calculator și interpretării semnificației lor reale.

Deci toate aceste aspecte trebuie neapărat considerate în hotărîrea finală privind tehnica de soluționare, care este cea mai potrivită pentru problema de studiat. Metoda optimă la fiecare problemă trebuie să asigure precizia maximă la un cost minim.

Primită la redacție la 21 mai 1975

BIBLIOGRAFIE

1. J. S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.
2. W. Ch. Paulsen, *Finite element stress analysis*, Machine Design, **43**, *24* (30 sep.), *26* (14 oct.), *28* (28 oct.) 1971.
3. M. G. Salvadori, M. L. Baron, *Numerical methods in engineering*, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1952.
4. I. Babuska, M. Prager, E. Vitasek, *Numerical processes in differential equations*, Praga, Interscience Publishers, 1966.

5. E. L. WACHSPRESS, *The numerical solution of boundary value problems*, Mathematical Methods for Digital Computers, New York, 1960.
6. L. COLLATZ, *The numerical treatment of differential equation*, ed., Berlin, Springer-Verlag, 1960.
7. S. H. CRANDALL, *Engineering analysis A survey of numerical procedures*, New York, McGraw-Hill Book Comp. Inc., 1956.
8. A. A. SAMARSKI, *Vvdenie v teorii raznostnih shem*, Moskva, Izd. Nauka, 1971.
9. R. KHOL, *Super program spells doom for cut-and-try design*, Machine Design, **44**, *24*, 72—77 (1972).
10. A. JENNINGS, *A compact storage scheme for the solution of symmetric linear simultaneous equation*, *Computer Journal*, **9**, *3*, 281—285 (1966).
11. B. CARNAHAN, H. A. LUTHER, J. O. WILKES, *Applied numerical methods*, New York, Wiley, 1969.
12. A. RALSTON, *Numerical integration method for the solution of ordinary differential equation*, Mathematical methods for digital computer, New York, John Wiley, 1960.
13. L. FOX, *Numerical solution of ordinary and partial differential equation*, Oxford, Pergamon Press, 1962.
14. D. M. YOUNG, *Iterative solution of large linear system*, New York, Academic Press, 1971.
15. K. K. KEROPIAN G. V. GORANDAKOV, *Elektriceskoe modelirovanie iscislennie metodi v teorii uprugosti*, Moskva, Stroizdat, 1973.
16. J. H. WILKINSON, *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford, Clarendon Press, 1965.
17. J. GRAD, M. A. BREBNER, *Eigenvalues and eigenvectors of a real general matrix*, Comm. ACM, **II**, *12*, 820—826 (1968).
18. N. M. NEWMARK, *A method for computation for structural dynamics*, Proc. A.S.C.E., J. Engn. Mech., 85, *EM*3, 67—94 (1959).
19. R. D. RICHTMYER, K. W. MORTON, *Difference methods for initial value problems*, New York, Interscience Publishers, 1967.
20. PING-CHUN, WANG, *Numerical and matrix methods in structural mechanics. With application to computers*, New York, John Wiley & Sons, Inc, 1965.
21. H. KRAUS, *Thin elastic shells*, New York, John Wiley Sons. & Inc., 1967.
22. R. M. RIVELLO, *Theory and analysis of flight structures*, New York, McGraw-Hil Book Comp., 1969.
23. G. E. FORSYTHE, W. R. WASOW, *Finite-difference methods for partial differential equation*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
24. V. E. SAMANEVSKII, *Metod cislennovo reşeniia kraevih zadaci*, Moskva, Izd. A.N. — USSR, 1963.
25. A. G. UGODCIKOV, Iu. P. KOROTKIN, *Nekotorie metodi reşeniia na EVM fiziceski nelineinih zadaci teorii plastib i obolocek*, Kiwev, Izd. Naukovo Dumka, 1971.
26. E. V. VINOKUROV, *Iterţionnii metod ra sciota osnovanii i fundamentov s pomoşciu EVM*, Minsk, Izd. Nauka i Tehnika, 1972.
27. T. K. CAUGHEY, M. E. J. O'KELLY, *Classical normal modes in damped linear dynamic systems*, Trans. ASME J. Appl. Mech., *3*, 583—588 (1965).
28. A. G. UGODNIKOV, M. I. DRUGACI. A. E. STEPANOV, *Reşenie kraevih zadaci ploskoi teorii uprugosti na ţifrovih i analogovih maşinah*, Moskva, Izd. Visşaia şkola, 1970.
29. P. COURANT, K. FRIEDRIHS, G. LEVY, *O raznostnih uravneniiah matematiceskoi fiziki*, Uspehi matemat, nauk, 1940, Vip. 8.
30. A. O. GHELFOND, *Iscislenie konecinih, raznostei*, Moskva, GITTL, 1952.
31. L. M. MILNE-THOMSON, *The calculus of finite differences*, London, Macmillan, 1951.
32. M. N. SPIJKER, *On the structure of error estimates for finite-difference methods*, Numer. Math., **18**, *1*, 73—100 (1971).
33. G. N. POPOJII, *Cislennoe reşenie dvuhmernih i trehmernih kraevih zadaci matematiceskoi fiziki i funkţii diskretnovo argumenta*, Kiev, Izd. Kievskovo Universiteta, 1962.
34. L. MORINO, J. W. LEECH, E. A. WITMER, *An improved numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1971, *June*, 423—428, 429—436.
35. S. K. GODUNOV, V. S. RIABENKII, *Raznostnie shemi. Vvedenie v teoriu*, Moskva, Izd. Nauka, 1973.
36. R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, **2**, New York, Interscience, 1962.
37. D. S. GRIFFIN, R. B. KELLOG, *A numerical solution for axially symmetrical and plane elasticity problems* Int. J. Solids. and Struct., **3**, *5*, 781—794 (1969).
38. R. S. VARGA, *Matrix iterative analysis*, London, Prentice-Hall, 1962.

39. D. GREENSPAN, *Introductory numerical analysis of elliptic boundary value problems*, New York, Harper, 8 Row, 1965.
40. J. H. ARGYRIS, *Energy theorems and strucutural analysis*, London, Butterworths, 1960.
41. M. J. TURTNER, E. W. GLOUGH, H. C. MARTIN, *Stiffness and deflection analysis of conplex structures*, J.A.S., **23**, *9*, 805–823 (1956).
42. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, London, McGraw-Hill, 1971.
43. S. J. FENVES, *Problem oriented computer languages*, Appl. Mech. Reviews **18**, *3* (1965).
44. J. T. OOEN, *Finite elements of non-linear continua*, New York, McGRAW-HILL, 1972.
45. J. ROBINSON, *Structural matrix analysis for engineer*, London, John Wiley & Sons, 1967.
46. R. W. CLOUGH, C. P. JOHNSON, *A finite element approximation for the analysis of thin shells*, Int. J. Solids and Struct., **4**, *1*, 43–60 (1968).
47. J. KHANNA, *Criterion for selecting stiffness matrices*, AIAA J., **3**. *10*, 1956 (1965).
48. B. KLEIN, *Limitation of the finite difference method of structural analysis*, J.A.S., **24**, *10*, 773–775 (1957).
49. R. H. GALLAGHER et al., *A discret element procedure for thin shell instability analysis*, AIAA J., **5**, *1*, 138–145 (1967).
50. R. J. MELOSH, *Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method*, AIAA J., **I**, *7*, 1631–1637 (1963).
51. P. V. MARCAL, *Numerical analysis of the elastic-plastic behavior of axisymmetrically loaded shells of revolution*, J. Mech. Eng. Sci., **5**, *3* (1963).
52. H. C. MARTIN, *Introduction to matrix methods of structural analysis*, London, Mc Graw-Hill Book Comp., 1966.
53. F. W. BEAUFAIT, *Computer methods of strucutural analysis*, N. J. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1970.
54. F. H. NORRIE, G. de VRIES, *The finite element method. Fundamentals and application*, Calgary, Academic Press, 1973.
55. H. H. T. PIAN, P. TONG, *Variational formulation of finite-displacement analysis*, IUTAM Symposium, **61**, 43–64 (1971).
56. M. RUBINSTEIN, *Matrix computer analysis of structures*, N. J. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966.
57. B. F. de VEUBEKE, *Matrix methods of structural analysis*, New York, The Mac-Millan Comp., 1964.
58. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method: from intuition to generality*, Appl. Mech. Rev., **23**, *3*, 249–256 (1970).
59. E. L. WILSON, *Structural analysis of axisymmetric solids*, AIAA J., **3**, *2*, 2269–2274 (1965).
60. Z. ZUDANS, *Survey of advanced structural design analysis technique*, Nuclear Engn. and Design, **10**, 400–440 (1969).
61. B. PAUL, *The shifting roles of compuiers, experiments and analysis in applied mechanics*, Experim. Mech., 1971, *sep.*, 385–393.
62. G. L. RIGBY, G. M. MCNEICE, *A strain energy basis for studies of element stiffness matrices*, AIAA, J., **10**, *II*, 1490–1492 (1972).
63. I. HOLAND K. BELL, *Finite element methods in stress analysis*, Trondheim, Tapir, 1969.
64. J. T. ODEN, *Some results of finite element applications in finite elasticity*, Computers and Structures, **3**, *1*, 175–194 (1973).
65. E. R. A. OLIVEIRA, *Theoretical foundations of the finite-element method*, Int. J. Solids and Struct., **4**, 929–952, (1968).
66. T. H. H. PIAN, P. TONG, *Basis of finite element methods for solid continua*, Int. J. for Numer. Meth. Engng., **I**, **1**, 3–28 (1969).
67. O. C. ZIENKIEWICZ, et al., *Finite element mehods in the analysis of reactor vessels*, Nuclear Engng. and Design., **20**, *2*, 507–541 (1972).
68. B. E. GREENE, et al., *Generalized variational principles in the finite element method*, AIAA J., **7**, *7*, 1254–1260 (1969).
69. P. P. LYNN, K. A. SANTOSH, *Finite elements formulated by the weighted discrete least squares* Int. J. for Numer. Meth. Engng., **8**, *1*, 71–90 (1974).
70. W. M. JENKINS, *Matrix and digital computer methods in structural analysis*, London, McGraw-Hill Comp., 1969.
71. E. ANDERHEGGEN, H. KNOPPFEL, *Finite element analysis using linear programming*, Int. J. Solids and Struct., **8**, *12*, 1413–1431 (1972).
72. J. H. ARGYRIS, *Impact of computers on engineering science*, J.R.Ae.S., **74**, *1*, 13 – 41 (Partea I), 2, III–127 (Partea 2) (1970).
73. S. ATLURI, *An assumed stress hybrid finite element model for linear elastodynamic analysis*, AIAA, J., **II**, *7*, 1028–1031 (1973).

74. N. E. WIBERG, *Matrix structural analysis with mixed variables*, Int. J. Num. Meth. Engng., **8**, *1*, 167—194 1974.
75. J. P. WOLF, *Programme STRIP pour le calcul des structures en surface porteuse*, Bull. Techn. de la Suisse Romande, **97**, *17*, 381—397 (1971).
76. V. A. POSTNOV, I. IA. HARHURIN, *Metod konecinih elementov v rascetah sudovih konstrukţii*, Leningrad, Izd. Sudostroenie, 1974.
77. J. M. ARIBERT et al., *Étude comparative de quelques programmes de calcul de structures*, Annales de l'Inst. Techn. du Batim. et des Travaux Pub., *291*, 153—175 (1972).
78. Z. ZUDANS et al., *A three-dimensional finite element computer code for the analysis of complex structures*, Nuclear Engng. and Design. **20**, *1*, 149 — 167 (1972).
79. J. H. ARGYRIS, *ASKA-Automatic System for Kinematic Analysis*, Nuclear Engng. Design, **10**, *4*, 441—455 (1969).
80. M. K. CHAUDHURY et al., *A numerical method for dynamic analysis of structural frameworks*, Int. J. Mech. Sci., **8**, *3*, 149—162 (1966).
81. R. E. HOBBS, *Dynamic relaxation and model techniques applied to arch dams*, Ph. D. Thesis, London, University, 1967.
82. R. E. NICKELL, *Direct integration methods in structural dynamics*, Proceed. ASCE, J. Engn. Mech. Div., *EM3*, 303—318 (1973).
83. A. S. DAY, *An introduction relaxation*, Engineer, **219**, 218—221 (1965).
84. J. R. H. OTTER, *Computation for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation*. Nucl. Struct. Engng., **1**, *1*, 61—75 (1965).
85. J. R. H. OTTER, *Dynamic relaxation compared with other iterative finite differencemethods*, Nucl. Engng. and Design, **3**, *1*, 183—185 (1966).
86. W. L. WOOD, *Comparison of dynamic relaxation with three other iterative methods*, The Engineer, **224**, 683—687 (1967).
87. W. L. WOOD, *On an explicit numerical method for solving the biharmonic equation*, Numer. Math., **2**, 413—426 (1968).
88. A. C. CASSELL, *Shells of revolution under arbitrary loading and the use of fictitious densities in dynamic relaxation*, Proceed. I.C.E., **45**, *1*, 65—78 (1970).
89. S. P. FRANKEL, *Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations*, Math. Tables Aids Comput., *4*, 65—75 (1950).
90. K. R. RUSHTON, *Dynamic relaxation solutions of elastic plate problems*, J. Strain Analysis, **3**, 23 (1968).
91. — *Large deflection of variable thickness plates*, Int. J. Mech. Sci., **10**, 723—735 3, *23* (1968).
(1968).
92. — *Buckling of laterally loaded plates having initial curvature*, Int. J. Mech. Sci., **14**, *10* 667—680 (1972).
93. — *Postbuckling of tapered plates*, Int. J. Mech.-Sci., 1969, **11**, 461—480.
94. R. D. LYNCH, et al., *The application of dynamic relaxation to the finite element method of structural analysis*, Techn. Rep. 68—I, University of Notre-Dame, 1968.
95. J. S. BREW, D. M. BROTTON, *Nonlinear structural analysis by dynamic relaxation*, Int. J. Numer. Math. Engn., **3**, *4*, 463 — 483 (1971).
96. A. K. WELCH, *Discussion on dynamic relaxation*, Proceed. I.C.E., **37**. *8*, 723—750 (1967).
97. A. K. BASU, J. M. DAWSON, *Orthotropic sandwich plates*, Proceed. I. C. E., 1970, Supplement IV, 87—115.
98. W. L. WOOD, *Note on dynamic relaxation*, Int. J. Numer. Meth. Engng., **3**, *1*, 145—147 (1971).
99. D. J. SEFTON, *A thick shell solution of the tip One Dam using dynamic relaxation*, M. Sci. Thesis, University of London, 1966.
100. W. R. HODKINS, *The relation between dynamic relaxation and semi-iterative matrix methods*, UKAEA Rep. TRG 1929, 1966.

RIGIDITATEA BAREI DREPTE ÎN STATICA, STABILITATEA ŞI DINAMICA STRUCTURILOR*

de I. MUNTEANU, ANA NEGRU
Institutul politehnic „Traian Vuia" Timişoara

În lucrare se studiază în detaliu matricea rigidităţii aferentă celor trei discipline menţionate ; pornind de la matricea rigidităţii din statica de ordinul I se constată ca matricele rigidităţii din statica de ordinul al II-lea, din stabilitate şi din dinamică au termeni asemănători, diferenţa constînd în multiplicarea lor cu funcţii de corectare, care introduc specificul fiecărei discipline.
Lucrarea prezintă o rezolvare unitară a acestor probleme din mecanica structurilor.

1. Într-o lucrare anterioară [1] a fost făcută o analiză a problemelor de statica, stabilitatea şi dinamica structurilor formate din bare. Aspectele au fost studiate în paralel prin metoda forţelor şi prin metoda deplasărilor. Concluziile arătau că, în oricare din problemele menţionate, condiţiile care conduc la rezolvare pot fi puse asupra compatibilităţii deformatei sau asupra echilibrului forţelor ; de aici rezultă că matricele intrinseci, corespunzătoare fiecăreia din cele trei discipline sînt asemănătoare, au o bază comună şi că termeni specifici problemei, le diferenţiază.

În cele de faţă se studiază în detaliu matricea rigidităţii aferentă celor trei discipline menţionate şi deci se utilizează ecuaţiile de echilibru al forţelor.

2. Oricare din problemele de statica, stabilitatea sau dinamica structurilor, rezolvate prin metoda deplasărilor, poate fi scrisă pe baza înlocuirii sistemului real format din structura S şi din acţiunile A date cu un sistem de calcul format dintr-o structură de calcul S^0, din acţiunile date A şi din deplasările D ale nodurilor considerate. Astfel, se poate scrie că :

$(S\,;A)$ $= (S^0\,;A,D)$ sau, detaliat pe cele patru discipline :
— în statica de ordinul I a structurilor :

$(S\,;Q)$ $= (S^0\,;Q,D)$;
— în statica de ordinul al II-lea a structurilor :

$(S\,;Q\,;N)$ $= (S^0\,;Q,N,D)$;
— în stabilitatea structurilor : $(S\,;N=S^0\,;N,D)$
— în dinamica structurilor :
· în problema frecvenţelor proprii θ : $(S\,;I)=(S^0\,;I,D_\theta)$;
· în problema vibraţiilor forţate $\omega(S\,;I,Q_\omega)=(S\,;I,Q_\omega,D_\omega)$.

* Lucrare susţinută la Simpozionul din 17 apr. 1976 la Catedra de construcţii metalice.

Se știe că pentru metoda deplasărilor, structura de calcul, înlocuitoare a celei reale, corespunde unei asamblări a elementelor finite de bară, componente ale structurii reale. În felul acesta structura de calcul are o formă unică, cu nodurile blocate la deplasări. Această situație face ca metoda deplasărilor să se preteze la o sistematizare avansată în calcule.

În baza dualității forță-deplasare, ceea ce în cazul corpului deformabil corespunde dualității efort-deformație, în rezolvarea problemelor mecanicii structurilor prin metoda deplasărilor se vor scrie ecuații de echilibru al forțelor. În felul acesta se observă că metoda deplasărilor este capabilă să rezolve orice problemă legată de o structură, fie că este sau nu static determinată. Ca urmare a celor de mai sus condiția de echilibru al forțelor de pe nodurile considerate va fi :

— în statica de ordinul I a structurilor :

$$\{H\} = [\eta]\{D\} + \{H_Q\} = \{0\},$$

— în statica de ordinul II a structurilor :

$$\{H_{II}\} = [\eta_{II}]\{D_{II}\} + \{H_Q\} = \{0\},$$

— în stabilitatea structurilor :

$$\{H_s\} = [\eta_s]\{D_s\} = \{0\},$$

— în dinamica structurilor :

$$\cdot\{H_0\} = [\eta_d]\{D_0\} = \{0\}, \text{ sau}$$

$$\cdot\{H_\omega\} = [\eta_d]\{D_\omega\} + \{H_{Q\omega}\} = \{0\}.$$

— Elementul curent din matricea $[\eta]$ a rigidității, în cazul problemei de statică, are forma generală :

$$\eta_{ij} = \sum_b \eta_{ij,b},$$

unde b arată bara la care se face referire și care concură cu un capăt în nodul i.

Rezolvînd sistemul de ecuații rezultă vectorul deplasărilor nodurilor și cu acestea eforturile din secțiunile barelor structurii.

— În problema de statică de ordinul al II-lea matricea rigidității diferă de cea corespunzătoare staticii de ordinul I prin termenii specifici barelor puternic comprimate, (N), astfel că :

$$[\eta_{II}] = [\eta] + [\eta_\sigma].$$

Un termen curent din matricea rigidității specifice, $[\eta_\sigma]$, depinde de factorul de compresiune $(\overline{\sigma l}) = l\sqrt{N/EI}$ corespunzător barei b ce concură în nodul i pentru care se calculează termenul $\eta_{\sigma,ij}$, precum și de modul de legare al barei, respectiv de tipul acțiunii ce solicită bara (rotire sau deplasare liniară).

Prin soluționarea sistemului de ecuații rezultă deplasările nodurilor structurii, respectiv starea de eforturi finală.

— Problema de stabilitate utilizează aceeași matrice a rigidității ca problema de statică de ordinul al II-lea. Pentru a determina forța critică

P_{cr} care duce la pierderea stabilității structurii, condiția det $[\eta_s] = 0$, conduce la ecuția de forma

$$f(\eta_{ij}) + f(c(\bar{\sigma}l)) = 0.$$

Soluționînd rezultă valorile parametrului $(\sigma) = (\bar{\sigma}l)$ din care — fiind vorba de pierderea stabilității — se reține numai prima valoare; cu aceasta, prin încercări rezultă valoarea N_{cr} și apoi $P_{cr} = N_{cr}$.

Dacă barele structurii au caracteristici geometrice și mecanice diferite între ele, se va scrie:

$$\eta_{ij,s} = \eta_{ij} \cdot c(\sigma_0),$$

respectiv

$$f(\eta_{ij}) + f(c(\sigma_0)) = 0$$

și deci valoarea $(\sigma_0) = (\bar{\sigma}_0 l_0)$, respectiv o forță critică $P_{cr,0} = N_{cr,0}$; este necesar deci să se exprime, pentru fiecare bară b, ce intră în calcul, termenul

$$\sigma_b = \frac{\sigma_0}{l_0} l_b \sqrt{\frac{N_b}{N_0} \frac{I_0}{I_b}}.$$

— Pentru problema de dinamica structurilor, un termen din matricea rigidității va fi de forma

$$\eta_{ij,d} = \eta_{ij} \cdot c(\delta),$$

fie că este un calcul al frecvențelor proprii, fie un calcul al vibrațiilor forțate.

Coeficientul $c(\delta) = c(\bar{\delta}l)$ depinde de modul de legare al barei de lungime l, precum și de acțiunea aplicată pe capătul barei (rotire sau deplasare liniară).

În calculul frecvențelor proprii pentru a avea soluții distincte, condiția det $|\eta_d| = 0$ conduce la ecuația de forma

$$f(\eta_{ij}) \cdot f(c(\bar{\delta}l)) = 0,$$

respectiv la

$$f(c(\bar{\delta}l)) = 0,$$

de unde, prin încercări, rezultă cele k valori dorite ale parametrului $(\delta) = (\bar{\delta}l)$. Cu aceasta frecvența circulară proprie de rangul k a structurii este

$$\theta_k = (\delta)_k^2 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Dacă barele structurii au caracteristici geometrice și dinamice diferite între ele, se va obține

$$\eta_{ij,d} = \eta_{ij} \cdot c(\delta_0),$$

respectiv $f(c(\delta_0)) = 0$, apoi valorile $(\delta_0)_k$, şi deci

$$\theta_k = (\delta_0)_k^2 \frac{1}{l_0^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}.$$

Se observă că $m_0 = q_0/g$, I_0, l_0, δ_0 sînt caracteristicile barei considerată iniţial şi că pentru bara b oarecare,

$$\delta_b = \frac{\delta_0}{l_0} l_b \sqrt[4]{\frac{m_b}{m_0} \frac{I_0}{I_b}}.$$

În problema dinamică de forţe perturbatoare, funcţia de corectare $c(\delta) = c(\bar{\delta}l)$ depinde de factorul $\bar{\delta} = \sqrt[4]{m\omega^2/EI}$; $m = q/g$.

Termenul liber va fi

$$H_{Q,\omega} = H_Q \cdot c(\delta).$$

3. ACŢIUNI ŞI EFECTE PE BARA TIP

În oricare din problemele puse, bara poate fi de trei tipuri : încastrată la ambele capete, încastrată-articulată şi dublu articulată. Nodurile rigide ale barei pot avea în plan cîte trei deplasări : rotiri după direcţiile $i = 1$ şi 2, deplasări liniare după direcţiile transversale barei $i = 3$ şi 4 şi deplasări liniare în lungul barei, după direcţiile $i = 5$ şi 6. Dacă aceste acţiuni ce sînt aplicate după direcţiile i sînt egale cu unitatea, efectele unitare η_{ji} formează matricea rigidităţilor barei ($j = 1, \ldots, 6$; $i = 1, \ldots, 6$).

În problema de statică, acţiunile sînt formate din deplasările D introduse după direcţiile $i = 1, \ldots, 6$ pe capetele barei.

În problema de stabilitate deplasările capetelor barei se produc în prezenţa unei forţe axiale $N = P$ aplicată după direcţia lungă a barei. În problema de dinamică, deplasările capetelor barei sînt funcţii de timp ($D_i \cdot \cos \omega t$; $i = 1, \ldots, 6$).

Matricea completă a rigidităţii elementului finit de bară, în plan, în oricare din probleme, este de forma

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} & 0 & 0 \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \eta_{24} & 0 & 0 \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \eta_{34} & 0 & 0 \\ \eta_{41} & \eta_{42} & \eta_{43} & \eta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{55} & \eta_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{65} & \eta_{66} \end{bmatrix}.$$

În această matrice au intervenit termenii care ţin seama de încovoiere, de tăiere şi de efort axial.

4. MATRICEA RIGIDITĂȚII ELEMENTULUI FINIT DE BARĂ

Luînd în considerare rotirile și deplasările liniare ale nodurilor, respectiv ale capetelor barelor, se obțin rigiditățile acestora.

— În statica de ordinul I, matricea rigidității elementului finit de bară dublu încastrată este

$$[\eta] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 2 & 4 & \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{12}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{I} & -\frac{A}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & \frac{A}{I} \end{bmatrix}.$$

Pentru bara încastrată-articulată, în mod similar se obține

$$[\eta] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{l} & -\frac{3}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{l} & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{3}{l^2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l} & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{3}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{I} & -\frac{A}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & \frac{A}{I} \end{bmatrix}.$$

În cazul barei dubul articulate matricea rigidității se reduce la forma

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_{55} & \eta_{56} \\ \eta_{65} & \eta_{66} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

— În statica de ordinul al II-lea și în stabilitate, luînd în considerație numai încovoierea barei, respectiv numai acțiunile dirijate după axele

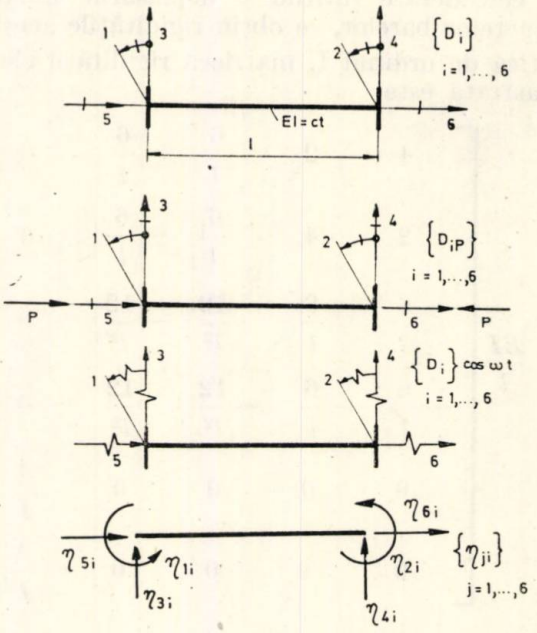


Fig. 1

1, 2, 3 și 4, matricea rigidității se reduce la dimensiunea (4.4); forma ei, pentru bara dublu încastrată, este:

$$[\eta_{II}] = [\eta_s] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 4\sigma_1 & 2\sigma_2 & \frac{6}{l}\sigma_3 & -\frac{6}{l}\sigma_3 \\ 2\sigma_2 & 4\sigma_1 & \frac{6}{l}\sigma_3 & -\frac{6}{l}\sigma_3 \\ \frac{6}{l}\sigma_3 & \frac{6}{l}\sigma_3 & \frac{12}{l^2}\sigma_4 & -\frac{12}{l^2}\sigma_4 \\ -\frac{6}{l}\sigma_3 & -\frac{6}{l}\sigma_3 & -\frac{12}{l^2}\sigma_4 & \frac{12}{l^2}\sigma_4 \end{bmatrix}.$$

În cazul barei încastrată-articulată matricea rigidității devine:

$$[\eta_{II}] = [\eta_s] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 3\sigma_5 & 0 & \frac{3}{l}\sigma_5 & -\frac{3}{l}\sigma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{l}\sigma_5 & 0 & \frac{3}{l^2}\sigma_6 & -\frac{3}{l^2}\sigma_6 \\ -\frac{3}{l}\sigma_5 & 0 & -\frac{3}{l^2}\sigma_6 & \frac{3}{l^2}\sigma_6 \end{bmatrix}.$$

Observație. Prin enunț, pierderea stabilității presupune rotirea capătului barei cu o încovoiere a ei, în prezența unei mari forțe axiale N; de aceea termenii η_{55}, η_{56}, η_{66} pentru problema de stabilitate sînt inconsistenți; în felul acesta dimensiunile matricei s-au redus la (4.4).

— În problema de dinamica construcțiilor, considerînd numai încovoierea barei, în cele ce urmează termenii η_{55}, η_{56} și η_{66} sînt neglijați; astfel dimensiunile matricei rigidității sînt (4.4). Considerarea și a acestor termeni conduce la rezolvarea problemelor de dinamică tot așa ca și a celor de statică, adică cu posibilitatea de a rezolva și structurile cu zăbrele.

Matricea rigidităților elementului finit de bară dublu încastrată este

$$[\eta_{ik}] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 4\delta_1 & 2\delta_2 & \frac{6}{l}\delta_3 & -\frac{6}{l}\delta_4 \\ 2\delta_2 & 4\delta_1 & \frac{6}{l}\delta_4 & -\frac{6}{l}\delta_3 \\ \frac{6}{l}\delta_3 & \frac{6}{l}\delta_4 & \frac{12}{l^2}\delta_5 & -\frac{12}{l^2}\delta_6 \\ -\frac{6}{l}\delta_4 & -\frac{6}{l}\delta_3 & -\frac{12}{l^2}\delta_6 & \frac{12}{l^2}\delta_5 \end{bmatrix}.$$

În cazul barei încastrată-articulată rezultă

$$[\eta_{ik}] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 3\delta_7 & 0 & \frac{3}{l}\delta_8 & -\frac{3}{l}\delta_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{l}\delta_8 & 0 & \frac{3}{l^2}\delta_{10} & -\frac{3}{l^2}\delta_{11} \\ -\frac{3}{l}\delta_9 & 0 & -\frac{3}{l^2}\delta_{11} & \frac{3}{l^2}\delta_{12} \end{bmatrix}.$$

5. FUNCȚIILE DE CORECTARE

Pentru problema de statică de ordinul al II-lea, de stabilitate și de dinamică au intervenit funcțiile de corectare $c(\sigma)$ și $c(\delta)$.

Funcțiile $c(\sigma)$ (notate $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$, în matrice), aferente rigidităților din problema de stabilitate sînt exprimate în raport cu coeficientul $\sigma = l\sqrt{N/EI}$, $(N = P)$ și au aspectul:

$$C_1(\sigma) = \frac{\sigma(\sin\sigma - \sigma\cos\sigma)}{4(2 - 2\cos\sigma - \sigma\sin\sigma)},$$

$$C_2(\sigma) = \frac{\sigma(\sigma - \sin\sigma)}{2(2 - 2\cos\sigma - \sigma\sin\sigma)},$$

$$C_3(\sigma) = \frac{\sigma^2(1 - \cos\sigma)}{6(2 - 2\cos\sigma - \sigma\sin\sigma)},$$

$$C_4(\sigma) = \frac{\sigma^3 \sin\sigma}{12(2 - 2\cos\sigma - \sigma\sin\sigma)},$$

$$C_5(\sigma) = \frac{\sigma^2 \sin\sigma}{3(\sin\sigma - \sigma\cos\sigma)},$$

$$C_6(\sigma) = \frac{\sigma^3 \cos\sigma}{3(\sin\sigma - \sigma\cos\sigma)}.$$

Funcţiile de corectare $c(\delta)$, (notate $\delta_1, \ldots, \delta_{12}$, în matrice) aferente rigidităţilor din problema dinamică, sînt :

$$C_1(\delta) = \frac{\delta(\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta)}{4(1 - \mathrm{ch}\delta\cos\delta)},$$

$$C_2(\delta) = \frac{\delta(\mathrm{sh}\delta - \sin\delta)}{2(1 - \mathrm{ch}\delta\cos\delta)},$$

$$C_3(\delta) = \frac{\delta^2(\mathrm{sh}\delta\sin\delta)}{6(1 - \mathrm{ch}\delta\cos\delta)},$$

$$C_4(\delta) = \frac{\delta^2(\mathrm{ch}\,\delta - \cos\delta)}{6(1 - \mathrm{ch}\delta\cos\delta)},$$

$$C_5(\delta) = \frac{\delta^3(\mathrm{sh}\delta\cos\delta + \mathrm{ch}\delta\sin\delta)}{12(1 - \mathrm{ch}\delta\cos\delta)},$$

$$C_6(\delta) = \frac{\delta^3(\mathrm{sh}\delta + \sin\delta)}{12(1 - \mathrm{ch}\delta\cos\delta)},$$

$$C_7(\delta) = \frac{2}{3}\delta\frac{\mathrm{sh}\delta\sin\delta}{\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta},$$

$$C_8(\delta) = \frac{\delta^2}{3}\frac{\mathrm{sh}\delta\cos\delta + \mathrm{ch}\delta\sin\delta}{\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta},$$

$$C_9(\delta) = \frac{\delta^2}{3}\frac{\mathrm{sh}\delta + \sin\delta}{\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta},$$

$$C_{10}(\delta) = \frac{\delta^3}{3}\frac{2\,\mathrm{ch}\delta\cos\delta}{\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta},$$

$$C_{11}(\delta) = \frac{\delta^3}{3}\frac{\mathrm{ch}\delta + \cos\delta}{\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta},$$

$$C_{12}(\delta) = \frac{\delta^3}{3}\frac{1 + \mathrm{ch}\delta\cos\delta}{\mathrm{ch}\delta\sin\delta - \mathrm{sh}\delta\cos\delta}.$$

6. CONCLUZII

Din cele parcurse rezultă cîteva concluzii :

— Concepția după care au fost studiate problemele de statică I și II, de stabilitate și de dinamică este unitară ; ea se bazează pe studiul elementului finit de bară, determinarea eforturilor ca funcții de deplasările de nod și asamblarea rezultatelor ;

— Matricea rigidității, după modul în care este construită, permite o abordare unitară a calculului în oricare din cele patru probleme ;

— Exprimarea funcțiilor de corectare a rigidităților în mod specific pentru stabilitate sau pentru dinamică, permite calculul numeric al lor după programe automate, în momentul cînd este necesar ;

— Utilizarea metodei deplasărilor permite scrierea unor algoritmi de calcul și o programare mai ușoară decît metoda forțelor ;

— Aplicarea metodei deplasărilor și a rezultatelor de mai sus se poate face și în cazul unor bare imperfect legate în noduri, sau pe lungimea lor, într-un calcul plastic prin etape, în toate aceste situații aducîndu-se corectări specifice.

Primită la redacție la 15 mai 1976

BIBLIOGRAFIE

1. I. MUNTEANU, *Asupra unor probleme din teoria structurilor*, St. cerc. mec. apl., **34**, 2 (1975).
2. I. MUNTEANU, *Calculul structurilor spațiale în formulare matriceală*, Ed. Facla, Timișoara, 1973.
3. I. P. PROKOFIEV, A. F. SMIRNOV, *Statica construcțiilor*, OPED — CFR, 1951.
4. V. A. KISELEV, *Stroitelnaia mehanika*, Moskva, 1964.
5. A. SCARLAT, *Stabilitatea și calculul de ordinul II al structurilor*. E. T. București, 1969.
6. V. BĂNUȚ, C. H. POPESCU, *Stabilitatea structurilor elastice*, Ed. Academiei, 1975.

ASUPRA UNEI METODE DE CALCUL ÎN FOTOMECANICA BIDIMENSIONALĂ

de T. HUIDU

Universitatea din București

Se prezintă o metodă de separare a tensiunilor normale, determinînd inițial suma tensiunilor normale din datele experimentale obținute prin metoda numită a fotoelasticității. Este analizată problema surselor principale de erori în fotomecanică și se fac considerații asupra aplicării metodei date la cazul neelastic. Lucrarea se încheie cu o aplicație care permite să se compare soluția matematică cu cea obținută prin metoda descrisă. S-a utilizat calculatorul electronic.

1. INTRODUCERE

Este cunoscut faptul că folosind tehnicile așa-zise ale fotoelasticității, se obțin pe cale experimentală, în orice punct al domeniului (modelului fotoelastic) studiat $\mathcal{D}$, două mărimi — ordinul franjei numită izocromată, pe care-l notăm cu m, și parametrul izoclinei, notat cu α_I — ambele funcții de coordonatele carteziene bidimensionale x și y la care este raportat domeniul $\mathcal{D}$. Definițiile și proprietățile celor două mărimi sînt date în orice carte sau tratat de fotoelasticitate sau de analiză experimentală a tensiunilor, printre care citățm pe Frocht [1], Dally și Riley [2], Durelli și Riley [3] și Iosipescu [4].

În cele ce urmează se prezintă o metodă de calcul ale componentelor bidimensionale ale tensorului tensiune, folosind datele experimentale (adică mărimile m și α_I) furnizate de tehnica fotoelasticității și o parte din ecuațiile în tensiuni ale teoriei clasice a elasticității și plasticității. De asemenea, se vor face unele considerații asupra problemei erorilor care apar în fotomecanică și se va aplica „metoda de separare" propusă la cazul concret al discului circular solicitat la compresiune diametrală pentru care, cunoscîndu-se soluția matematică, se poate face o comparație între aceasta și soluția furnizată de fotoelasticitate.

Metode de separare a tensiunilor se găsesc în oricare din cărțile citate mai înainte, iar dintre metodele de obicei prezentate în cărți, cea mai utilizată este metoda diferenței tensiunilor tangențiale a lui Frocht [1]. Metoda care urmează s-o prezentăm constituie o extensie și o îmbunătățire a metodei lui Frocht, prezentînd anumite avantaje față de aceasta din urmă, așa cum se va putea observa la momentul potrivit.

După cum se știe, problema plană în tensiuni a teoriei clasice a elasticității constă în determinarea a trei funcții σ_x, σ_y și τ_{xy} de coordonatele

x și y care satisfac următorul sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0, \tag{2}$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right). \tag{3}$$

unde F_x, F_y sînt forțe masice, ν — coeficientul lui Poisson, iar $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ este operatorul Laplacian. La ecuațiile de mai sus se atașează condițiile la limită corespunzătoare.

Între componentele tensorului tensiune $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ pe de o parte și componentele principale ale acestui tensor (σ_1, σ_2) și unghiul α pe care-l face direcția lui σ_1 cu axa Ox (α sau $\alpha + 90°$ fiind și parametrul izoclinei optice α_I) pe de altă parte, există relațiile

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \tag{4}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \tag{5}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \tag{6}$$

În locul relațiilor (4) și (5) se poate scrie relația

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha. \tag{7}$$

Notînd cu σ_0 constanta fotoelastică a modelului (domeniului $\mathcal{D}$), ecuația curbelor izocromate este dată de

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_1 - \sigma_2 = m\sigma_0. \tag{8}$$

Astfel că din punct de vedere al fotoelasticității problema se pune de a determina componentele $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, cunoscînd mărimile (m, α) sau mărimile $(\sigma_1 - \sigma_2, \alpha)$ în orice punct al domeniului $\mathcal{D}$. Este evident că din datele experimentale (m, α) se pot determina imediat în orice punct al lui $\mathcal{D}$, mărimile $(\sigma_x - \sigma_y)$ și τ_{xy}. Găsirea (separarea) tensiunilor normale σ_x, σ_y constituie deci problema principală cu care se ocupă această lucrare în continuare.

Facem observaţia că mărimea m este un număr întreg nenegativ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) pe curbele izocromate obţinute pentru o poziţie standard de extincţie a elementelor aparatului de fotoelasticitate (polariscopului). Pentru orice punct al domeniului $\mathcal{D}$, însă, m este o funcţie de x şi y aşa cum am afirmat mai înainte. Aşadar, vom presupune că mărimile m şi α_I determinate experimental sînt funcţii de două variabile x şi y şi de aceeaşi clasă ca şi funcţiile σ_x, σ_y şi τ_{xy}. La fel sînt şi celelalte funcţii pe care le vom defini ca o combinaţie de acestea. În cazul comportării vîscoelastice a mediului considerat, funcţiile respective vor depinde şi de timp şi eventual de temperatură. Datele experimentale au fost obţinute prin citiri directe la aparat, punct cu punct, folosind procedeele obişnuite [2, 3].

2. NOTAŢII ŞI DEFINIŢII

Dacă notăm

$$\sigma_{11} = \sigma_x = X(x, y) = X, \qquad \sigma_{22} = \sigma_y = Y(x, y) = Y,$$

$$\sigma_{12} = \tau_{xy} = T(x, y) = T, \qquad m(x, y) = m, \quad \alpha(x, y) = \alpha, \tag{9}$$

$$X - Y = D(x, y) = D, \quad X + Y = S(x, y) = S,$$

avem, evident,

$$X = \frac{1}{2}(S + D), \quad Y = \frac{1}{2}(S - D), \tag{10}$$

iar relaţiile (1) — (8), în absenţa forţelor masice, devin, respectiv

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

$$\nabla^2 S = 0, \tag{13}$$

$$X = \frac{1}{2}(S + m\,\sigma_0 \cos 2\alpha), \tag{14}$$

$$Y = \frac{1}{2}(S - m\,\sigma_0 \cos 2\alpha), \tag{15}$$

$$T = \frac{1}{2} m\,\sigma_0 \sin 2\alpha, \tag{16}$$

$$D = m\sigma_0 \cos 2\alpha\,, \tag{17}$$

$$D^2 + 4T^2 = m^2\sigma_0^2. \tag{18}$$

Trebuie observat faptul că în cazul în care $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$, relația

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{max} = \frac{m\sigma_0}{2}, \tag{19}$$

reprezintă forfecarea maximă principală într-un punct. Dacă există puncte ale lui $\mathscr{D}$, unde σ_1 și σ_2 au același semn, tensiunea maximă de forfecare nu apare în acele puncte, iar relația (19) reprezintă forfecarea maximă secundară.

Semnul tensiunilor principale se determină folosind procedeul de compensație al lui Tardy [2, 3]. În continuare vom vedea cum se determină semnul funcțiilor D și T obținute din datele experimentale.

Întrucît în cele ce urmează vom considera că $\sigma_1 > \sigma_2$, adică $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$, adică $m > 0$, iar $\sigma_0 > 0$, atunci din relațiile (16) și (17), rezultă referitor la semnul lui T și D respectiv :

$$\text{sign}(T) = \text{sign}(\sin 2\alpha), \tag{20}$$

$$\text{sign}(D) = \text{sign}(\cos 2\alpha). \tag{21}$$

Egalitatea (20) conduce la sistemul de inegalități :

$$\begin{aligned} &T > 0 \text{ pentru } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ &T < 0 \text{ pentru } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \end{aligned} \tag{22}$$

iar (21) conduce la condițiile

$$\begin{aligned} &D > 0 \text{ pentru } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \text{și} \quad \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi, \\ &D < 0 \text{ pentru } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}. \end{aligned} \tag{23}$$

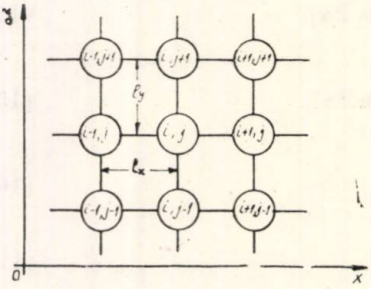


Fig. 1

Facem observația că notațiile adoptate anterior permit o scriere mai simplificată atunci cînd ecuațiile și relațiile cu care se manevrează vor fi scrise în diferențe finite.

O funcție $F(x, y)$, care poate să fie oricare din funcțiile de mai înainte, se va scrie într-un nod oarecare (i, j) al rețelei de noduri ce acoperă domeniul $\mathscr{D}$ (fig. 1), astfel

$$[F(x, y)]_{i,j} = (F)_{i,j} = F_{i,j} \; (i, j = 0,1,2, \ldots) \tag{24}$$

și $F_{i,j}$ va reprezenta valoarea funcției respective în nodul (i, j). Variabilele x și y ale funcției F, vor apare inițial și ele notate formal cu doi indici, astfel încît valorile lor în același nod vor fi $x_{i,j}$ și $y_{i,j}$.

În funcție de situația concretă pe care o vom întîlni, vom considera pentru derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției F, aproximațiile care urmează :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},\,j} \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{l_x}, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2l_x}, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2l_y}, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},\,j} \approx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{i+1,j} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{i,j}\right], \tag{28}$$

unde cu l_x s-a notat distanța constantă dintre două noduri de pe o direcție paralelă cu axa Ox, iar cu l_y distanță dintre două noduri de pe o direcție paralelă cu Oy. Considerații privind erorile, care apar în metoda de calcul propusă, vor fi făcute într-un paragraf următor.

3. METODA DE CALCUL PROPUSĂ

Înlocuind relațiile (10) în ecuațiile de echilibru (11) și (12), se obține un nou sistem de ecuații de echilibru referitor la funcțiile T, D, și S :

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial x} + 2\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial y} + 2\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{30}$$

Pentru nodul $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$, ecuația (29) se mai poate scrie și

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},\,j} = -\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},\,j} - 2\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},\,j}, \tag{31}$$

unde, folosind formula (25) pentru derivatele $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial D}{\partial x}$, iar pentru deri-

vata $\frac{\partial T}{\partial y}$ formulele (28) și (27), pentru nodurile unei direcții paralelă cu Ox se obține

$$S_{i+1,j} = S_{i,j} + D_{i,j} - D_{i+1,j} - \left[(T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1}) \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}} + \right.$$

$$\left. + (T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}} \right]. \tag{32}$$

O formulă analogă se poate obține plecînd de la ecuația (30), pentru nodurile unei direcții paralelă cu axa Oy.

Ținînd seama de schimbarea de semn care poate avea loc în domeniul $\mathcal{D}$, privind diferențele coordonatelor x și y, adică pentru l_x și l_y, formula (32) se scrie :

$$S_{i+1,j} = S_{i,j} + D_{i,j} - D_{i+1,j} -$$

$$- \frac{1}{2} \left| \frac{l_x}{l_y} \right| \operatorname{sign} \left(\frac{l_x}{l_y} \right) (T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} + T_{i,j+1} - T_{i,j-1}), \tag{33}$$

pentru o direcție paralelă cu axa Ox; astfel încît pentru $j = \text{const.}$ și $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, formula (33) furnizează toate valorile funcției S în nodurile de pe paralela j la axa Ox, dacă se cunosc : S în nodul $i = 0$ și funcțiile T și D în toate nodurile $i = 0, 1, 2, \ldots$ (fig. 1). În cazul în care direcția de indice j este axă de simetrie geometrică și mecanică, adică $T_{i+1,j+1} = -T_{i+1,j-1}$ și $T_{i,j+1} = -T_{i,j-1}$, formula (33) devine, evident,

$$S_{i+1,j} = S_{i,j} + D_{i,j} - D_{1+1,j} - \left| \frac{l_x}{l_y} \right| \operatorname{sign} \left(\frac{l_x}{l_y} \right) (T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1}). \tag{34}$$

De aici rezultă că metoda dată pentru calculul funcției S este aplicabilă în toate punctele domeniului $\mathcal{D}$, chiar și cele de pe axa de simetrie. Pentru aceste din urmă puncte, Frocht a dat o altă metodă.

Observații.

1. Aplicînd tratamentul de mai sus ecuației diferențiale (11), se obține formula

$$X_{i+1,j} = X_{i,j} - \frac{1}{4} \left| \frac{l_x}{l_y} \right| \operatorname{sign} \left(\frac{l_x}{l_y} \right) (T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} + T_{i,j+1} - T_{i,j-1}), \tag{35}$$

pe care o considerăm mai sugestivă decît cea dată de Frocht [1], prin precizările pe care le conține asupra semnului și asupra nodurilor luate în considerație. Evident că formula (35) își reduce numărul de termeni pentru o axă de simetrie.

2. Spre deosebire de formula (35), formula (33) are avantajul că permite calculul funcției S după orice direcție paralelă cu una din axe

(aici axa Ox), fără să fie necesară rezolvarea ecuației lui Laplace (13) în tot domeniul $\mathcal{D}$. Cunoscînd funcțiile S și D se pot calcula (separa) funcțiile X și Y, cu ajutorul formulelor (10).

3. Formulele (33) și (35) conduc la aceleași valori pentru X, și Y în nodurile corespunzătoare (vezi ultimul paragraf).

4. Transcrierea ecuațiilor diferențiale în ecuații cu diferențe finite, dă posibilitatea traducerii acestor ultime ecuații în limbajul calculatorului [8], spre deosebire de ecuațiile obținute de Frocht, care nu reflectă suficient de bine acest avantaj. În plus, formulele (33) și (35) sînt scrise pentru un nod oarecare (i, j).

4. CONSIDERAȚII ASUPRA PROBLEMEI ERORILOR

Problema erorilor în fotomecanică trebuie privită cel puțin din două puncte principale de vedere, corespunzătoare celor două surse principale de erori. O primă sursă de erori apare în urma transcrierii ecuațiilor diferențiale în ecuații cu diferențe finite, ceea ce se reflectă direct asupra funcțiilor X și Y datorită alegerii defectuoase a pasului rețelei de noduri l_x(și l_y), ca și a numărului prea mare de noduri. A doua sursă de erori se referă la imprecizia citirii la aparat a mărimilor m și α_1 (determinate experimental), citiri care se reflectă mai întîi asupra funcțiilor experimentale T și D și după aceea asupra funcțiilor X și Y.

Referitor la prima sursă de erori, există teoreme de convergență și de stabilitate a soluției ecuațiilor în diferențe finite, care—cel puțin pentru tipul de ecuații utilizate aici — asigură posibilitatea găsirii unui pas l, al rețelei de noduri, suficient de mic, astfel încît să se ajungă la valori ale unei funcții F_k în diferențe finite, care să se deosebească oricît de puțin dorim de valorile exacte ale funcției F, în punctele corespunzătoare ale domeniului dat $\mathcal{D}$[5], [6].

În ceea ce privește erorile experimentale, vom vedea că ele afectează soluția în mod diferit în diverse puncte ale domeniului $\mathcal{D}$. Să considerăm relațiile care dau erorile absolute ale mărimilor cunoscute α, m și T :

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e, \quad \Delta m = m - m_e, \quad \Delta T = T - T_e,$$

unde cu indicele e s-a notat mărimea în cauză determinată experimental, iar fără indice valoarea exactă a acelei mărimi.

Întrucît

$$T = \frac{\sigma_0}{2} m \sin 2\alpha,$$

$$T_e = \frac{\sigma_0}{2} (m - \Delta m)\sin 2(\alpha - \Delta\alpha), \tag{36}$$

și considerînd $\Delta\alpha$ și Δm suficient de mici, rezultă

$$\Delta T \approx \frac{\sigma_0}{2} (\Delta m \sin 2\alpha + 2m\Delta\alpha\cos 2\alpha) \tag{37}$$

și atunci eroarea relativă a lui T se scrie

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T} = \varepsilon_m + 2\Delta\alpha \operatorname{cotg} 2\alpha, \tag{38}$$

unde $\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m}$ este eroarea relativă a lui m, ceea ce înseamnă că ε_T depinde de precizia de măsurare a mărimilor m și α. Observînd că

$$\lim_{\alpha \to 45^\circ} \operatorname{cotg} 2\alpha = 0 \text{ și } \lim_{\substack{\alpha \to 0^\circ \\ \alpha \to 90^\circ}} \operatorname{cotg} 2\alpha = \pm \infty,$$

sîntem conduși la concluzia că la calculul funcției T este necesar să se evite nodurile din vecinătatea izoclinelor $\alpha = 0^\circ$ și $\alpha = 90^\circ$. În cazul în care sîntem obligați de situația concretă existentă de a considera astfel de noduri — ca în cazul axelor de simetrie geometrică și mecanică —, nodurile trebuie luate la o distanță mai mare de o parte și de alta a axei de simetrie și la o distanță mai mare între ele, dat fiind faptul că prin diferențe finite erorile se acumulează de la un pas la altul. Este de așteptat faptul că se poate găsi un pas l (sau un raport al pașilor l_x/l_y) optim pentru o anume direcție pe care se găsesc noduri. Adoptarea soluției de alegere a cîtorva pași diferiți pentru aceeași direcție ar fi singura posibilitate, deocamdată, care ne poate furniza informații prețioase asupra pasului mai bun care trebuie considerat, concluzie care va fi dovedită cu ocazia prezentării aplicației din ultimul paragraf al acestei lucrări.

Procedînd în mod analog cu funcția D, se obține eroarea absolută a acestei funcții, dată de formula

$$\varepsilon_D = \varepsilon_m + 2\,\Delta m \operatorname{tg} 2\alpha,$$

care funcție este susceptibilă la erori mari în vecinătatea unghiurilor $\alpha = 45^\circ$ și $\alpha = 135^\circ$ [8].

5. CAZUL NEELASTIC

Se intuiește ușor că în măsura în care se pot pune în evidență materiale polimere transparente și birefringente accidental, care să posede un domeniu suficient de mare pentru deformația plastică, iar datele experimentale obținute (m și α_I) pentru ambele domenii — elastic și plastic — — să fie aceleași, atunci metoda de calcul prezentată poate fi folosită în ambele cazuri [8].

Presupunînd, deci, că este stabilită o lege tenso-optică și că sînt determinate direcțiile tensiunilor principale, atunci devine posibilă determinarea funcțiilor experimentale T și D ale fotomecanicii bidimensionale, în orice punct al domeniului $\mathcal{D}$, și se poate aplica metoda descrisă de separare a tensiunilor X și Y pentru ambele stări de tensiune. Că lucrurile stau astfel este adevărat deoarece pentru soluționarea problemei în tensiuni în

domeniul elastic sau plastic trebuie să fie satisfăcute trei condiții : ecuațiile de echilibru, condițiile de contur și condițiile de compatibilitate. Îndeplinirea acestor condiții este cerută de distribuția de tensiuni în model. Se observă ușor că soluțiile obținute experimental satisfac automat condițiile de compatibilitate în tensiuni chiar și pentru domeniul plastic. Pentru determinarea deformațiilor se folosește legea fizică, care dă dependența tensiunilor de deformații.

6. VERIFICAREA METODEI DE CALCUL PROPUSE

Într-o lucrare publicată în anul 1971 a fost aplicată — în două variante — metoda lui Frocht [1] la cazul concret al unui model de eclisă de la lanțurile de foraj [9]. În cele ce urmează, valorile funcțiilor X, Y și T, determinate prin metoda de calcul descrisă anterior, sînt comparate cu valorile respective obținute direct din soluția matematică a problemei unui disc circular supus la o compresiune diametrală provocată de două forțe concentrate $P = 91$ Kgf, după direcția axei Oy. Discul circular are raza $R = 2{,}54$ cm, grosimea $h = 0{,}635$ cm și distanța minimă între două noduri ale rețelei (pasul rețelei) ortogonale trasată $l = 0{,}3175$ cm, atît în direcția axei Ox, cît și în direcția axei Oy. Constanta fotoelastic a modelului (discului sau domeniului $\mathcal{D}$) a fost $\sigma_0 = 22$ Kgf/cm^2 franjă. Calculul de verificare a fost făcut pentru două secțiuni (direcții) din planul discului circular : axa sau secțiunea de simetrie, adică axa Ox, notată cu S_0 și o axă paralelă cu aceasta, la distanța $y = 0{,}635$ cm, notată cu S_1.

Tabloul de curbe izocromate, obținut pentru o poziție standard a elementelor polariscopului cu cîmp întunecat, se găsește în figura. 2. Datele experimentale citite în nodurile rețelei considerate sînt prezentate în figura 3, unde cantitățile de deasupra nodurilor indică valoarea unghiului pe care îl face direcția lui σ_1 cu axa Ox, măsurat în sens trigonometric direct de la direcția lui Ox spre direcția lui σ_1, în acel punct, iar cantitățile de desubtul nodurilor reprezintă ordinul izocromatei m, respectiv.

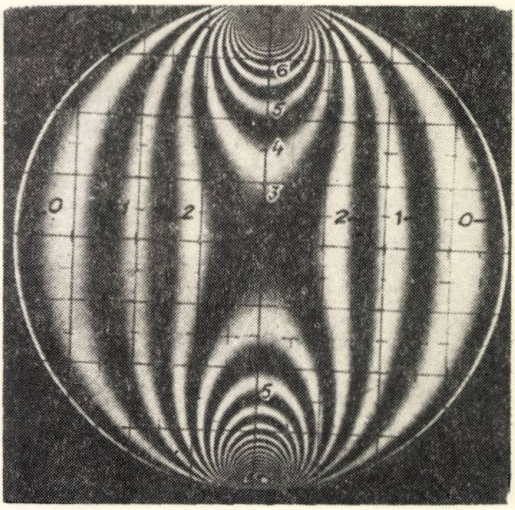


Fig. 2

Notîndu-se cu l distanța minimă între două noduri, atît în direcția axei Ox cît și în direcția axei Oy, au fost considerate următoarele valori ale raportului acestor distanțe :

$$\frac{l_x}{l_y} = \frac{l}{2l}, \frac{l}{4l}, \frac{2l}{2l}, \frac{2l}{4l}, \text{ unde } l = 0{,}3175 \text{ cm.}$$

Valorile teoretice ale funcțiilor X, Y și T au fost calculate cu ajutorul formulelor date în Vol. II al lui Frocht [1].

Atît valorile teoretice cît şi cele experimentale, corespunzătoare funcţiilor X, Y şi T se găsesc reprezentate grafic în figurile 4*a* şi 4*b*, pentru axa de simetrie ($y = 0$) şi, respectiv, pentru secţiunea $y = 0{,}635$ cm.

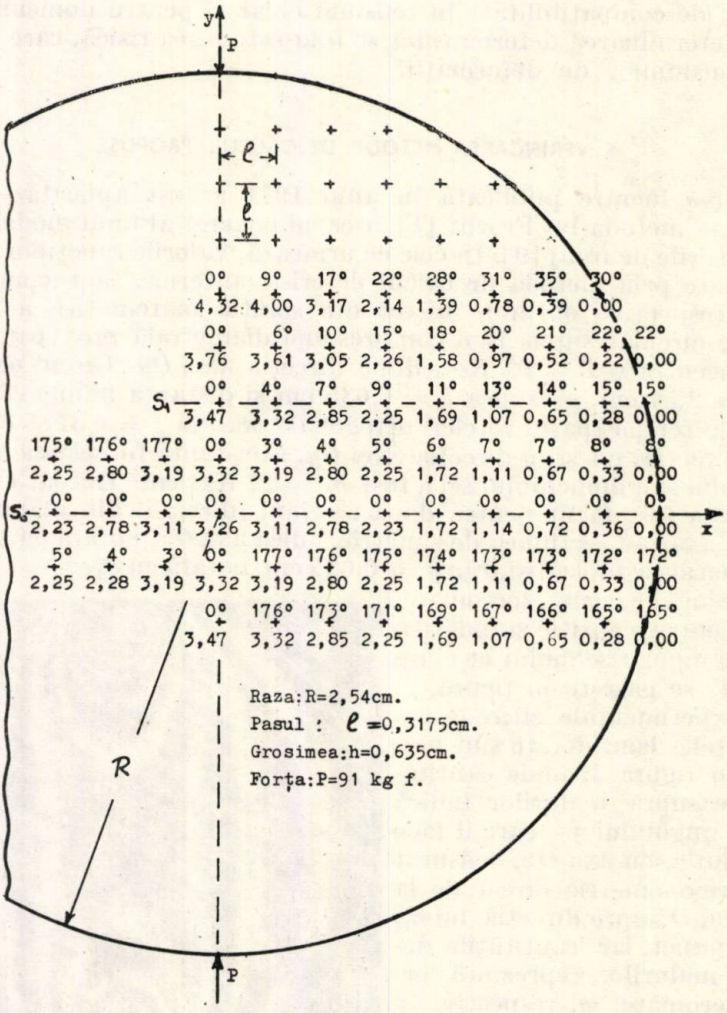


Fig. 3

Calculele au fost făcute la calculatorul electronic IBM de la Centrul de calcul al Universităţii din Bucureşti, iar pentru asistenţa tehnică acordată se cuvine a mulţumi colegului nostru Dumitru Drăghiciu.

În urma datelor experimentale obţinute şi a calculelor efectuate, rezultă următoarele concluzii [8]:

1. Formulele (35) şi (37) conduc la aceleaşi valori pentru funcţiile X, Y şi T în punctele corespunzătoare ale secţiunilor S_0 şi S_1 considerate. Aşa cum am mai afirmat, formula (35) prezintă avantajul suplimentar că

permite calculul funcției S, sumă a tensiunilor principale, după o direcție paralelă cu axa Ox, fără a fi necesară rezolvarea ecuației lui Laplace în tot domeniul dat.

2. Comparînd valorile funcțiilor X și Y obținute pe cale analitică cu valorile aceloraşi funcții obținute pe calea metodei propusă anterior, se poate afirma că valorile experimentale cele mai apropiate de cele analitice, referitoare la funcția X, se obțin pentru $\frac{l_x}{l_y} = \frac{2l}{4l}$, rezultînd o eroare relativă a lui X_{max}, $\varepsilon_{x_{max}} < 1\,\%$ în secțiunea S_0, în timp ce în aceeași secțiune S_0, pentru $\frac{l_x}{l_y} = \frac{l}{2l}$ s-a obținut o eroare $\varepsilon_{x_{max}} \approx 22\,\%$ (fig. 4*a*). Au fost considerate ca valori exacte acelea determinate analitic, din soluția matematică. De remarcat faptul că pentru același raport $\frac{l_x}{l_y} = \frac{l}{2l}$ s-a obținut în secțiunea S_1 eroarea relativă $\varepsilon x_{max} \approx 7\,\%$ (fig. 4*b*), adică de trei ori mai mică decît în secțiunea S_0. Creșterea erorilor în secțiunea de simetrie era de așteptat, conform observațiilor făcute în paragraful anterior, deoarece această secțiune corespunde unghiului $\alpha_1 = 0°$ și $90°$.

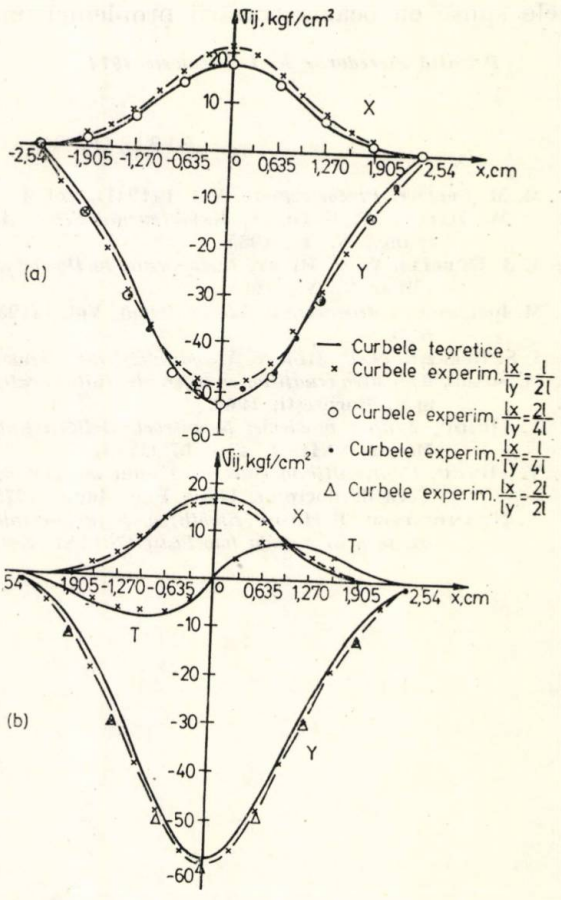


Fig. 4

3. Erorile relative apărute la calculul funcției X, se transmit și asupra funcției Y, dar aceste din urmă erori sînt mai mici.

4. Evident că erorile în determinarea funcției T, nedepinzînd de rețeaua de noduri aleasă, sînt influențate numai de imprecizia determinării datelor experimentale.

5. O atenție deosebită trebuie acordată și la determinarea mărimilor experimentale m și α_I pe conturul liber de sarcini exterioare al domeniului considerat, deoarece eventualele erori apărute cu această ocazie influențează valoarea componentelor tensorului tensiune (X, Y, T) în toate punctele din interiorul domeniului studiat.

6. Ca o observație finală rezultă faptul că imprecizia în determinarea datelor experimentale — minoră la prima vedere — poate conduce la

erori mari ale componentelor tensorului tensiune, în punctele unei anumite regiuni a domeniului dat, dacă nu se face o alegere convenabilă a pasului rețelei de noduri, în timp ce pentru punctele altei regiuni erorile obținute pot fi acceptabile, pentru aceleași distanțe între noduri, fapt care confirmă cele spuse cu ocazia tratării problemei erorilor.

Primită la redacție la 7 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. Frocht, *Photoelasticity*, Vol. I (1941), Vol. II (1948), Wiley, New York.
2. J. W. Dally, W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., N. Y., 1965.
3. A. J. Durelli, W. F. Riley, *Introduction to Photomechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1965.
4. M. Iosipescu, *Introducere în fotoelasticitate*, Vol. I (1958) și Vol. II (1960), Ed. tehnică, București.
5. I. S. Berezin, N. P. Jidkov, *Metodi vicislenii*, Fizmatgiz, M., 1959.
6. M. Soare, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri*, Ed. Academiei, București, 1968.
7. T. Huidu, *Asupra problemei fotoviscoelasticității liniare*, Analele Univ. Buc., Matemat. — Mecan. **XXII**, *1*, 47 — 67 (1973).
8. T. Huidu, *Contribuții la elaborarea unui model matematic și experimental al fotomecanicii*, Teză de doctorat, Univ. Buc., iunie, 1975.
9. N. N. Antonescu, T. Huidu, *Stabilirea eforturilor unitare din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte prin metoda fotoelasticității*, St. cerc. mec. apl., **30**, 627 — 643 (1971).

CERCETĂRI TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE PRIVIND GRINZILE PEREȚI DIN BETON ARMAT *

de C. ÁVRAM și R. FRIEDRICH
Institutul politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Grinzile pereți din beton armat sînt relativ puțin studiate, lipsind mai ales cercetări sistematice privind influența golurilor asupra comportării lor. Lucrarea de față contribuie la elucidarea acestei probleme atît în stadiul elastic, cît și în stadiile postelastice ale betonului armat.

1. STADIUL ELASTIC

1.1. METODE DE CALCUL

Dintre metodele numerice pentru rezolvarea problemei plane a teoriei elasticității, metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite sînt cele mai generale.

1.1.1. Diferențe finite

Utilizînd o funcție de tensiuni de tip Airy, ecuația cu derivate parțiale

$$F_{4x} + 2F_{2x2y} + F_{4y} = 0 \qquad (1)$$

se înlocuiește, în cazul discretizării pe două direcții, printr-un sistem de ecuații algebrice. Pentru deducerea operatorilor de discretizare se poate utiliza *colocația punctuală* [1]. Cu coordonatele adimensionale din figura 1,

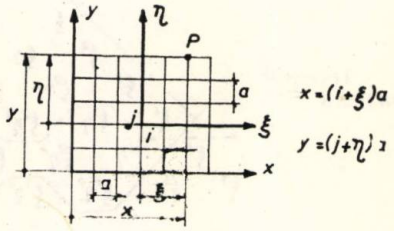


Fig. 1. — Coordonate adimensionale

* Lucrarea prezentată la cea de a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

funcţia înlocuitoare este de forma

$$\Phi(\xi, \eta) = S(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)\, Z(\xi, \eta). \tag{2}$$

Funcţia P asigură identitatea valorilor de bază ale lui S şi Φ pentru orice funcţie suplimentară Z.

Considerînd subdomeniul din figura 2*a* şi făcînd colocaţia în centrul acestuia, funcţia de bază S cuprinde termenii din figura 3*a*, funcţia suplimentară Z nefiind necesară. Subdomeniului din figura 2*b* îi corespund termenii din figura 3*b* şi funcţiile

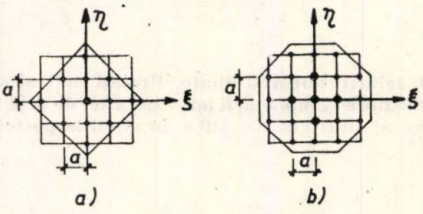


Fig. 2. — Domeniile operatorilor de discretizare pe două direcţii

$$\begin{aligned} Z(\xi, \eta) &= k_1\xi + k_2\eta + k_3\xi^2 + k_4\eta^2, \\ P(\xi, \eta) &= \xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 4) + \eta(\eta^2 - 1)(\eta^2 - 4), \end{aligned} \tag{3}$$

pentru eliminarea celor patru parametri k fiind necesară colocaţia în cele cinci noduri indicate în figura 2*b*.

Avantajele procedeului colocaţiei constau în aceea că permite obţinerea, pe lîngă operatorii de discretizare, a unor expresii analitice pentru F — pe subdomenii — şi prin derivarea acestora a variaţiei tensiunilor. De asemenea, prin alegerea corespunzătoare a funcţiilor de bază S şi a celor suplimentare Z se poate mări precizia operatorilor. În sfîrşit, prin folosirea colocaţiei este uşurată utilizarea reţelelor cu paşi variabili.

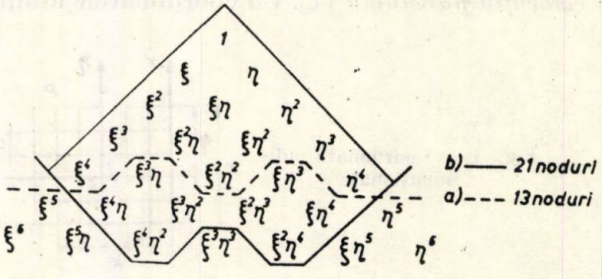


Fig. 3. — Termenii funcţiei S

Pentru exemplificare s-au dedus operatorii de bază cu diferenţe finite obişnuite şi cei plurilocali, în vederea discretizării ecuaţiei cu derivate parţiale a şaibelor armate ortogonal, uniform (fig. 4):

$$\alpha_{xx}F_{4x} + 2\alpha_{xy}F_{2x2y} + \alpha_{yy}F_{4y} = 0, \tag{4}$$

sau, în coordonate adimensionale,

$$\alpha_{xx}F_{4\xi} + 2\alpha_{xy}F_{2\xi 2\eta} + \alpha_{yy}F_{4\eta} = 0 \qquad (4')$$

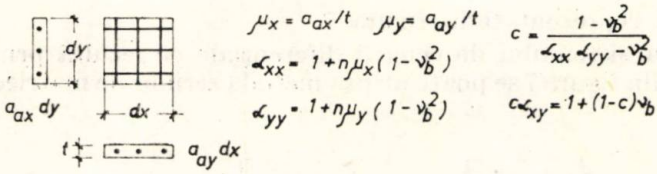


Fig. 4. — Element plan, armat ortogonal uniform

S-au utilizat funcțiile de bază și cele suplimentare prezentate mai sus, colocația făcîndu-se într-un nod respectiv în cinci noduri. Operatorii obținuți sînt cei din figura 5.

În cazul domeniilor cu cel puțin două margini paralele, discretizarea se poate face numai pe o singură direcție. Operatorii necesari s-au dedus prin *colocație liniară* [2]. La discretizarea pe direcția x, ecuația (4) s-a scris sub forma

$$\alpha_{xx}F_{4\xi} + 2\alpha_{xy}a^2F_{2\xi 2y} + \alpha_{yy}a^4F_{4y} = 0, \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} & & a & & \\ & b & c & b & \\ d & e & f & e & d \\ & b & c & b & \\ & & a & & \end{bmatrix} F \simeq 0 \qquad \begin{bmatrix} A & B & A \\ C & D & E & D & C \\ G & H & I & H & G \\ C & D & E & D & C \\ A & B & A \end{bmatrix} F \simeq 0$$

Fig. 5. — Operatori de discretizare pe două direcții

$a = \alpha_{yy}$
$b = 2\alpha_{xy}$
$c = -4(\alpha_{xy} + \alpha_{yy})$
$d = \alpha_{xx}$
$e = -4(\alpha_{xx} + \alpha_{xy})$
$f = 6\alpha_{xx} + 8\alpha_{xy} + 6\alpha_{yy}$

$A = 6(\alpha_{xy} + \alpha_{yy})$
$B = 12(-\alpha_{xy} + 2\alpha_{yy})$
$C = 6(\alpha_{xx} + \alpha_{xy})$
$D = 24(-\alpha_{xx} + \alpha_{xy} - \alpha_{yy})$
$E = 12(3\alpha_{xx} - 5\alpha_{xy} - 8\alpha_{yy})$
$G = 12(2\alpha_{xx} - \alpha_{xy})$
$H = 12(-8\alpha_{xx} - 5\alpha_{xy} + 3\alpha_{yy})$
$I = 144(\alpha_{xx} + \alpha_{xy} + \alpha_{yy})$

cu funcția de aproximare :

$$\Phi(\xi,y) = S(\xi, y) + P(\xi)Z(\xi), \qquad (6)$$

funcția de bază S fiind un polinom în ξ cu cinci termeni. Analog situației anterioare colocația se poate face în lungul unei singure drepte sau în lungul

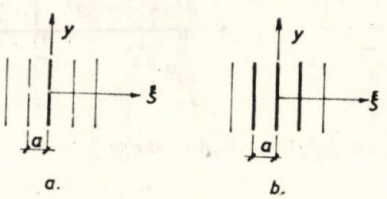


Fig. 6. — Domeniile operatorilor de discretizare pe o singură direcție

a trei drepte (fig. 6). În cel de-al doilea caz este necesară o funcție suplimentară cu doi parametri :

$$Z(\xi) = k_1 + k_2\xi, \qquad (7)$$

şi

$$P(\xi) = \xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 4).$$

Operatorii deduşi sînt reprezentaţi în figura 7.

Pentru integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ce rezultă prin aplicarea operatorilor din figura 7 se poate utiliza metoda seriilor de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \delta_{xx} F + \frac{a^2}{6} \begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix} \delta_{xy} F_{2y} + a^4 \begin{bmatrix} & & 1 & & \end{bmatrix} \delta_{yy} F_{4y} \simeq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \delta_{xx} F + \frac{a^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 18 & -8 & 1 \end{bmatrix} \delta_{xy} F_{2y} + \frac{a^4}{6} \begin{bmatrix} & 1 & 4 & 1 & \end{bmatrix} \delta_{yy} F_{4y} \simeq 0$$

Fig. 7. — Operatori de discretizare pe o singură direcţie

[3]. În cazul unui domeniu simplu conex (fig. 8*a*), cele n ecuaţii diferenţiale de ordinul 4 se înlocuiesc printr-un sistem de $4n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \{Z(y)\} = [A]\{Z(y)\} + \{B\}, \tag{8}$$

soluţia fiind de forma

$$\{Z(y)\} = [G(y)]\{Z(0)\} + \{\tilde{Z}(y)\}, \tag{9}$$

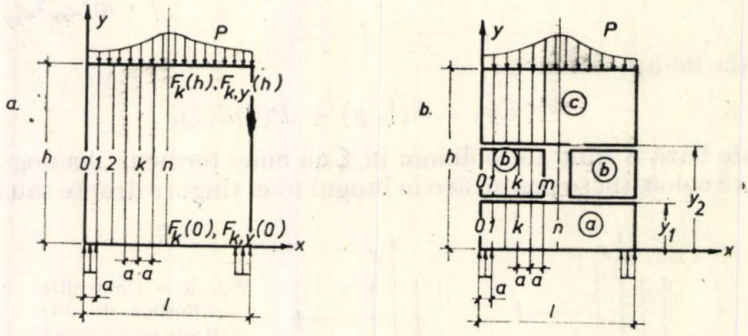


Fig. 8. — Domenii simplu şi dublu conexe

cuprinzînd direct tensiunile $\{\sigma_{xx}\}$. Extinderea acestei metode la domeniul dublu conex simetric din figura 8*b* este prezentată schematic în figura 9. Analog se pot rezolva şi problemele legate de domenii multiplu conexe nesimetrice, cu contururi dreptunghiulare.

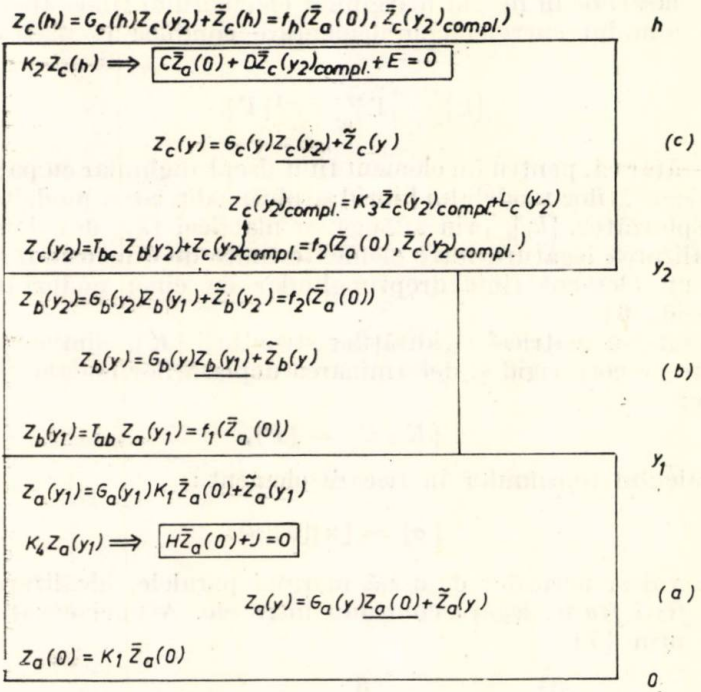


Fig. 9. — Schema de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale

1.1.2. Elemente finite

Analog discretizării matematice, discretizarea fizică poate fi pe două direcții (metoda elementelor finite) sau pe o singură direcție (metoda fîșiilor finite), astfel încît soluțiile să rezulte din rezolvarea unor sisteme de ecuații algebrice sau diferențiale.

Elementele finite se caracterizează prin relația între forțele și deplasările nodale :

$$[k]\{u\} = \{p\} \tag{10}$$

Deducerea matricei rigidităților elementului finit, $[k]$, depinde de modelul de comportare admis. În cazul alegerii unor cîmpuri de deplasări sau tensiuni, aplicînd principiul deplasărilor virtuale, rezultă [4] :

$$[k] = \int_V [b]^T[\varkappa][b]\mathrm{d}V. \tag{11}$$

În comparație cu structura reală, modelele de deplasări generează sisteme înlocuitoare mai rigide, iar modelele de tensiuni — mai deformabile. Modelele hibride [5] conduc la structuri înlocuitoare mai apropiate de cele reale. Pornind de la un cîmp de tensiuni în echilibru și de la o distribuție compa-

tibilă a deplasărilor în lungul marginilor elementului finit, aplicarea principiului minimului energiei complementare conduce la matricea rigidităților :

$$[k] = [\Gamma]^T [\Phi]^{-1} [\Gamma]. \tag{12}$$

S-a arătat că, pentru un element finit dreptunghiular cu patru noduri, matricea rigidităților modelului hibrid se obține din cea a modelului de tensiuni corespunzător, $[k_1]$, prin adăugarea matricei $[k_2]$ din figura 10 [2]. Pentru realizarea legăturii între elemente finite de dimensiuni diferite s-a conceput un element finit dreptunghiular cu cinci noduri în varianta model hibrid [6].

Asamblarea matricei rigidităților structurii $[K]$, eliminarea gradelor de libertate de corp rigid și determinarea deplasărilor nodale din sistemul de ecuații :

$$[K]\{U\} = \{P\}, \tag{13}$$

permite calculul tensiunilor în fiecare element :

$$\{\sigma\} = [\varkappa][b]\{u\}. \tag{14}$$

În cazul structurilor cu două margini paralele, idealizarea poate fi făcută cu *fîșii finite*, legate continuu între ele. Atunci ecuațiile (10) se înlocuiesc prin [7] :

$$-[b]\frac{d^2}{dy^2}\{u\} + [c]\frac{d}{dy}\{u\} + [d]\{u\} = \{p\} \tag{15}$$

și ecuațiile (14) prin

$$\{\sigma\} = [b]\frac{d}{dy}\{u\} + [e]\{u\}, \tag{16}$$

matricele $[b]$, $[c]$, $[d]$ și $[e]$ depinzînd de caracteristicile geometrice și elastice ale fîșiilor. Structura în ansamblu se caracterizează prin sistemul de ecuații diferențiale :

$$-[B]\frac{d^2}{dy^2}\{U\} + [C]\frac{d}{dy}\{U\} + [D]\{U\} = \{P\}, \tag{17}$$

ce poate fi redus de asemenea la un sistem de ordinul unu, ecuația (8), cu soluția (9).

$$[k_2] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k & & & & & & & \\ 0 & k' & & & & sim. & & \\ -k & 0 & k & & & & & \\ 0 & -k' & 0 & k' & & & & \\ k & 0 & -k & 0 & k & & & \\ 0 & k' & 0 & -k' & 0 & k' & & \\ -k & 0 & k & 0 & -k & 0 & k & \\ 0 & -k' & 0 & k' & 0 & -k' & 0 & k' \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{(1-\nu)(\beta^{-1} - \nu\beta)^2}{(1-\nu)\beta + 2\beta^{-1}}$$

$$k' = \frac{(1-\nu)(\beta - \nu\beta^{-1})^2}{(1-\nu)\beta^{-1} + 2\beta}$$

Fig. 10. — Matricea suplimentară $[k_2]$

Atît în cazul discretizării matematice, cît și în cel al discretizării fizice se poate opera pe substructuri.

1.2. GRINZI PEREȚI

În zonele inferioare ale diafragmelor rezemate discontinuu se dezvoltă eforturile caracteristice grinzilor pereți. Ținînd seama de înălțimea activă

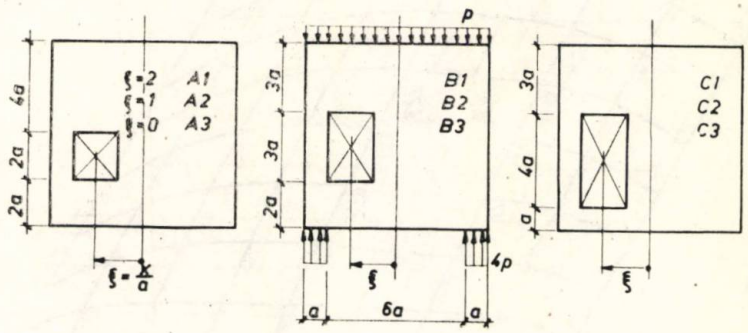


Fig. 11. — Grinzi pereți cu goluri

egală cu aproximativ distanța între reazeme, pentru studiu s-au ales elementele pătrate din figura 11, încărcate uniform în lungul marginii superioare.

1.2.1. Eforturi

Ecuația (1) s-a integrat utilizînd *metoda diferențelor finite*, pasul rețelei pătrate fiind egal cu o optime din latura elementelor studiate. Nedeterminarea statică introdusă de prezența golurilor a făcut necesar calculul vectorului $\{X\}$ al necunoscutelor (fig. 12) pentru fiecare tip de gol (A, B, C) în fiecare poziție (1, 2, 3). În figura 13 s-a reprezentat suprafața F pentru elementul $B2$, obținută prin suprapunerea efectelor în sensul metodei eforturilor. Pentru poziții intermediare ale golurilor, necunoscutele $\{X\}$ rezultă din formule de interpolare [2].

Pentru toate tipurile de grinzi studiate s-au determinat diagramele tensiunilor σ_{xx}, σ_{yy} și σ_{xy} cît și mărimile și direcțiile tensiunilor principale σ_1 și σ_2. În ceea ce privește precizia de calcul a vîrfurilor de tensiuni, s-a apreciat că aceasta corespunde necesităților practice, ținînd seama și de faptul că plăcile subțiri din beton armat pot fi considerate medii Cosserat [8]. Pe baza diagramelor de tensiuni s-au calculat o serie de mărimi nece-

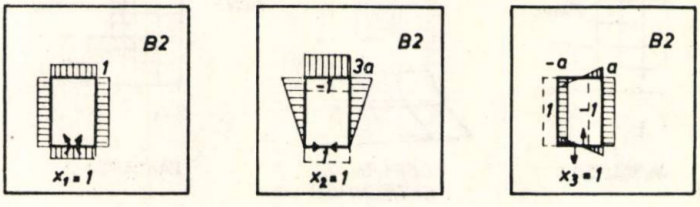


Fig. 12. — Acțiuni $\{X\}$, unitare

sare dimensionării grinzilor pereți în stadiul elastic (rezultanta Z a tensiunilor de întindere σ_{xx}, poziția ei, brațul de pîrghie al eforturilor interioare [2]). Pentru unele tipuri caracteristice (M — element plin, $B3$, $B2$, $B1$) s-au

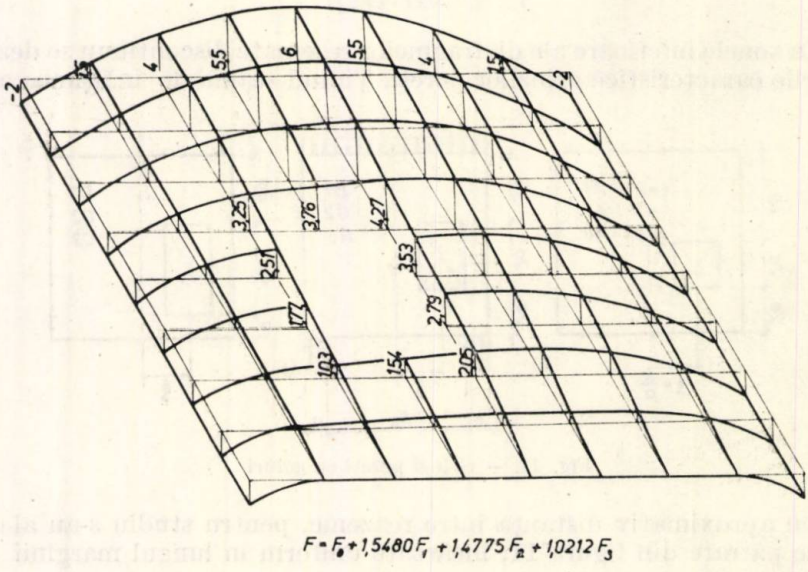


Fig. 13. — Suprafața F pentru grinda B2

determinat și „rezultantele" tensiunilor principale de întindere σ_1, constatîndu-se că barele de armătură dimensionate pentru Z_{max}, așezate în concordanță cu traiectoriile σ_1 sînt practic suficiente pe toată deschiderea elementelor.

Metoda elementelor finite s-a aplicat elementului $B3$, ținînd seama de simetria geometrică și de încărcare (fig. 14). Varianta 1, cu elemente finite pătrate identice $P4N$ s-a studiat cu rigidități corespunzătoare modelului de tensiuni, respectiv modelului hibrid. Efectul îndesării elementelor finite în jurul golului s-a pus în evidență utilizîndu-se, în varianta 2, elemente finite pătrate de două dimensiuni $P4N$ și elemente pătrate cu cinci noduri

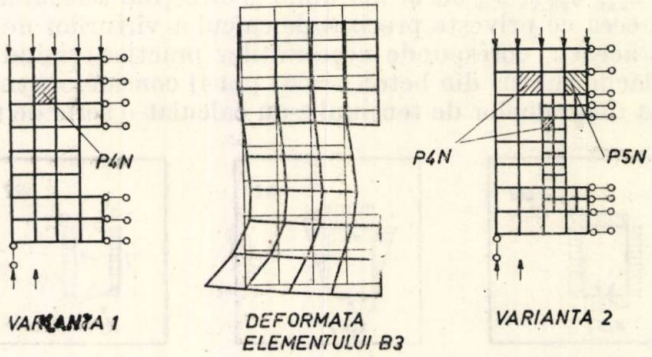


Fig. 14. — Discretizarea în metoda elementelor finite

P5N. Rezultatele obținute în acest caz au fost cele mai exacte, mai ales în ceea ce privește tensiunile σ_{xb}.

1.2.2. Verificări experimentale

Măsurători de deformații s-au făcut pe 16 grinzi pereți de 100 × × 100 × 5 cm (5 pline și 11 cu goluri), din beton armat cu granula maximă a agregatului de 15 mm. Armarea tipică a elementelor pline și a celor cu goluri în pozițiile 3 și 2 este schițată în figura 15, procentul de armare al armăturii principale drepte față de înălțimea utilă a elementelor pline fiind de 0,115%; în aceeași figură este indicată și armătura suplimentară în jurul golurilor situate în poziția 1. Deformațiile specifice măsurate cu timbre tensometrice au fost în concordanță bună cu cele calculate.

Pentru ușurarea studiului experimental al grinzilor pereți s-a încercat reducerea rigidității lor prin perforare (goluri Ø 2,5 cm la 3,75 cm interax). Diametrul golurilor și distanța între ele s-a dedus din condiția sporirii cu aproximativ 100% a deformabilității elementelor. Caracteristicile elastice ale materialului, „beton armat perforat" s-au aproximat prin încercări pe prisme [2].

2. STADIILE POSTELASTICE

2.1. ÎNCERCĂRI

Studii anterioare [9], [10] au scos în evidență faptul că la grinzile pereți pline nu este neapărat necesară armarea traiectorială, încărcările verticale putînd fi transmise spre reazeme printr-un efect de „arc cu tirant". Din acest motiv atît la elementele pline, cît și la cele cu goluri armătura principală de rezistență s-a dispus sub formă de bare drepte la marginea inferioară (fig. 15).

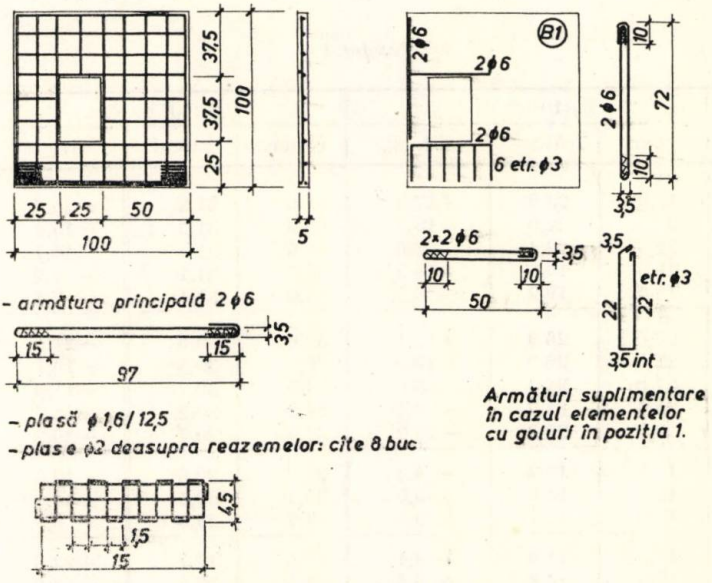


Fig. 15. — Armarea grinzilor pereți de 100 × 100 × 5 cm

2.1.1. Fisurare și rupere

Studiul modului de cedare al grinzilor pereți pline și cu goluri de diferite mărimi în diferite poziții s-a efectuat pe 24 modele de $40 \times 40 \times 2$ cm din mortar, cu dimensiunea maximă a agregatelor de 3 mm. Elementele au fost armate similar celor reprezentate în figura 15, însă fără armătura suplimentară în jurul golurilor.

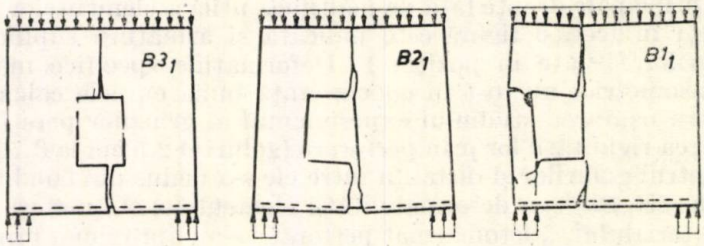


Fig. 16. — Tipuri de cedări

S-au pus în evidență două mecanisme de rupere și anume : grinzile pereți pline și cele cu goluri în pozițiile 3 și 2 s-au desfăcut în două elemente (fig. 16, $B3_1$ și $B2_1$), iar cele cu goluri în poziția 1 s-au desfăcut în patru elemente (fig. 16, $B1_1$). Pe baza acestor rezultate calitative s-au proiectat și încercat cele 16 grinzi descrise la punctul 1.2.2, prevăzîndu-se armătura suplimentară în jurul golurilor în poziția 1. Încărcările de fisurare P_f și cele de rupere P_r sînt cuprinse în tabelul 1. Admițînd un coeficient de siguranță față de rupere de 1,8 s-a determinat încărcarea de exploa-

Tabelul 1

Elem.	P_f(10^3 daN)			P_r(10^3 daN)			P_e (10^3 daN)
	exper.	calcul	dif. %	exper.	calcul	dif. %	
MO	18,0	22,9	+27,2	42,0	31,2	−25,7	17,3
MO_1	27,0	22,9	−15,2	36,9	31,2	−15,4	17,3
M3	22,5	22,4	− 0,6	36,6	31,2	−14,7	17,3
M2	16,5	19,5	+18,2	32,7	31,1	− 4,9	17,3
M1	18,0	19,2	− 6,7	34,2	31,1	− 9,1	17,3
A0	24,0	26,9	+12,1	39,0	30,6	−21,5	17,0
$A0_1$	22,5	26,9	+19,5	36,6	30,5	−16,7	16,9
A3	27,0	28,5	+ 5,6	34,5	30,7	−11,0	17,1
B3	25,5	24,7	− 3,1	34,2	30,2	−11,7	16,8
C3	22,5	20,2	−10,2	37,2	29,7	−20,2	16,5
A2	18,0	17,2	− 4,4	35,4	30,6	−13,5	17,0
B2	16,5	15,6	− 5,5	35,4	30,1	−15,0	16,7
C2	15,0	14,1	− 5,8	32,7	29,5	− 9,8	16,4
A1	13,5	14,6	+ 8,1	39,0	47,7	+22,3	26,6
B1	13,5	14,8	+ 9,6	34,8	33,5	− 3,7	18,6
C1	10,5	11,9	+13,3	19,8	28,4	+43,4	15,8

tare P_e, rezultînd că grinzile pereți pline și cele cu goluri centrale (în poziția 3) s-au comportat ca niște elemente de beton slab armat, fără fisuri în stadiul de exploatare. Grinzile pereți cu goluri în pozițiile 2 și 1 au prezentat fisuri cu deschideri foarte mici.

2.1.2. Aproximări prin calcule

Încărcările de fisurare s-au calculat admițînd plasticizarea totală a zonei întinse de beton, obținîndu-se abateri față de valorile experimentale cuprinse între + 27 % și −15 % (tab. 1).

Pe baza mecanismelor de rupere din figura 17 s-au determinat încărcările de rupere. Cedarea elementelor pline și a celor cu goluri în pozițiile 3 și 2 s-a produs prin ruperea armăturii principale cît și a unor bare orizontale ale rețelei ortogonale suplimentare și prin zdrobirea betonului comprimat, în concordanță cu mecanismul 1. Abaterile față de valorile experimentale sînt cuprinse între −5 % și −26 %. Dacă se ține însă seama de frecarea rolelor de reazem (coeficient de frecare egal cu 0,025), domeniul corectat al abaterilor (+9 %, −12 %) este mai grupat în jurul valorilor experimentale. La elementele cu goluri în poziția 1 s-a observat tendința formării unui mecanism de cedare de tip 2. Ruperea a avut însă loc prin cedări locale ale montanților. Aceasta se datorește reducerii capacității de rotire a articulațiilor plastice, cauzată de armarea puternică în jurul golurilor cît și efectului forțelor tăietoare și axiale, neluat în considerare.

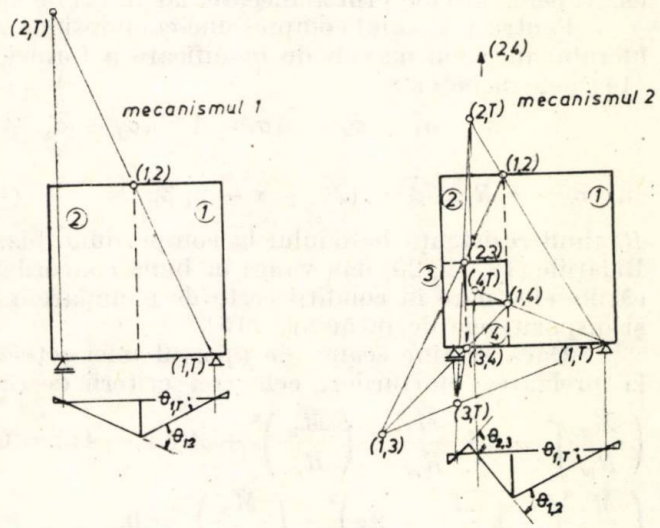


Fig. 17. — Mecanisme de cedare

În vederea studiului trecerii de la mecanismul 1 la mecanismul 2, în funcție de poziția golului, s-a aplicat teorema de minim a calculului plastic. Calculul s-a făcut pentru două cazuri : fără armături suplimentare în jurul golurilor și cu armăturile suplimentare din figura 15.

2.2. CALCUL BIOGRAFIC

2.2.1. Prezentare

Metoda elementelor finite permite urmărirea prin calcule a comportării grinzilor pereți din beton armat atît în stadiul elastic, cît și în stadiile postelastice [11]. Caracterizarea proprietăților betonului armat poate fi făcută prin definirea unor elemente finite armate, respectiv a unor elemente finite distincte pentru beton, armătură și aderență. Starea de tensiune corespunzătoare diferitelor valori ale încărcărilor rezultă s-au dintr-un calcul direct (matricea rigidităților structurii fiind mereu adaptată situației reale) sau prin relaxare (matricea rigidităților rămînînd nemodificată).

2.2.2. Criterii de rupere

Parcurgerea stadiilor de lucru se apreciază cu ajutorul criteriilor de rupere a betonului solicitat biaxial [12]. Prin generalizarea pentru cazul $\sigma_{yy} \neq 0$ a criteriilor lui Mohr în domeniul compresiune — întindere [13] se obține, cu $\alpha = R_t/R_{pr}$ și $A = 1 + 2\alpha - 2\sqrt{\alpha(1+\alpha)}$:

$$\left(\frac{2M_2}{R_{pr}}\right)^2 - \frac{4AM_1}{R_{pr}} + A(A - 4\alpha) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{M_1 + M_2}{R_{pr}} + \alpha = 0\,; \quad \frac{M_1 - M_2}{R_{pr}} + \alpha = 0, \tag{19}$$

M_1 și M_2 fiind semisuma și semidiferența tensiunilor principale. În primul caz ruperea are loc prin alunecare, iar în cel de-al doilea prin desprindere.

Pentru domeniul compresiune-compresiune se poate adopta criteriul lucrului mecanic maxim de modificare a formei, generalizat în lucrarea [14] pentru beton:

$$\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 - \bar{A}\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{B}(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 - 1) = 1, \tag{20}$$

cu $\bar{\sigma} = \sigma/R_{pr}$, $\bar{A} = (2\beta + \alpha - 2)/\beta$, $\bar{B} = -(1 + \alpha)$ și $\beta = R_u/R_{pr}$, R_u fiind rezistența betonului la compresiune biaxială uniformă ($\sigma_1 = \sigma_2$). Relațiile (18, 19, 20) dau valori în bună concordanță cu rezultatele încercărilor efectuate în condiții certe de eliminare a frecărilor între epruvete și dispozitivele de încărcare [15].

Dacă se ține seama de aportul unei rețele ortogonale de armături la preluarea eforturilor, cele trei criterii de rupere de mai sus devin:

$$\left(\frac{\bar{M}_2}{R_{pr}}\right)^2 - 2A\frac{\bar{M}_1}{R_{pr}} + \left(\frac{\bar{M}_3}{R_{pr}}\right)^2 + A(A - 4\alpha) = 0, \tag{21}$$

$$\left(\frac{\bar{M}_2}{R_{pr}}\right)^2 - \left(\frac{\bar{M}_1}{R_{pr}} + 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{\bar{M}_3}{R_{pr}}\right)^2 = 0, \tag{22}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{A}}{4}\right)\left(\frac{\bar{M}_1}{R_{pr}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{A}}{4}\right)\left[\left(\frac{\bar{M}_2}{R_{pr}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{M}_3}{R_{pr}}\right)^2\right] + \bar{B}\left(\frac{\bar{M}_1}{R_{pr}} - 1\right) - 1 = 0, \tag{23}$$

în care

$$\bar{M}_1 = S_1 M_1 + S_2 M_2 \cos 2\varphi, \quad \bar{M}_2 = S_3 M_1 + S_4 M_2 \cos 2\varphi,$$

$$\bar{M}_3 = 2M_2 \sin 2\varphi,$$

$$\gamma S_1 = (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} - 2\nu_b)(1 + \nu_b), \quad \gamma S_2 = (\alpha_{yy} - \alpha_{xx})(1 + \nu_b),$$

$$\gamma S_3 = (\alpha_{yy} - \alpha_{xx})(1 - \nu_b), \quad \gamma S_4 = (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + 2\nu_b)(1 - \nu_b),$$

$$\gamma = \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \nu_b^2.$$

Aplicarea calculului biografic permite studiul unei varietăți mari de elemente plane din beton armat, putîndu-se reduce volumul lucrărilor experimentale.

3. CONCLUZII

Studiile teoretice și experimentale s-au finalizat prin extinderea unor metode de calcul în stadiul elastic și în situația de echilibru limită și prin propunerea altora.

Rezultatele teoretice și experimentale referitoare la stadiile I, Ia și III au permis formularea unor concluzii privind calculul și alcătuirea grinzilor pereți studiate. Astfel, s-a găsit că grinzile pereți cu goluri în pozițiile 3 și 2 nu trebuie prevăzute cu armături de rezistență în jurul acestora. Cantitatea de armătură dispusă sub formă de bare drepte în vecinătatea marginii inferioare rezultă cu suficientă precizie dintr-un calcul în metoda echilibrului limită pe baza mecanismului 1, ca și în cazul grinzilor pereți pline. În armătură se poate considera atingerea limitei de rupere, dacă procentul de armare este cuprins între 0,075% și 0,120%. Față de dimensionarea în concordanță cu eforturile deduse cu metoda elastică se obține o economie importantă de oțel beton. Dacă golul este amplasat marginal, se recomandă dispunerea unor bare de armătură în jurul acestuia.

Cercetările continuă cu aplicarea calculului biografic, ce permite extinderea domeniului investigat și descrierea mai exactă a comportării grinzilor pereți.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Falk, *Eine Variante zum Differenzenverfahren*, ZAMM, **45**, Sonderheft, T32 (1965).
2. R. Friedrich, *Contribuții la studiul grinzilor pereți din beton armat*, Teză de doctorat, Timișoara, 1974.
3. S. M. A. Kazimi, A. Coull, *The Application of Line—Solution Techniques to the Solution of Plane Problems*, Intern. J. Mech. Sc., *10*, 391 — 399 (1964).
4. J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
5. T. H. H. Pian, *Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions*, AIAA Journal, *7*, 1333 — 1336 (1964).
6. R. Friedrich, *Elemente finite dreptunghiulare pentru calculul șaibelor*, Bul. St. T. al I.P.T., Seria Constr., *1*, 49 — 54 (1973).

7. R. Du Preez, *Berechnung prismatischer Flächentragwerke mit Hilfe von finiten Streifenelementen*, Bautechnik, *5*, 151 — 162 (1972).
8. G. A. Tiupin, *K rasciotu jelezobetona s pomoşciu momentnoi teorii uprugosti*, Stroit. meh. i rasciot soor., *3*, 30 — 32 (1968).
9. H. Bay, *Spannungsumlagerungen im Stahlbetonträger*, Beton u. Stahlbetonbau, *12*, 277—285 (1965).
10. F. Leonhardt, R. Walther, *Wandartige Träger*, Dt. A. f. Stahlbeton, *170*, V. W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1966.
11. V. Cervenka, K. H. Gerstle, *Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels*, Memoires AIPC, 31 — II, 31 — 45 (1971).
12. C. Avram ş.a., *Rezistenţele şi deformaţiile betonului*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1971.
13. I. Deutsch, *Contribuţii la fisurarea elementelor de beton armat solicitate la încovoiere cu forţă tăietoare*, Teză de doctorat, Timişoara, 1970.
14. H. Weigler, G. Becker, *Über das Bruch — und Verformungsverhalten von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung*, Bauingenieur, *10*, 390 — 396 (1961).
15. H. Kupfer, *Das Verhalten von Beton unter zweiachsiger Beanspruchung*, T. H. München, Lehrstuhl für Massivbau, 1969.

CALCULUL RADIERELOR ELASTICE PE COLOANE *)

de GELU ONU
I.P.T.A.N.A. București

Este prezentat un procedeu pentru determinarea eforturilor în coloane și radier, luînd în considerație conlucrarea cu terenul de fundație. Procedeul este o aplicație a metodei elementelor finite la calculul structurilor alcătuite din coloane încastrate elastic în teren și solidarizate, la partea superioară, printr-un radier cu rigiditate finită atît în planul său, cît și după direcția normală la acesta. Modelul mecanic echivalent structurii reale este constituit din două tipuri de elemente: grinzi pe mediu elastic, pentru modelarea coloanelor și elemente finite rectangulare cu 24 grade de libertate, pentru modelarea radierului.

Sînt cunoscute numeroase lucrări consacrate determinării eforturilor din coloanele unei fundații, în ipoteza radierului infinit rigid. După cum se știe, această ipoteză conduce la o simplificare substanțială a calculului static, întrucît deplasările coloanelor la capitel pot fi determinate cu ajutorul a cel mult șase parametri independenți.

Dacă grosimea radierului este mică în raport cu celelalte două dimensiuni ale sale, cazul cheurilor pe piloți de exemplu, ipoteza radierului nedeformabil poate fi admisă numai pentru anumite tipuri de încărcări. Ipoteza devine cu totul inacceptabilă la calculul cheurilor înguste (ale căror dimensiuni le încadrează în categoria grinzilor-pereți), cînd sînt solicitate de sarcini orizontale mari. În aceste situații este necesar ca determinarea eforturilor din coloane să se facă ținîndu-se seama de elasticitatea reală a radierului.

În acest referat este prezentat un procedeu numeric de calcul al radierelor elastice, util la proiectarea cheurilor, platformelor, docurilor și a altor construcții de acest tip, fundate pe coloane.

Procedeul, pe baza căruia a fost întocmit un program de calcul automat**), este descris succint în cele ce urmează.

Structurii reale, alcătuite din radier (cu rigiditate finită atît în planul său, cît și după direcția normală la acesta) și coloane încastrate elastic în teren, i se substituie în calcul un model mecanic echivalent, constituit dintr-un număr finit de elemente interconectate într-un număr finit de noduri. Parametri nedeterminați ai modelului mecanic sînt deplasările nodurilor, la fiecare nod fiind luate în considerație cîte trei translații și trei rotații ortogonale.

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

**) Programul PLACOL.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 5, 1977, P. 701 — 713

În alcătuirea modelului mecanic intră două tipuri de elemente: grinzi pe reazeme elastice, pentru modelarea coloanelor, și elemente finite rectangulare, pentru modelarea radierului. Matricele de rigiditate ale acestor elemente alcătuiesc matricea de rigiditate a întregii structuri, asamblarea fiind făcută prin metoda directă [14].

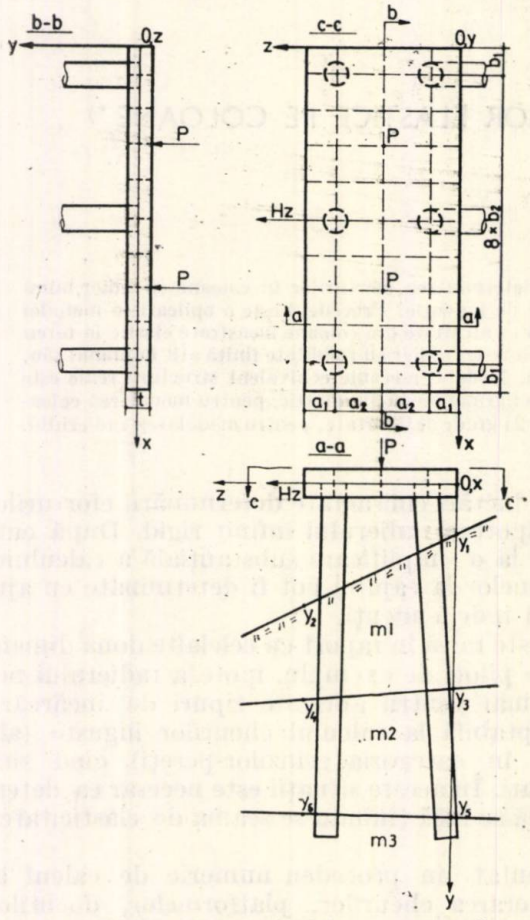


Fig. 1. — Radier elastic, fundat pe șase coloane, modelat cu ajutorul a 40 de elemente finite.

Calculul matricei de rigiditate al unei coloane și al matricei de transformare a rigidităților din sistemul propriu în sistemul general de referință, sînt prezentate în [2], [10], [11] etc.

În programul PLACOL a fost utilizat procedeul descris în [18] deoarece, la calculul rigidităților care caracterizează comportarea coloanei la încovoiere, acesta permite luarea în considerație a unei legi arbitrare de variație a coeficientului de pat cu adîncimea. În plus, procedeul facilitează introducerea în calculul aceleași fundații a unor coloane cu rigidități diferite. Situații de acest fel pot apare ori de cîte ori distanța între coloane este mare sau suprafața terenului natural este înclinată.

În acest referat nu se va insista asupra modului în care se calculează rigiditățile coloanelor, procedeul folosit fiind identic cu cel prezentat detaliat în [18].

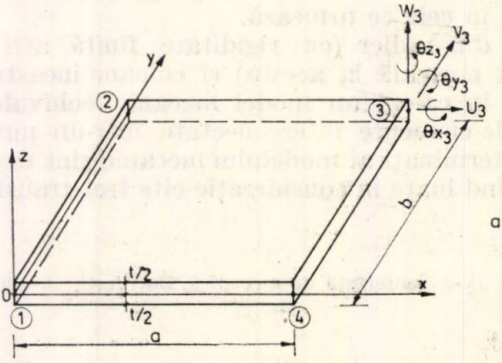


Fig. 2. — Modelul de plasare cu 24 grade de libertate.

MODELAREA RADIERULUI

În figura 1 este reprezentat un radier fundat pe șase coloane, modelat cu ajutorul a 40 de elemente finite.

În figura 2 este reprezentat elementul rectangular utilizat la alcătuirea modelului mecanic, element care are

șase grade de libertate la fiecare nod. Pentru un nod oarecare, nodul 3 de exemplu, u_3, v_3 și θz_3 reprezintă deplasări de șaibă solicitată în planul ei, în timp ce w_3, θx_3 și θy_3, deplasări de placă încovoiată.

Matricea de rigiditate a elementului (24 × 24) poate fi scrisă sub forma :

$$K = \begin{vmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_p \end{vmatrix}.$$

Situîndu-ne în domeniul micilor deplasări, K_s și K_p reprezintă matricele de rigiditate a două elemente asociate, dar independente cu cîte trei grade de libertate la fiecare nod. K_s conține reacțiunile din blocaje cînd se dau deplasări unitare pe direcțiile U_i, V_i și $\theta\, z_i$, iar K_p reacțiunile corespunzătoare deplasărilor unitare pe direcțiile W_i, θx_i și θy_i.

Cîmpul deplasărilor din interiorul elementului finit, poate fi exprima matriceal astfel :

$$\begin{vmatrix} U \\ V \\ W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & 0 & 0 \\ 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & F_z \end{vmatrix} \cdot |C|\,;$$

$$|F_x| = |1,\ y,\ x,\ yx,\ y^2,\ y^2x,\ y^3,\ y^3x|,$$

$$|F_y| = |1,\ x,\ y,\ xy.\ x^2,\ x^2y,\ x^3,\ x^3y\,|,$$

$$|F_z| = |1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3,\ \ x^2y,\ xy^2,\ y^3,$$

$$x^3y,\ xy^3,\ (6x^3y^2 - 9x^2y^2 - 4x^3y^3 + 6x^2y^3)\,|.$$

$|C|^T = |C_u,\ C_v,\ C_w| = |C_s, C_p|$, reprezintă vectorul coordonatelor generalizate.

Cîmpul deplasărilor din planul xoy este reprezentat de polinoamele U și V, fiecare cu cîte 8 coordonate generalizate [3].

Valorile acestor coordonate se determină explicit în funcție de deplasările generalizate ale elementului, din următoarele condiții :

$$\begin{vmatrix} U \\ V \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ \theta \\ -\theta \end{vmatrix}_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Condițiile puse derivatelor reduc la 12 numărul coordonatelor generalizate independente [19].

Pentru deplasările perpendiculare pe planul xoy, se admite o lege de variație reprezentată de un polinom incomplet de gradul șase. Elementele acestui polinom constituie vectorul F_z, care, cu excepția ultimului termen, conține toți termenii funcției-deplasare a modelului ACM [1], [9].

Elementul finit Adini-Clough-Melosh este complet dar parțial incompatibil. Neconformismul modelului ACM are la origină faptul că rotirile normale, în lungul laturei comune a două elemente vecine, au valori diferite. Elementul finit $M1$, prezentat în [19] și utilizat în programul PLACOL, corectează parțial acest neajuns, prin eliminarea efectului produs de translațiile nodurilor asupra primelor derivate ale funcției-deplasare. Acest lucru se realizează prin introducerea unei funcții de corecție, $(6x^3y^2-9x^2y^2-4x^3y^3+6x^2y^3)$, care, în fapt, mărește rigiditatea elementului finit.

Celelalte coordonate generalizate se determină din condiții puse la nodurile elementului finit :

$$\begin{vmatrix} W \\ \partial W/\partial x \\ \partial W/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w \\ \theta x \\ -\theta y \end{vmatrix}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Deplasările nodale ale celor două modele asociate, se pot exprima în funcție de coordonatele generalizate :

$$\begin{vmatrix} \Delta s \\ \Delta p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_s & 0 \\ 0 & Ap \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_s \\ C_p \end{vmatrix}.$$

Matricele A_s și A_p sînt pătrate și pot fi inversate, astfel că :

$$\begin{vmatrix} C_s \\ C_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_s^{-1} & 0 \\ 0 & A_p^{-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Delta s \\ \Delta p \end{vmatrix}.$$

Diferențiind U, V și W în raport cu x și y se obțin deformațiile specifice în funcție de coordonatele generalizate :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{B}_s & 0 \\ 0 & \bar{B}_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_s \\ C_p \end{vmatrix}.$$

$$|B_s| = \bar{B}_s| \cdot |A_s^{-1}| \text{ și}$$

$$|B_p| = \bar{B}_p| \cdot |A_p^{-1}|,$$

reprezintă matricele de influență ale deplasărilor nodale asupra deformațiilor specifice.

Prin intermediul matricei de elasticitate se exprimă relația eforturi unitare deformații specifice :

$$\begin{vmatrix} \sigma_s \\ \sigma_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_s & 0 \\ 0 & D_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{B}_s & 0 \\ 0 & \bar{B}_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_s \\ C_p \end{vmatrix}$$

În final, aplicînd principiul deplasărilor virtuale, se obțin elementele matricelor de rigiditate ale celor două modele asociate :

$$\begin{vmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_p \end{vmatrix} = \int_V \begin{vmatrix} B_s^T . D_s . B_s . & 0 \\ 0 & B_p^T . D_p . B_p \end{vmatrix} \mathrm{dv}$$

În anexa 1 sînt date toate elementele matricelor B_s, B_p, K_s și K_p.

APLICAȚII

În continuare sînt prezentate cîteva rezultate obținute cu ajutorul elementelor finite descrise anterior.

1. În figura 3 este reprezentată variația săgeții la capătul unei console de 9 m lungime și 3 m înălțime. Consola se consideră constituită dintr-un

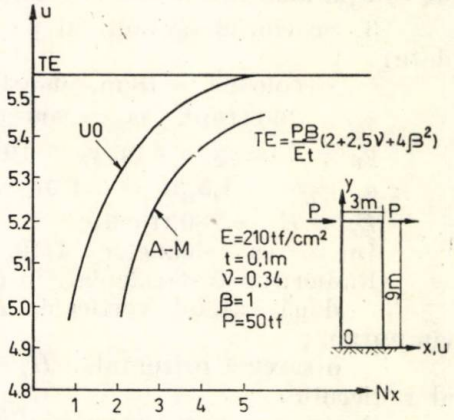


Fig. 3. — Variația săgeții la capătul unei console în funcție de numărul elementelor finite utilizate.

număr variabil de elemente finite rectangulare care au raportul laturilor (β) egal cu 1. Situîndu-ne în ipoteza stării plane de eforturi, modelul mecanic echivalent consolei reale este alcătuit numai din elemente de șaibă (matricea K_s).

În diagramă, cu N_x a fost notat numărul de elemente finite introduse pe înălțimea consolei.

Curba $U0$ reprezintă variația săgeții în cazul utilizării modelului de șaibă cu 12 grade de libertate, descris anterior.

Curba AM reprezintă variația săgeții calculate folosind modelul Argyris — Melosh cu 8 grade de libertate [7].

Se constată o convergență monotonă spre soluția din elasticitate (TE), rezultatele obținute în modelul îmbunătățit fiind superioare celor date de elementul finit AM.

2. În figura 4 este reprezentată variația săgeții la mijlocul unei plăci încastrate pe contur, încărcate cu o sarcină P concentrată în punctul

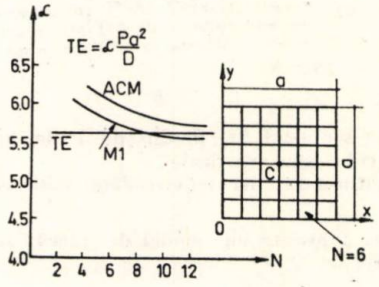


Fig. 4. — Variația săgeții în centrul unei plăci pătrate, încastrate pe contur, în funcție de numărul elementelor finite utilizate. Sarcina concentrată P este aplicată în punctul C.

$x = y = a/2$. Modelul mecanic, echivalent plăcii reale este alcătuit din elemente rectangulare de placă încovoiată cu $\beta = 1$ (matricea K_p). Cu N a fost notat numărul de elemente finite de pe o latură a plăcii.

Curba $M1$ reprezintă variaţia săgeţii în cazul utilizării modelului de placă descris în paragraful precedent. Pentru comparaţie, este reprezentată şi soluţia furnizată de modelul ACM.

După cum se poate constata modelul $M1$ dă rezultate mai apropiate de soluţia analitică a teoriei elasticităţii.

3. Se consideră radierul pe coloane din figura 1, cu următoarele date:

l — coloană = 18 m, Φ-coloană = 1,08, E-coloană = 280 tf/cmp;

$m_1 = 200$ tf/m^4, $m_2 = 600$ tf/m^4, $m_3 = 2\,000$ tf/m^4;

$y_1 = 2$ m, $y_2 = 6$ m, $y_3 = 10$ m, $y_4 = 11$ m, $y_5 = y_6 = 17$ m;

$a_1 = b_1 = 1{,}5$, $a_2 = 2{,}4$ m, $b_2 = 1{,}875$;

$E_s = E_p = 280$ tf/cmp.

Înclinarea coloanelor: 1/10.

Radierul a fost calculat, în două ipoteze de încărcare:

— două sarcini verticale, $P = 1\,200$ tf, concentrate la mijlocul cîmpurilor;

— o sarcină orizontală, $H_z = 660$ tf, acţionînd în axul de simetrie al radierului.

Pentru a se putea aprecia influenţa pe care o are rigiditatea radierului asupra eforturilor, calculele au fost efectuate pentru diverse grosimi de radier ($t = 0{,}5 \div 2{,}5$ m)*).

În figurile 5, 6 şi 7 sînt redate o parte din rezultatele obţinute folosind programele PLACOL şi RADIER [18].

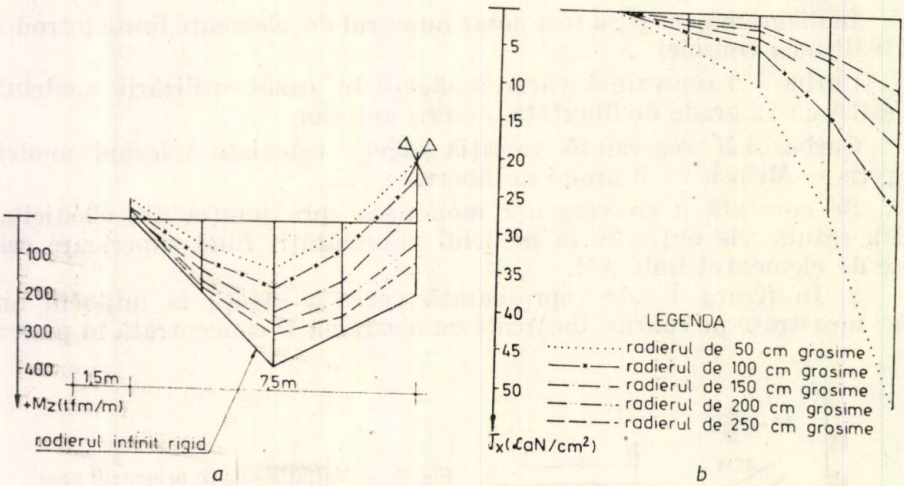


Fig. 5. — *a*— Diagrama momentului încovoietor secţional M_z, produs de P, în lungul liniei care uneşte capitelele coloanelor verticale;
b — Variaţia efortului σ_x, produs de H_z, la fibra întinsă a radierului considerat şaibă elastică.

*) Deoarece pentru modelarea radierului se foloseşte un model de placă subţire, parametrul variabil t trebuie interpretat ca atare.

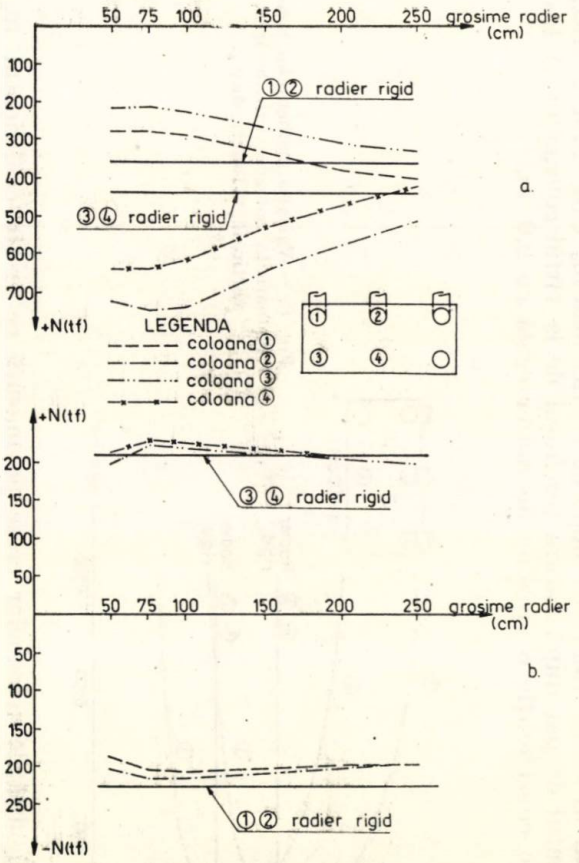


Fig. 6. — Variația eforturilor axiale în coloane în funcție de grosimea radierului
a — eforturi produse de sarcinile verticale P (2×1200 tf)
b — eforturi produse de sarcina orizontală Hz (660 tf).

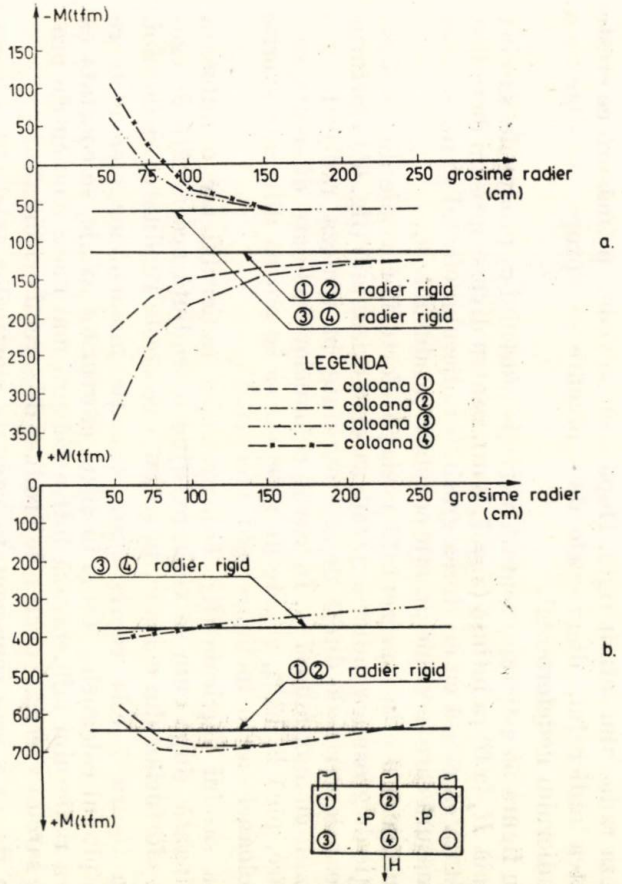


Fig. 7. — Variația momentelor încovoietoare M_x de la capitelul coloanelor în funcție de grosimea radierului :
a — momente produse de sarcinile verticale P (2×1200 tf)
b — momente produse de sarcina orizontală H_z (660 tf).

În figura 5*a* sînt reprezentate diagramele momentelor încovoietoare secționale M_z, produse de cele două forțe verticale, în lungul liniei $z = 1{,}5$ m.

Pentru comparație este reprezentată și diagrama M_z determinată în ipoteza radierului infinit rigid. După cum se vede, pe măsură ce crește rigiditatea radierului, diagramele de momente se apropie de diagrama M_z a radierului nedeformabil.

În figura 5*b* este reprezentată variația efortului σ_x produs de sarcina orizontală H_x la fibra întinsă ($z = 7, 8$ m), pentru diverse grosimi de radier. Se constată că odată cu creșterea grosimii radierului efortul se micșorează într-o măsură care menține practic constant produsul $t \cdot \sigma_x$.

În figura 6 este reprezentată variația eforturilor axiale din coloane, în funcție de grosimea radierului. Sub sarcina orizontală (fig. 6*b*) eforturile din coloanele verticale diferă de cele obținute în ipoteza radierului nedeformabil cu maximum 7%. În cazul coloanelor înclinate diferența este mai mare, pînă la 13%, și este de așteptat să se obțină diferențe sporite dacă coloanele au o înclinare mai accentuată.

La sarcini verticale (fig. 6*a*), grosimea radierului are o influență determinantă, după cum se vede, existînd o tendință accentuată de egalizare a eforturilor din coloane, pe măsură ce crește rigiditatea radierului.

În figura 7 este reprezentată variația momentelor încovoietoare de la capitelul coloanelor. Ca și în cazul eforturilor axiale, se constată că grosimea radierului influențează într-o măsură mai mare momentele produse de sarcini verticale decît cele produse de sarcini orizontale.

În figura 8 este reprezentată variația eforturilor axiale în coloane, sub încărcarea verticală, în funcție de coeficientul m_3 care caracterizează coeficientul de pat după natura terenului de la vîrful coloanelor. A fost luată în considerație o grosime de radier egală cu 2,0 m.

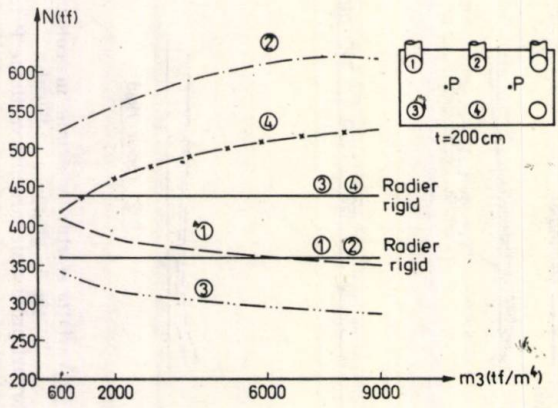


Fig. 8. — Variația momentelor încovoietoare în coloane, sub încărcare verticală, în funcție de m_3.

Rigiditățile coloanelor cresc pe măsură ce crește coeficientul m_3. În aceeași măsură se reduce rigiditatea relativă a radierului. Din acest motiv, tendința de egalizare a eforturilor axiale din coloane are loc spre valorile mici ale lui m_3.

CONSIDERAȚII FINALE

Metoda elementelor finite se dovedește a fi un procedeu adecvat pentru calculul radierelor elastice pe coloane. În programul PLACOL modelarea radierului se face numai cu elemente rectangulare dar, fără nici o dificultate, pot fi introduse și alte tipuri de elemente, (patrulatere izoparametrice de exemplu), pentru a se putea soluționa radiere de orice formă.

Deși avantajul de a putea calcula orice structură este deosebit de important, nu se poate eluda faptul că metoda este destul de costisitoare. Pentru a se putea obține rezultate corecte, este necesar ca radierul să fie discretizat suficient de amănunțit. Numărul parametrilor nedeterminați care definesc starea de deformație a modelului mecanic fiind foarte mare rezolvarea sistemului de ecuații corespunzător consumă mult din timpul calculatorului. Astfel, pentru calculul radierului din figura 1, în cele două ipoteze de încărcare, sînt necesare cca 4 minute dacă se folosește programul PLACOL și mai puțin de 1 minut dacă calculul se face considerînd radierul nedeformabil (prog. RADIER). Din acest motiv este de mare importanță găsirea unor procedee de reducere a timpului de prelucrare pe calculator fără a se afecta exactitatea rezultatelor. O cale de realizare a acestui deziderat o poate constitui utilizarea unui model mecanic cu un număr mai mic de parametri nedeterminați la fiecare nod. Astfel, se poate renunța la rotirile cu vectorii orientați normal la planul radierului. În compensație, pentru a nu se reduce numărul coordonatelor generalizate, se introduc noduri suplimentare în interiorul elementelor finite, noduri ale căror deplasări pot fi eliminate înainte de asamblarea matricei de rigiditate. Un avantaj în plus care se realizează pe această cale, îl constituie faptul că se poate spori numărul coloanelor din fundație fără a se modifica numărul elementelor finite din radier.

NOTAȚII:

a reprezintă latura elementului finit paralelă cu ox,

b — latura elementului finit paralelă cu oy,

t — grosimea elementului finit (grosimea radierului),

$\beta = b/a$,

$\xi = x/a$,

$\eta = y/a$,

ν — coeficientul lui Poisson.

D_s — matricea de elasticitate pentru starea plană de eforturi

D_p — matricea de elasticitate a plăcilor plane subțiri,

B_s, B_p — matricele de influență a deplasărilor nodale asupra deformațiilor specifice,

K_s — matricea de rigiditate a elementului finit considerat șaibă elastică,

K_p — matricea de rigiditate a elementului finit de placă dreaptă subțire.

$$B_s^T =$$

$-(1+2\eta)\eta'^2/a$	0	$-6\eta\eta'\xi'/b$
0	$-(1+2\xi)\xi'^2/b$	$-6\xi\xi'\eta'/a$
$-b\cdot\eta\cdot\eta'^2/a$	$-a\xi\xi'^2/b$	$(1-3\xi)\xi'\eta'+(1-3\eta)\eta'\xi'$
$-(1+2\eta')\eta^2/a$	0	$6\eta\eta'\xi'/b$
0	$(1+2\xi)'^2/b$	$-6\xi\xi'\eta/a$
$b\eta^2\eta'/a$	$a\xi\xi'^2/b$	$(1-3\xi)\xi'\eta+(1-3\eta)'\eta\xi'$
$(1+2\eta')\eta^2/a$	0	$6\eta\eta'\xi/b$
0	$(1+2\xi')'^2/b$	$6\xi\xi'\eta/a$
$-b\cdot\eta^2\cdot\eta'/a$	$-a\xi^2\xi'/b$	$(1-3\xi')\xi\eta+(1-3\eta')\eta\xi$
$(1+2\eta)\eta'^2/a$	0	$-6\eta\eta'\xi/b$
0	$-(1-2\xi')\xi^2/b$	$6\xi\xi'\eta'/a$
$b\eta\eta'^2/a$	$a\xi^2\xi'/b$	$(1-3\xi')\xi\eta'+(1-3\eta)\eta'\xi$

$$B_p^T = \frac{2z}{a\cdot b}\cdot$$

$3\eta'(\xi'-\xi)\cdot\beta$ $-3\eta\eta'(\xi'-\xi)(\eta-\eta')\beta$	$3\xi'(\eta'-\eta)\beta^{-1}$ $-3\xi\xi'(\xi-\xi')\eta'-\eta)\beta^{-1}$	$1-6\xi\xi'-6\eta\eta'-$ $(1-6\xi\xi')(1-6\eta\eta')$
0	$\xi'(2\eta'-\eta)a$	$\eta'(\eta'-2\eta)b$
$-\eta'(2\xi'-\xi)b$	0	$-\xi'(\xi'-2\xi)\cdot a$
$3\eta(\xi'-\xi)\beta+$ $3\eta\eta'(\xi'-\xi)(\eta-\eta')\beta$	$-3\xi'(\eta'-\eta)\beta^{-1}+$ $3\xi\xi'(\xi-\xi')(\eta'-\eta)\beta^{-1}$	$-1+6\xi\xi'+6\eta\eta'+$ $(1-6\xi\xi')(1-6\eta\eta')$
0	$\xi'(\eta'-2\eta)\cdot a$	$-\eta(2\eta'-\eta)b$
$-\eta(2\xi'-\xi)b$	0	$\xi'(\xi'-2\xi)\cdot a$
$-3\eta(\xi'-\xi)\beta$ $-3\eta\eta'(\xi'-\xi)(\eta-\eta')\beta$	$-3\xi(\eta'-\eta(\cdot\beta^{-1}$ $-3\xi\xi'(\xi-\xi')(\eta'-\eta)\beta^{-1}$	$1-6\xi\xi'+6\eta\eta'-$ $(1-6\xi\xi')(1-6\eta\eta')-$
0	$\xi(\eta'-2\eta)a$	$\eta(2\eta'-\eta)b$
$-\eta(\xi'-2\xi)b$	0	$-\xi(2\xi'-\xi)a$
$-3\eta'(\xi'-\xi)\beta+$ $3\eta\eta'(\xi'-\xi)(\eta-\eta')\beta$	$3\xi(\eta'-\eta)\cdot\beta^{-1}+$ $3\xi\xi'(\xi-\xi')(\eta'-\eta)\cdot\beta^{-1}$	$-1+6\xi\xi'+6\eta\eta'+$ $(1-6\xi\xi')(1-6\eta\eta')$
0	$\xi(2\eta'-\eta)a$	$-\eta'(\eta'-2\eta)\cdot b$
$-\eta'(\xi-2\xi)b$	0	$\xi(2\xi'-\xi)\cdot a$

$$\left(\alpha = \frac{E_p \cdot t^3}{12(1-\nu^2)\cdot ab}\right)$$

Anexa 1 (continuare)

$K_p = \alpha \cdot$

$\frac{156}{35}(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{72}{25}$										
$(21\beta^{-2}+2+9\nu)\cdot \frac{b}{10}$	$\left[\frac{4}{3}\beta^{-2}+\frac{4}{15}(1-\nu)\cdot\right]b^2$	SIMETRIC								
$-(21\beta^{-2}+2+9\nu)\cdot \frac{a}{10}$	$-a\cdot b\cdot \nu$	$\left[\frac{4}{3}\beta^2+\frac{4}{15}(1-\nu)\right]\cdot a^2$								
$\frac{54}{25}\beta^2-\frac{156}{35}\beta^{-2}-\frac{72}{25}$	$-(21\beta^{-2}+2-\nu)\cdot\frac{b}{10}$	$-(9\beta^2-2-9\nu)\cdot\frac{a}{10}$	$K1.1$							
$(21\beta^{-2}+2-\nu)\cdot \frac{b}{10}$	$\left[\frac{2}{3}\beta^{-2}-\frac{1}{15}(1-\nu)\right]\cdot b^2$	0	$-K2.1$	$K2.2$						
$-(9\beta^2-2-9\nu)\cdot \frac{a}{10}$	0	$\left[\frac{2}{3}\beta^2-\frac{4}{15}(1-\nu)\right]\cdot a^2$	$K3.1$	$-K3.2$	$K3.3$					
$-\frac{54}{35}(\beta^2+\beta^{-2})+\frac{72}{25}$	$-(9\beta^{-2}-2+\nu)\cdot\frac{b}{10}$	$(9\beta^2-2+\nu)\cdot\frac{a}{10}$	$K10.1$	$-K11.1$	$-K12.1$	$K1.1$				
$(9\beta^{-2}-2+\nu)\cdot \frac{b}{10}$	$\left[\frac{1}{3}\beta^{-2}+\frac{1}{15}(1-\nu)\right]\cdot b^2$	0	$-K10.2$	$K11.2$	$K12.2$	$-K2.1$	$K2.2$			
$-(9\beta^2-2+\nu)\cdot \frac{a}{10}$	0	$\left[\frac{1}{3}\beta^2+\frac{1}{15}(1-\nu)\right]\cdot a^2$	$-K10.3$	$K11.3$	$K12.3$	$-K3.1$	$K3.2$	$K3.3$		
$\frac{54}{35}\beta^2-\frac{156}{35}\beta^{-2}\frac{72}{25}$	$(9\beta^{-2}-2-9\nu)\cdot\frac{b}{10}$	$(21\beta^2+2-\nu)\cdot\frac{a}{10}$	$K7.1$	$-K11.4$	$-K12.4$	$K4.1$	$-K4.2$	$-K4.3$	$K1.1$	
$(9\beta^{-2}-2-9\nu)\frac{b}{10}$	$\left[\frac{2}{3}\beta^{-2}-\frac{4}{5}(1-\nu)\right]\cdot b^2$	0	$K7.2$	$K8.2$	$K9.2$	$-K5.1$	$K5.2$	$K5.3$	$-K5.4$	$K2.2$
$-(21\beta^2+2-\nu)\cdot\frac{a}{10}$	0	$\left[\frac{2}{3}\beta^2-\frac{1}{15}(1-\nu)\right]\cdot a^2$	$-K7.3$	$K8.3$	$K9.3$	$-K6.1$	$K6.2$	$K6.3$	$-K6.4$	$-K3.2$

$K3.3$

$$\alpha = \frac{E_s \cdot t}{12(1-\nu^2)}$$

$K_s = \alpha \cdot$

$\frac{156}{35}\beta + \frac{12(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$											
$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$\frac{156}{35}\beta^{-1} + \frac{12(1-\nu)}{5}\beta$										
$\left(\frac{22}{35}\beta^2 - \frac{1-11\nu}{20}\right)\cdot a$	$\left(\frac{22}{35}\beta^{-2} - \frac{1-11\nu}{20}\right)\cdot b$	$\left[\frac{4}{35}(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{37-27\nu}{60}\right]\cdot a\cdot b$									
$\frac{54}{35}\beta - \frac{12(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$-\frac{3-9\nu}{2}$	$\left(\frac{13}{25}\beta^2 + \frac{1+9\nu}{20}\right)\cdot a$	$K1.1$								
$\frac{3-9\nu}{2}$	$-\frac{156}{35}\beta^{-1} + \frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(-\frac{22}{35}\beta^{-2} + \frac{7-17\nu}{20}\right)\cdot b$	$-K2.1$	$K2.2$							
$\left(-\frac{13}{35}\beta^2 - \frac{1+9\nu}{20}\right)\cdot a$	$\left(-\frac{22}{35}\beta^{-2} + \frac{7-17\nu}{20}\cdot b\right)$	$\left(-\frac{4}{35}\beta^{-2} - \frac{3}{35}\beta^2 - \frac{1+9\nu}{60}\right)\cdot ab$	$-K3.1$	$K3.2$	$K3.3$						
$-\frac{54}{35}\beta - \frac{6(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$\left(\frac{-13}{35}\beta^2 - \frac{7+3\nu}{20}\right)\cdot a$	$K10.1$	$-K10.2$	$-K10.3$	$K1.1$					
$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{54}{35}\beta^{-1} - \frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{-13}{35}\beta^{-2} - \frac{7+3\nu}{20}\right)\cdot b$	$-K11.1$	$K11.2$	$K11.3$	$K2.1$	$K2.2$				
$\left(\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{7+3\nu}{20}\right)\cdot a$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-2} + \frac{7+3\nu}{20}\right)\cdot b$	$\left[\frac{3}{35}(\beta^2+\beta^{-2}) + \frac{1+9\nu}{60}\right]\cdot ab$	$-K12.1$	$K12.2$	$K12.3$	$-K3.1$	$-K3.2$	$K3.3$			
$-\frac{156}{35}\beta + \frac{6(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$\left(\frac{-22}{35}\beta^2 + \frac{7-17\nu}{20}\right)\cdot a$	$K7.1$	$-K7.2$	$-K7.3$	$K4.1$	$K4.2$	$-K4.3$	$K1.1$		
$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$\frac{54}{35}\beta^{-1} - \frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-2} + \frac{1+9\nu}{20}\right)b$	$-K8.1$	$K8.2$	$K8.3$	$K5.1$	$K5.2$	$-K5.3$	$-K2.1$	$K2.2$	
$\left(\frac{-22}{35}\beta^2 + \frac{7-17\nu}{20}\right)\cdot a$	$\left(-\frac{13}{35}\beta^2 - \frac{1+9\nu}{20}\right)\cdot b$	$\left[\frac{-3}{35}\beta^{-2} - \frac{4}{35}\beta^2 - \frac{1+9\nu}{60}\right]\cdot ab$	$-K9.1$	$K9.2$	$K9.3$	$-K6.1$	$-K6.2$	$K6.3$	$-K6.4$	$-K6.5$	$K3.3$

SIMETRIC

$$D_s = \frac{E_s}{1-\nu}\begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}; \quad D_p = \frac{E_p}{E_s}\cdot D_s$$

BIBLIOGRAFIE

1. J., Adini R.W. Clough, *Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method*, Report to NSF. Grant G7337, 1960.
2. R. Aschenbrenner, *Three-Dimensional Analysis of Pi leFoundations*, J.S.D. **93**, p.201, 1967.
3. G. Butlin C. Mc. Millan, *An improved finite element for analysis of plane coupled shear walls*, Civ. Eng. Pub. Wks Rev., Dec. 1971, p. 1299.
4. D. J. Dawe *On Assumed Displacements for the Rectangular Plate Bending Element*, — J. Roy. Aero. Soc., 1967, p. 722.
5. A. Gheorghiu, *Concepţii moderne în calculul structurilor* — Edit. tehnică, Bucureşti, 1975.
6. H. Lehr, *Fundaţii, exemple de calcul*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.
7. Ch. Massonet, şi alţii, *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1974.
8. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. II, Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.
9. R. J. Melosh, *Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method*, AIAA, 1963, p. 1631.
10. F. Schiel, *Statik der Pfaplwerke*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
11. K. S. Silin, şi alţii, *Fundamenti Opormostov*, Moskva, 1966.
12. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în Teoria elasticităţii*, vol. 1, Edit. Academiei, 1960.
13. S. Timoshenco, Woinowsky — Krieger, *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.
14. M. J. Turner, et al., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aero. Sci., 1956, p. 805.
15. A. Vaicum, *Fundaţii încastrate*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1970.
16. O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, *The Finite Element Method*, London, 1967.
17. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, London 1971.
18. G. Onu, *Calculul radierelor rigide pe coloane*, St. Cerc. Mec. Apl., *4*, 721 (1974).
19. G. Onu, *Calculul podurilor cu luarea în consideraţie a conlucrării dintre elementele principale de rezistenţă şi platelaj*, — Teză de doctorat, I.C.B. 1975.

UN MODEL MATEMATIC AL SISTEMULUI OSCILANT FORMAT DE SUSPENSIA ȘI TRANSMISIA UNUI AUTOMOBIL AFLAT ÎN REGIM DE FUNCȚIONARE TRANZITORIU

de N. TRUICĂ

Centrul de mecanică a solidelor

Lucrarea prezintă un model vîscoelastic liniar al sistemului oscilant format de suspensia și transmisia de forță al unui automobil cu două axe care se deplasează în linie dreaptă în regim de funcționare tranzitoriu. Sînt precizate condițiile care trebuie satisfăcute de către parametri automobilului pentru a obține modelele suspensiei din lucrările bibliografice citate.

Prezentăm în această lucrare un model vîscoelastic liniar al sistemului oscilant, format de suspensia și transmisia de forță al unui automobil cu două axe care se deplasează în linie dreaptă în regim de funcționare tranzitoriu.

În prima parte a lucrării sînt expuse ipotezele, sistemele de referință și elementele de mecanică teoretică utilizate în elaborarea modelului. În partea a doua se elaborează modelul matematic al suspensiei conceput ca un sistem cu șapte grade de libertate, format dintr-un rigid suspendat vîscoelastic pe patru pneuri, care se deplasează prin autopropulsie pe o cale de rulare cu denivelări. În continuare, se modelează transmisia de forță a unui automobil cu o singură axă motoare și se prezintă modelul complet al ansamblului format de suspensia și transmisia de forță. În ultima parte a lucrării, se analizează ecuațiile modelului suspensiei în vederea obținerii unor relații între parametri de masă și geometrici și caracteristicile elementelor vîscoelastice, utilizabile în proiectarea suspensiilor de automobil. Se prezintă de asemenea, un algoritm pentru descrierea drumului ca o funcție care depinde de viteza de rulare a automobilului și de caracteristicile sale geometrice, masice și vîscoelsastice.

1. SISTEME DE REFERINȚĂ, IPOTEZE, RELAȚII DE CALCUL

§ 1.1. Admitem că traiectoriile medii ale punctelor de contact cu solul ale roților automobilului sînt drepte paralele situate în planul Q (fig. 1.1). Fie O proiecția pe planul Q a centrului masei suspendate a automobilului, H planul orizontal, O_1A un segment de pe dreapta comună planelor Q și H, $\bar{n}$ versorul direcției de cea mai mare pantă a planului Q,

îndreptat în sensul urcării pantei. În timpul rulării automobilului, punctul O descrie dreapta O_1O. Ataşăm reperului mobil cu centrul în O sistemul de referinţă cartezian, triortogonal, drept T_1 definit prin versorii $\bar{\imath}$, astfel ca $\bar{\imath}_1$ şi $\bar{\imath}_2$ să fie în planul Q, sensul lui $\bar{\imath}_1$ corespunzînd înaintării automobilului, iar reperului fix cu centrul în O_1 îi ataşăm sistemul de referinţă fix T_0 caracterizat prin versorii $\bar{k}$. Versorii $\bar{\imath}$ şi k se definesc cu relaţiile (1.1); între cele două sisteme de versori există legătura (1.2.).

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \cos\alpha\,\bar{k}_2 + \sin\alpha\,\bar{k}_3; \quad 0 \leqslant \alpha < \pi/2, \\ \bar{\imath}_1 &= \cos\beta\,\bar{k}_1 + \sin\beta\,\bar{n}; \quad 0 \leqslant \beta < 2\pi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{Vmatrix} \bar{\imath}_1 \\ \bar{\imath}_2 \\ \bar{\imath}_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\beta & \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\cos\alpha & \cos\beta\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 \\ \bar{k}_3 \end{Vmatrix}. \tag{1.2}$$

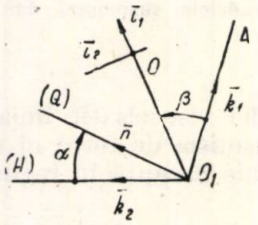


Fig 1.1

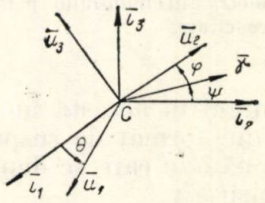


Fig. 1.2

§ 1.2. Ataşăm centrului C al masei suspendate a automobilului sistemele de referinţă T_1' şi T: primul, abstracţie făcînd de o translaţie, este identic cu T_1, al doilea este solidar cu masa suspendată şi definit prin versorii $\bar{u}$ ai direcţiilor centrale principale de inerţie ale masei suspendate a automobilului (fig. 1.2).

Între versorii $\bar{\imath}$ şi $\bar{u}$ se definesc unghiurile lui Euler :

$$\begin{aligned} \bar{\imath}_1 \times \bar{u}_1 &= \bar{\gamma} \sin\theta, \\ \bar{\imath}_2 \times \bar{\gamma} &= \bar{\imath}_1 \sin\psi, \\ \bar{\gamma} \times \bar{u}_2 &= \bar{u}_1 \sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Triedul T se roteşte în raport cu triedul T_1' cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, definită cu relaţiile (1.4) :

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{\gamma} + \dot{\psi}\bar{\imath}_1 + \dot{\varphi}\bar{u}_1 = \omega_x\bar{u}_1 + \omega_y\bar{u}_2 + \omega_z\bar{u}_3 = \sum_1^3 \omega_j\bar{\imath}_j. \tag{1.4}$$

În text, derivata de ordinul întîi în raport cu timpul a unei funcţii scalare sau vectoriale a fost notată printr-un punct suprapus simbolului

funcţiei respective; cu două puncte suprapuse desemnăm derivata de ordinul al doilea în raport cu timpul.

Considerăm că masa suspendată a automobilului este un rigid care execută oscilaţii unghiulare în jurul centrului de masă C, suficient de mici, pentru a putea aproxima funcţiile lor trigonometrice sin şi cos prin argumentele corespunzătoare şi, respectiv, unitatea şi a păstra numai termenii de ordinul întîi în dezvoltările tayloriene corespunzătoare.

Prin liniarizarea relaţiilor de legătură dintre versorii $\bar{\imath}$, $\bar{u}$ şi unghiurile lui Euler, obţinem:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_x = \dot{\varphi} + \dot{\psi} = \dot{\theta}_1, \\ \omega_2 &= \omega_y = \dot{\theta} \qquad = \dot{\theta}_2, \\ \omega_3 &= \omega_z = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{Vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\theta_2 \\ 0 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{\imath}_1 \\ \bar{\imath}_2 \\ \bar{\imath}_3 \end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

§ 1.3 Fie M un punct solidar cu triedul mobil T, caracterizat prin vectorul de poziţie $\overline{CM} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + h\bar{u}_3$. Dacă unghiurile θ_1 şi θ_2 primesc creşterile α şi respectiv β, mici în valoare absolută, comparativ cu 1, deplasarea punctului considerat are expresia

$$\overline{MM'} = (\beta\bar{\imath}_1 - \alpha\bar{\imath}_2)\, h + (\alpha b - \beta a)\, \bar{\imath}_3. \tag{1.7}$$

§ 1.4. Fie m masa suspendată a automobilului, τ tensorul momentelor de inerţie, exprimat faţă de axele centrale principale de inerţie, $\bar{\mathcal{R}}$ rezultanta forţelor aplicate şi a forţelor de legătură care solicită masa suspendată, $\bar{\mathcal{M}}$ momentul rezultant al acestor forţe în raport cu centrul de masă C.

Scriem ecuaţiile de micşorare ale masei suspendate în raport cu reperul fix O_1. După efectuarea calculelor şi neglijarea termenului $\bar{\omega} \times \tau\bar{\omega}$ în virtutea ipotezei de liniaritate admise, obţinem ecuaţia de mişcare a centrului de masă C şi, respectiv, ecuaţia de mişcare a masei suspendate în jurul lui C.

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\overline{O_1C}} &= \bar{\mathcal{R}}, \\ \dot{\tau\bar{\omega}} &= \bar{\mathcal{M}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

2. MODELAREA SUSPENSIEI UNUI AUTOMOBIL CU 2 AXE PRINTR-UN SISTEM VISCOELASTIC LINIAR CU 7 GRADE DE LIBERTATE

Considerăm masa suspendată m şi masele nesuspendate aferente roţilor m_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Fie A_j punctul de legătură al masei suspendate cu masa nesuspendată m_j şi B_j punctul de contact al masei m_j cu calea de rulare, B_j fiind centrul instantaneu de rotaţie al roţii cu indicele j.

Introducem notaţiile: $\overline{P}_j$, $\overline{w}_j$ = forţa de legătură, respectiv momentul de legătură, care acţionează în punctul A_j asupra masei suspendate la momentul t. Introducem indicele zero pentru a indica valoarea unei mărimi la momentul iniţial $t = 0$.

$$\overline{P}_j = H_j\overline{\imath}_1 + L_j\overline{\imath}_2 + V_j\overline{\imath}_3; \qquad \overline{P}_j = \overline{P}_j^0 + \Delta\overline{P}_j,$$

$$\overline{CA}_j = a_j\overline{u}_1 + b_j\overline{u}_2 + h_j\overline{u}_3; \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

z, z_j reprezintă deplasările relative ale centrelor de masă C şi, respectiv, C_j, în raport cu poziţiile corespunzătoare de echilibru static, după direcţia $\overline{\imath}_3$.

Δ_j — variaţia distanţei $\overline{C_jA_j}$ după direcţia $\overline{\imath}_3$,

$$\Delta_j = z - z_j + \alpha b_j - \beta a_j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.1}$$

Pentru a calcula variaţia reacţiunii normale din punctul de legătură A_j, caracteristica elastică respectivă se dezvoltă în serie în jurul punctului de echilibru static dat de condiţia $\Delta_j = 0$. Prin neglijarea termenilor de ordin $\geqslant 2$ se obţine

$$\Delta V_j = -c_j\Delta_j - k_j\dot{\Delta}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.2}$$

în care c_j, k_j sînt coeficienţii de rigiditate, respectiv amortizările vîscoase, corespunzători punctului de echilibru static $\Delta_j = 0$, din articulaţia A_j. S-a considerat că elementele viscoelastice de legătură dintre masa suspendată şi masele nesuspendate răspund numai la componenta după direcţia $\overline{\imath}_3$ a variaţiei distanţei $\overline{C_jA_j}$.

$\overline{S}_j$—reacţiunea căii de rulare asupra masei m_j, aplicată în punctul B_j,

$$\overline{S}_j = (T_j + T_k)\overline{\imath}_1 + Q_j\overline{\imath}_2 + N_j\overline{\imath}_3, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Indicele k se referă numai la roţile motoare: $k = j = 1, 2, 3, 4$ pentru automobil cu ambele axe motoare, $k = 1, 2$, pentru automobil cu tracţiune pe axa din faţă, $k = 3, 4$ pentru automobil cu tracţiune pe axa spate. Mărimile notate cu indicele k sînt nule pentru $j \neq k$.

$s_j(x)$ — profilul căii de rulare urmărit de punctul de contact B_j, în raport cu T_0.

La $t = 0$, $x(0) = 0$, $s_j(0) = 0$.

v, viteza de înaintare a automobilului

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t; \quad \int_0^{x_0} s_j(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.3}$$

Pentru variaţia reacţiunii normale a căii de rulare din punctul B_j se obţine o expresie similară relaţiei (2.2):

$$\Delta N_j = -c_j'\delta_j - k_j'\dot{\delta}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.4}$$

în care $\delta_j = z_j - s_j(x)$ reprezintă variaţia distanţei dintre punctul B_j şi centrul de masă C_j; c'_j, k'_j sînt coeficienţii de rigiditate, respectiv amortizările vîscoase, corespunzători pneului cu indicele j,

$$g_j = c'_j s_j + k'_j \dot{s}_j \tag{2.5}$$

reprezintă forţa indusă în pneu de denivelările drumului.

$\bar{F}$, $\bar{F}_j$ — forţele de greutate aplicate în centrele de masă C şi C_j:

$$\bar{F} = X\bar{\imath}_1 + Y\bar{\imath}_2 + Z\bar{\imath}_3,$$

$$\bar{F}_j = X_j\bar{\imath}_1 + Y_j\bar{\imath}_2 + Z_j\bar{\imath}_3.$$

Componentele forţelor de greutate se calculează folosind relaţiile (1.2).

$\bar{F}_a$ — forţa aerodinamică datorată rezistenţei aerului şi vîntului, aplicată în centrul de presiune C_a, situat pe masa suspendată.

$$\bar{F}_a = X_a\bar{\imath}_1 + Y_a\bar{\imath}_2 + Z_a\bar{\imath}_3,$$

$$\overline{OC}_a = a_a\bar{\imath}_1 + b_a\bar{\imath}_2 + h_a\bar{\imath}_3.$$

Alte notaţii: $\overline{OC} = h\bar{\imath}_3$; $\overline{OB}_j = a_j\bar{\imath}_1 + b'_j\bar{\imath}_2 + s_j\bar{\imath}_3$,

$$\overline{C_jA'_j} = e_j\bar{\imath}_2; \quad b'_j = b_j - e_j; \quad b'_j - b'_{j+1} = l_j,$$

r_j — raza dinamică a roţii cu indicele j,
J_j — momentul de inerţie al roţii j faţă de axa proprie de rotaţie.

§ 2.1 ECUAŢIILE DE MIŞCARE ALE CENTRELOR DE MASĂ C şi C_j

Notăm cu $\bar{R}$, $\bar{R}_j$ rezultantele forţelor care acţionează asupra masei m, respectiv asupra masei m_j:

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{F}_a + \Sigma \bar{P}_j, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R^1 = X + X_a + \Sigma H_j, \\ m\ddot{y} &= R^2 = Y + Y_a + \Sigma L_j, \\ m\ddot{z} &= R^3 = Z + Z_a + \Sigma V_j, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\bar{R}_j = \bar{F}_j + \bar{S}_j - \bar{P}_j, \tag{2.8}$$

$$(J_j + m_j r_j^2)\ddot{\beta}_j = r_j\,(X_j + T_j + T_k - H_j),$$

$$m_j\ddot{y}_j = Y_j + Q_j - L_j = 0, \tag{2.9}$$

$$m_j\ddot{z}_j = Z_j + N_j - V_j.$$

Ecuaţia $(2.9)_1$ se obţine din condiţia ca punctele B_j ale roţilor să aibă viteze instantanee nule. Însumăm ecuaţiile $(2.7)_1$ şi $(2.9)_1$ admiţînd egalităţile :

$$\ddot{x} = r_j\ddot{\beta}_j = r_k\ddot{\beta}_k, \tag{2.10}$$

$$m_a^*\ddot{x} = X + \sum X_j + X_a + \sum (T_j + T_k), \tag{2.11}$$

în care

$$m_a^* = m_a + \sum \frac{1}{r_j^2} J_j ; \; m_a = m + \sum m_j,$$

$T_j = -(d_j N_j + \mathcal{M}_j^{\mu}) : r_j$ reprezintă rezistenţa la înaintare datorită rulării şi momentului de frînare a roţii.

$T_k =$ forţa de tracţiune ; φ_1 este coeficientul de aderenţă dintre roata motoare şi sol după direcţia $\bar{\imath}_1$.

$$\begin{aligned} &\sum T_k = \sum \mathcal{M}_k^m : r_k \leqslant \varphi_1 \sum N_k, \\ &\sum T_k = 0 \text{ pentru } N_k, N_{k+1} = 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$\mathcal{M}_k^m$ — momentul motor care solicită roata motoare cu indicele k. Egalitatea (2.11) reprezintă ecuaţia de mişcare după direcţia $\bar{\imath}_1$ a centrului maselor automobilului.

Fixăm condiţiile iniţiale ale mişcării : la $t = 0$, $v = 0$; automobilul se află în repaus faţă de sol.

$$\begin{aligned} &\sum T_k^0 r_k^0 = -(X + \sum X_j + X_a^0) r_k^0 = \sum \mathcal{M}_k^{m,0}, \\ &\sum N_j^0 = -(Z + \sum Z_j + Z_a^0), \\ &\sum V_j^0 = -(Z + Z_a^0). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ţinînd seama de condiţiile iniţiale ale mişcării şi de notaţiile (2.1), (2.2), (2.4), obţinem din $(2.7)_3$ şi $(2.9)_3$ ecuaţiile de mişcare după direcţia $\bar{\imath}_3$ ale maselor m şi, respectiv, m_j :

$$\begin{aligned} &m\ddot{z} + \sum c_j \Delta_j + \sum k_j \dot{\Delta}_j = \Delta Z_a, \\ &m_j\ddot{z}_j + c_j' \delta_j + k_j'\dot{\delta}_j - c_j \Delta_j - k_j \dot{\Delta}_j = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

§ 2.2. ECUAŢIILE OSCILAŢIILOR MASEI SUSPENDATE ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ C

Momentul total aplicat masei suspendate are expresia :

$$\bar{\mathcal{M}} = \overline{CC_a} \times \bar{F}_a + \sum \overline{CA_j} \times \bar{P}_j + \sum \bar{w}_j + \mathcal{M}^m \bar{\imath}_1. \tag{2.15}$$

Calculăm momentele de legătură $\bar{w}_j$ din expresiile momentelor $\bar{\mathcal{M}}_j$, care solicită masele nesuspendate m_j,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{M}}_j &= \overline{B_jC_j}\times\bar{F}_j - \overline{B_jA_j'}\times\bar{P}_j - d_jN_j\bar{\imath}_2 - \bar{w}_j,\\
\mathcal{M}_j^1 &= -r_jY_j - e_jV_j + r_jL_j - w_j^1 = 0,\\
\mathcal{M}_j^2 &= r_j(X_j - H_j) - {}_{dj}N_j - w_j^2;\quad w_j^2 = \mathcal{M}_j^u - \mathcal{M}_k^m.\\
\mathcal{M}_j^3 &= e_jH_j - w_j^3 = 0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Introducem notaţiile :

$\Delta\bar{\mathcal{M}}_a = \overline{OC}_a\times\bar{F}_a\big|_{t=0}^{t}$, variaţia momentului forţei aerodinamice în raport cu originea O, în intervalul $[0, t]$.

$\Delta\mathcal{M}^m = \mathcal{M}^m - \mathcal{M}^{m,0}$, variaţia momentului motor care solicită masa suspendată. La $t = 0$, masa suspendată este solicitată de momentul de frînare $\mathcal{M}^{m,0}$ dat de relaţia

$$i_0\mathcal{M}^{m,0} = \sum \mathcal{M}_k^{m,0}, \tag{2.17}$$

în care i_0 este raportul de demultiplicare al reductorului principal.

$\sum\mathcal{M}_k^{m,0}$—momentul necesar blocării roţilor motoare; se calculează cu relaţia (2.13).

A, B, C momentele centrale principale de inerţie ale masei suspendate.

Calculăm componentele momentului total $\bar{\mathcal{M}}$ şi obţinem

$$\begin{aligned}
&A\ddot{\alpha} - \sum b_j'\Delta V_j = \Delta\mathcal{M}_a^1 + \Delta\mathcal{M}^m,\\
&B\ddot{\beta} + hm\ddot{x} + \sum (J_j + m_jr_j^2)\ddot{\beta}_j + \sum a_j\Delta V_j = \Delta\mathcal{M}_a^2 - \sum d_jN_j,\\
&\sum\left(J_j\frac{1}{r_j^2} + m_j\right)b_j'\ddot{x} + \Delta\mathcal{M}_a^3 + \Sigma a_j\Delta Q_j = \Sigma b_j'(T_j + \Delta T_k).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Relaţia $(2.18)_1$ reprezintă ecuaţia oscilaţiilor de ruliu ale masei suspendate. Relaţia $(2.18)_2$ exprimă legătura dintre oscilaţiile de tangaj β ale masei suspendate şi oscilaţiile longitudinale x şi cele de rotaţie β_j ale roţilor automobilului. Ecuaţia $(2.18)_3$ exprimă condiţia ca automobilul să nu derapeze.

Ţinînd seama de egalităţile (2.10) şi ecuaţia (2.11) obţinem următoarea expresie a ecuaţiei oscilaţiilor de tangaj ale masei suspendate :

$$B\ddot{\beta} + \Sigma a_i\Delta V_j = \Delta\mathcal{M}_a^2 - \Sigma d_jN_j - h^*[\Delta X_a + \Sigma(T_j + \Delta T_k)], \tag{2.19}$$

în care

$$h^* = \left[hm + \Sigma r_j\left(m_j + \frac{1}{r_j^2}J_j\right)\right] : m_a^*.$$

§ 2.3. Prezentăm sub formă matriceală ecuațiile modelului cu șapte grade de libertate al suspensiei unui automobil cu două axe, adică ecuațiile (2.14), $(2.18)_1$ și (2.19):

$$M\ddot{u} + K\dot{u} + Cu = f, \tag{2.20}$$

$$M = \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{Vmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix} \quad f = \begin{Vmatrix} g \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \end{Vmatrix},$$

$$g = Z_a - Z_a^0,$$

$$g_j = c_j' s_j(x) + k_j' \dot{s}_j(x),$$

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{vmatrix} b_a & h_a \\ Y_a & Z_a \end{vmatrix} + \mathcal{M}^m \right\}_{t=0}^{t},$$

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} h_a & a_a \\ Z_a & X_a \end{vmatrix} - \Sigma\, d_j N_j - h^* \left[X_a + \Sigma\,(T_j + T_k) \right] \right\}_{t=0}^{t},$$

$$C = \begin{Vmatrix} \Sigma c_j & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & \Sigma b_j c_j & -\Sigma a_j c_j \\ -c_1 & c_1 + c_1' & 0 & 0 & 0 & -b_1 c_1 & a_1 c_1 \\ -c_2 & 0 & c_2 + c_2' & 0 & 0 & -b_2 c_2 & a_2 c_2 \\ -c_3 & 0 & 0 & c_3 + c_3' & & -b_3 c_3 & a_3 c_3 \\ -c_4 & 0 & 0 & 0 & c_4 + c_4' & -b_4 c_4 & a_4 c_4 \\ \Sigma b_j' c_j & -b_1' c_1 & -b_2' c_2 & -b_3' c_3 & -b_4' c_4 & \Sigma b_j b_j' c_j & -\Sigma a_j b_j' c_j \\ -\Sigma a_j c_j & a_1 c_1 & a_2 c_2 & a_3 c_3 & a_4 c_4 & -\Sigma a_j b_j c_j & \Sigma a_j^2 c_j \end{Vmatrix}.$$

Matricea K se obține înlocuind în matricea C pe c prin k.

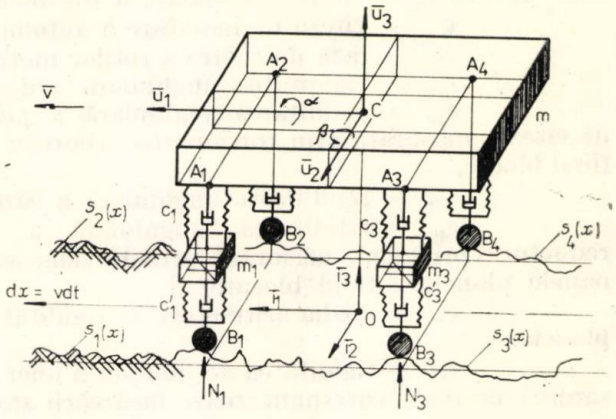


Fig. 2.1. — Modelul cu șapte grade de libertate al suspensiei unui automobil cu două axe, descris de ecuațiile (2.20).

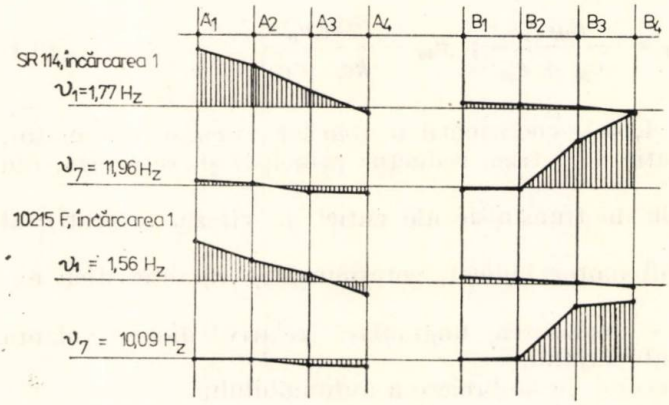


Fig. 2.2. — Moduri de oscilație ale suspensiilor autocamioanelor SR114 și 10 215 F : vectori proprii, în deplasări [16].

3. MODELAREA TRANSMISIEI DE FORȚĂ A UNUI AUTOMOBIL CU DOUĂ AXE PRINTR-UN SISTEM VISCOELASTIC LINIAR CU CINCI GRADE DE LIBERTATE

Folosim următoarele notații:

I_1 — valoarea medie a momentului de inerție al pieselor cu mișcare din ansamblul motor și ambreiaj, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit.

I_2 — momentul de inerție al butucului discului ambreiajului, în raport cu axa proprie de rotație

I_3 — momentul de inerție al pieselor cu mișcare de rotație din cutia de viteze, în raport cu axa de rotație a arborelui de ieșire

I_4 — momentul de inerție al pieselor cu mișcare de rotație din reductorul principal și al axelor planetare, în raport cu axa de rotație a axelor planetare

$\dot{\varphi}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ — vitezele unghiulare ale arborilor de ieșire din ansamblele motor, ambreiaj, cutie de viteze, reductor principal, măsurate în raport cu carcasele ansamblelor respective.

$\beta_k = v/r_k$ — viteza unghiulară a roţilor motoare,

v — viteza de înaintare a automobilului,

r_k — raza de rulare a roţilor motoare,

c_{12} — rigiditatea unghiulară a discului ambreiajului,

c_{23} — rigiditatea unghiulară a pieselor cu mişcare din cutia de viteze, măsurată prin torsionarea arborelui primar, arborele secundar fiind blocat,

c_{30} — rigiditatea unghiulară a cardanului,

c_{40} — rigiditatea unghiulară a pieselor cu mişcare din reductorul principal, măsurată prin torsionarea pinionului de atac, pinioanele planetare fiind blocate,

c_p — media aritmetică a rigidităţilor unghiulare ale axelor planetare,

c_r — rigiditatea unghiulară a unei roţi motoare, stabilită la o sarcină normală corespunzătoare încărcării statice a axei motoare

k — numărul roţilor aflate de aceeaşi parte a axei motoare,

$$c_{34} = \frac{c_{30}c_{40}}{c_{30} + c_{40}}; \quad c_{45} = \frac{2kc_rc_p}{kc_r + c_p}, \tag{3.1}$$

k_j'', $j = 1, 2, 3, 4, 5$ — coeficienţii disipărilor vîscoase din motor, discul ambreiajului, cutie de viteze, reductor principal şi, respectiv, din roţile motoare,

i_j, i_0 — rapoartele de transmisie ale cutiei de viteze, respectiv al reductorului principal

$\mathcal{M}_m(t)$ — momentul motor indicat, corespunzător caracteristicii externe de cuplu,

$q(t) = \varphi_m - \varphi_{disc}$ — deplasarea unghiulară relativă dintre volanta motorului şi discul ambreiajului,

τ — durata procesului de ambreiere a automobilului,

$Q(t) = I_1\ddot{q}(t) + k_1''\dot{q}(t)$ — funcţia impuls a ambreierii. Pentru $t \in [0, \tau]$, φ_1 din ecuaţiile (3.3) reprezintă deplasarea unghiulară a discului conducător al ambreiajului,

$$Q(t) = 0 \text{ pentru } t = 0 \text{ şi } t = \tau.$$

Admitem că funcţia impuls a ambreierii respectă relaţia

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau Q(t)\, d\varphi_1(t) = \frac{1}{2} I_1 \omega_m^2, \tag{3.2}$$

în care ω_m este viteza unghiulară a motorului în momentul începerii ambreierii,

m_a^* — masa totală echivalentă a automobilului (2.11).

Ecuaţia (2.11) a fost considerată în modelul transmisiei, completîndu-se cu termenul pierderilor vîscoase din roţile motoare. S-a considerat că automobilul are o singură axă motoare, vitezele unghiulare ale roţilor motoare fiind egale între ele.

Modelul transmisiei unui automobil cu două axe astfel conceput este descris de ecuaţiile:

$$I\ddot{\varphi} + P\dot{\varphi} + Q\varphi = w, \tag{3.3}$$

$$I = \begin{Vmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_a^* \end{Vmatrix}, \quad \varphi = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ x \end{Vmatrix}, \quad w = \begin{Vmatrix} -\mathcal{M}_m(t) - Q(t) + I_1\ddot{\alpha} + k_1''\dot{\alpha} \\ I_2\ddot{\alpha} - c_{23}(i_j - 1)\alpha \\ I_3\ddot{\alpha} + k_3''\dot{\alpha} + [c_{23}(i_j - 1)i_j + c_{34}]\alpha \\ -i_0 c_{34}\alpha \\ X + \Sigma X_j + X_a + \Sigma T_j + C_{45}\beta \end{Vmatrix},$$

$$P = \begin{Vmatrix} k_1'' + k_2'' & -k_2'' & 0 & 0 & 0 \\ -k_2'' & k_2'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5'' \end{Vmatrix},$$

$$Q = \begin{Vmatrix} c_{12} & -c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{12} & c_{12} + c_{23} & -i_j c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -i_j c_{23} & i_j^2 c_{23} + c_{34} & -i_0 c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -i_0 c_{34} & i_0^2 c_{34} + c_{45} & -c_{45}/r_k \\ 0 & 0 & 0 & -c_{45}/r_k & c_{45}/r_k^2 \end{Vmatrix}.$$

§ 3.1. Ansamblul format de ecuaţiile (3.3) şi (2.20) modelează suspensia şi transmisia unui automobil cu două axe ca pe un singur sistem oscilant vîscoelastic liniar cu 12 grade de libertate.

Momentul de ruliu din relaţia (2.15), care intervine în ecuaţia $(3.20)_6$ şi relaţia (2.8) are expresia

$$\mathcal{M}^m = i_0 c_{43}(i_0 \varphi_4 - \varphi_3). \tag{3.4}$$

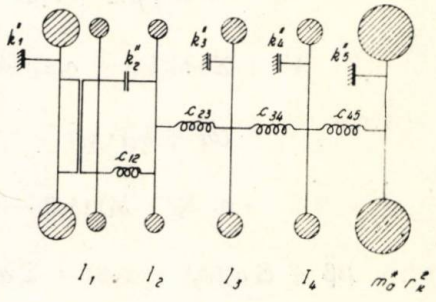


Fig. 3.1

Momentul motor $\Sigma\mathcal{M}_k^m$, care intervine în ecuaţia (2.19) a oscilaţiilor de tangaj ale masei suspendate, are expresia

$$\Sigma\mathcal{M}_k^m = c_{45}\left(\varphi_4 - \frac{x}{r_k} + \beta\right). \tag{3.5}$$

Modelul cu şapte grade de libertate (2.20) a fost utilizat în lucrarea [16] la calculul frecvenţelor proprii şi modurilor de oscilaţie proprie ale suspensiilor autocamioanelor SR 114 şi 10 215 F (fig. 2.2).

4. O ANALIZĂ A ECUAȚIILOR (2.20) ÎN VEDEREA OBȚINERII UNOR RELAȚII UTILIZABILE ÎN PROIECTAREA SUSPENSIILOR DE AUTOMOBILE

Prin construcția automobilului se realizează egalitățile:

$$\begin{aligned} &c_1 = c_2 = c_f/2\,, \qquad c_3 = c_4 = c_s/2\,, \qquad a_1 = a_2, \\ &c_1' = c_2' = c_f'/2\,, \qquad c_3' = c_4' = c_s'/2\,, \qquad a_3 = a_4. \\ &k_1 = k_2 = k_f/2, \qquad k_3 = k_4 = k_s/2, \\ &k_1' = k_2' = k_f'/2, \qquad k_3' = k_4' = k_s'/2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Rescriem ecuațiile (2.20) ținînd seama de relațiile (4.1)

$$\begin{aligned} &m\ddot{z} + (k_f + k_s)\,\dot{z} + (c_f + c_s)\,z - k_1(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) - k_3(\dot{z}_3 + \dot{z}_4) - \\ &- c_1(z_1 + z_2) - c_3(z_3 + z_4) + [(b_1 + b_2)\,k_1 + (b_3 + b_4)\,k_3]\dot{\alpha} + \\ &+ [(b_1 + b_2)\,c_1 + (b_3 + b_4)\,c_3]\alpha - [a_1 k_f + a_3 k_s]\beta - \\ &- (a_1 c_f + a_3 c_s)\,\beta = g, \\ &m_j\ddot{z}_j - k_j\dot{z} - c_j z + (k_j + k_j')\,\dot{z}_j + (c_j + c_j')\,z_j - \\ &- b_j(k_j\dot{\alpha} + c_j\alpha) + a_j(k_j\beta + c_j\beta) = g_j, \\ &A\ddot{\alpha} + \Sigma b_j b_j'(k_j\dot{\alpha} + c_j\alpha) - a_1(b_1' + b_2')\,(k_1\beta + c_1\,\beta) + \\ &+ (b_1' + b_2')\,(k_1\dot{z} + c_1 z) + (b_3' + b_4')\,(k_3\dot{z} + c_3\,z) - \\ &- a_3(b_3' + b_4')\,(k_3\beta + c_3\,\beta) - \Sigma\, b_j'(k_j\dot{z}_j + c_j z_j) = \mathcal{M}_1\,, \\ &B\ddot{\beta} + \Sigma\, a_j^2(k_j\dot{\beta} + c_j\beta) + \Sigma\, a_j(k_j\dot{z}_j + c_j z_j) - (a_1 k_f + a_3 k_s)\,\dot{z} - \\ &- (a_1 c_f + a_3 c_s)\,z - a_1(b_1 + b_2)(k_1\dot{\alpha} + c_1\alpha) - \\ &- a_3(b_3 + b_4)(k_3\dot{\alpha} + c_3\alpha) = \mathcal{M}_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observăm că însumînd primele cinci ecuații de mișcare obținem

$$m\ddot{z} + \sum_1^4 m_j\ddot{z}_j = \Delta Z_a + \sum_1^4 \Delta N_j\,,$$

relaţie care exprimă că rezultanta forţelor de inerţie normale la calea de rulare luate cu semn schimbat este egală cu variaţia normală a forţei aerodinamice, plus variaţia totală a forţelor normale dintre roţile automobilului şi drum.

Pentru decuplarea oscilaţiilor z ale centrului C al masei suspendate, respectiv decuplarea oscilaţiilor β de tangaj ale masei suspendate, de oscilaţiile α de ruliu ale masei suspendate, sînt necesare şi suficiente condiţiile (4.3) :

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 = 0, \quad b_1' + b_2' = 0, \\ b_3 + b_4 = 0, \quad b_3' + b_4' = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Relaţiile (4.3) exprimă condiţia ca centrul C să fie situat în planul median al automobilului, faţă de care punctele de prindere ale masei suspendate la masele nesuspendate şi respectiv centrele maselor nesuspendate sînt două cîte două simetric aşezate.

Pentru decuplarea oscilaţiilor z ale centrului C de oscilaţiile β de tangaj sînt necesare şi suficiente condiţiile (4.4).

$$\frac{k_s}{k_f} = \frac{c_s}{c_f} = -\frac{a_1}{a_3} = \psi(q), \tag{4.4}$$

$\psi(q)$ reprezintă raportul în care centrul C al masei suspendate împarte ampatamentul automobilului ; q — masa încărcăturii transportate.

Facem ipoteza că oscilaţiile roţilor de pe partea stîngă a automobilului sînt, respectiv, identice cu oscilaţiile roţilor de pe partea dreaptă a automobilului :

$$z_1 = z_2, \; z_3 = z_4. \tag{4.5}$$

Condiţiile (4.5) împreună cu relaţiile (4.3) determină decuplarea oscilaţiilor de ruliu ale masei suspendate de oscilaţiile z_j ale maselor nesuspendate : ecuaţia $(4.2)_6$ capătă expresia (4.6)

$$\ddot{\alpha} + 2h\,\dot{\alpha} + p^2\,\alpha = \mathcal{M}_1 : A, \tag{4.6}$$

în care :

$$p^2 = (b_1 b_1' c_f + b_3 b_3' c_s) : A,$$

$$2h = (b_1 b_1' k_f + b_3 b_3' k_s) : A.$$

Frecvenţa proprie ν a oscilaţiilor α de ruliu, descrise de ecuaţia (4.6), se calculează cu relaţia :

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{p^2 - h^2}. \tag{4.7}$$

§. 4.1. În ipoteza că relaţiile (4.3) şi (4.5) sînt satisfăcute, din sistemul (4.2) obţinem modelul cu patru grade de libertate:

$$\begin{aligned}
&m\ddot{z} + k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) + c_f(\zeta_1 - z_1) + k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) + c_s(\zeta_3 - z_3) = g,\\
&m'\ddot{z}_1 - k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) - c_f(\zeta_1 - z_1) + k_f'\dot{z}_1 + c_f'z_1 = g_f,\\
&m''\ddot{z}_3 - k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) - c_s(\zeta_3 - z_3) + k_s'\dot{z}_3 + c_s'z_3 = g_s\\
&m\rho^2\ddot{\beta} - a_1[k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) + c_f(\zeta_1 - z_1)] - a_3[k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}) + c_s(\zeta_3 - z_3)] = \mathcal{M}_2,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

în care

$$\begin{aligned}
&m\rho^2 = B,\ g_1 + g_2 = g_f,\ g_3 + g_4 = g_s,\\
&m' = m_1 + m_2,\ z - a_1\beta = \zeta_1,\\
&m'' = m_3 + m_4,\ z - a_3\beta = \zeta_3.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Expresiile (4.9) reprezintă deplasările relative, după direcţia normală căii de rulare, a două puncte C_1 şi C_3, solidare cu masa suspendată, de coordonate $(a_1, 0, 0)$ şi respectiv $(a_3, 0, 0)$. Punctele C_1, C_3 se află situate în planul median al automobilului, pe axa centrală principală de inerţie a masei suspendate caracterizată de versorul $\bar{u}_1$.

Înlocuim în (4.8) pe z şi β prin ζ_1 şi ζ_3. Obţinem:

$$\begin{aligned}
&m\ddot{\zeta}_1 + \left(1 + \frac{a_1^2}{\rho^2}\right)[k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) + c_f(\zeta_1 - z_1)] +\\
&+\left(1 + \frac{a_1a_3}{\rho^2}\right)[k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) + c_s(\zeta_3 - z_3)] = g - \frac{a_1^2}{\rho^2}\mathcal{M}_2,\\
&m'\ddot{z}_1 - k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) - c_f(\zeta_1 - z_1) + k_f'\dot{z}_1 + c_f'z_1 = g_f,\\
&m''\ddot{z}_3 - k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) - c_s(\zeta_3 - z_3) + k_s'\dot{z}_3 + c_s'z_3 = g_s,\\
&m\ddot{\zeta}_3 + \left(1 + \frac{a_3^2}{\rho^2}\right)[k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) + c_s(\zeta_3 - z_3) +\\
&+\left(1 + \frac{a_1a_3}{\rho^2}\right)[k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) + c_f(\zeta_1 - z_1)] = g - \frac{a_3^2}{\rho^2}\mathcal{M}_2.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

În ipoteza că se realizează condiţia

$$\rho^2 + a_1a_3 = 0, \tag{4.11}$$

ecuaţiile $(4.10)_1$ şi $(4.10)_4$ se decuplează. Se obţin sistemele bimasice independente:

$$m_f\ddot{\zeta}_1 + k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) + c_f(\zeta_1 - z_1) = -\frac{1}{l}(\mathcal{M}_2 + a_3g), \tag{4.12}$$

$$m'\ddot{z}_1 - k_f(\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) - c_f(\zeta_1 - z_1) + k_f'\dot{z}_1 + c_f'z_1 = g_f;$$

$$m_s\ddot{\zeta}_3 + k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) + c_s(\zeta_3 - z_3) = \frac{1}{l}(\mathcal{M}_2 + a_1g), \tag{4.13}$$

$$m''\ddot{z}_3 - k_s(\dot{\zeta}_3 - \dot{z}_3) - c_s(\zeta_3 - z_3) + k_s'\dot{z}_3 + c_s'z_3 = g_s,$$

în care

$$m_f = -\frac{a_3}{l}m,\ m_s = \frac{a_1}{l}m,\ l = a_1 - a_3.$$

Pentru ca cele două sisteme oscilante (4.12) şi (4.13), aferente axei faţă şi, respectiv, axei spate, să aibe aceleaşi valori proprii, este necesară şi suficientă satisfacerea relaţiilor :

$$\frac{m_s}{m_f} = \frac{m''}{m'} = \frac{k_s}{k_f} = \frac{k_s'}{k_f'} = \frac{c_s}{c_f} = \frac{c_s'}{c_f'} = \psi(q). \tag{4.14}$$

Egalităţile (4.14) includ şi condiţiile (4.4), necesare şi suficiente pentru decuplarea oscilaţiilor z ale centrului C de oscilaţiile β de tangaj.

În cazul vagoanelor de cale ferată şi al autobuzelor $\psi = 1$. În această situaţie relaţiile (4.14) impun ca parametri de masă, de rigiditate şi disipările vîscoase să fie, respectiv, aceiaşi pentru ambele axe.

Soluţiile sistemului cu două grade de libertate, descris de ecuaţiile (4.12) şi (4.13), sînt determinate cu ajutorul transformatei Laplace în lucrarea [10].

Valorile proprii $\lambda = -h \pm i\omega$ ale sistemului (4.12) se calculează din ecuaţia

$$(m_f\lambda^2 + k_f\lambda + c_f)(m'\lambda^2 + k_f'\lambda + c_f') + m_f(k_f\lambda + c_f)\lambda^2 = 0. \tag{4.15}$$

Pentru cazul elastic, cînd $k_f = k_f' = 0$, din ecuaţia (4.15) obţinem valorile pulsaţiilor proprii aferente axei faţă :

$$\omega_0 = p\sqrt{1 \pm \sqrt{1-\varepsilon}}, \tag{4.16}$$

în care

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c_f + c_f'}{m'} + \frac{c_f}{m_f}\right)},$$

$$q^4 = \frac{c_f c_f'}{m_f m'}, \quad \varepsilon = q^4 : p^4.$$

Cele prezentate arată că modelele din lucrările [3], [5]—[10], [12], [13] descriu satisfăcător comportarea sistemului oscilant studiat numai dacă sînt satisfăcute condiţiile (4.1), (4.3), (4.5), (4.11), (4.14). Această concluzie precizează domeniul de aplicabilitate al rezultatelor expuse în lucrările menţionate

§ 4.2. DETERMINAREA FUNCŢEI DRUM S(x) ŞI A FORŢEI NORMALE N(x) DINTRE ROATA AUTOMOBILULUI ŞI DRUM

Considerăm că un automobil, ale cărui caracteristici geometrice, masice şi vîscoelastice sînt cunoscute, se deplasează în linie dreaptă, cu viteza $v = \text{const.}$ pe un anumit drum. În intervalul de timp T, se înregis-

trează accelerațiile $\ddot{q}_j(t)$ și $\ddot{z}_j(t)$, după direcția normală la calea de rulare, ale punctelor A_j, și respectiv, C_j, aferente unei roți conduse. A_j reprezintă punctul în care elementele vîscoelastice dintre masa suspendată și roata cu indicele j se prind la masa suspendată; C_j reprezintă centrul de masă al roții.

Din ecuația $(2.9)_3$, cu notațiile introduse în § 2.0, obținem — pentru variația forței normale dintre roată și drum și, respectiv, pentru traiectoria centrului instantaneu de rotație al roții — expresiile:

$$\Delta N_j(t) = m_j\ddot{z}_j(t) + k_j(\dot{z}_j(t) - \dot{q}_j(t)) + c_j(z_j(t) - q_j(t)),$$

$$k'_j\dot{s}_j(t) + c'_j s_j(t) = \Delta N_j(t) + k'_j\dot{z}_j(t) + c'_j z_j(t). \tag{4.17}$$

Funcțiile $\Delta N_j(t)$ și $s_j(t)$ se determină pe baza relațiilor (4.17) cu ajutorul unui calculator. Pentru obținerea expresiilor $s(x)$ și $\Delta N(x)$ se ține seama de faptul că $x = vt$ (v = const.).

Dacă coeficientul amortizărilor vîscoase k'_j al pneului se ia zero, atunci, pentru funcția drum $s(x)$, se obține expresia

$$s_j(x) = \frac{1}{c'_j}\Delta N_j(x) + z_j(x). \tag{4.18}$$

Funcția drum $s(x)$, astfel determinată, nu reprezintă de fapt geometria drumului, ci traiectoria centrului instantaneu de rotație al roții în timpul rulării automobilului și depinde de geometria drumului, de viteza de rulare, precum și de caracteristicile geometrice și fizice ale automobilului.

Primită la redacție la 30 iulie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Buzdugan ș.a., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Edit. Academiei, 1975.
2. B. Démidovitch, I. Maron, *Éléments de calcul numérique*, Editions Mir., 1973.
3. I. Drăghici, ș.a., *Suspensii și amortizoare*, Edit. tehnică, 1970.
4. Fl. Dudiță, *Regimuri tranzitorii în transmisia automobilului*, St. cerc. mec. apl., **16**, *3* (1964).
5. J. R. Ellis, F. I. Mech, *Vehicle dynamics*, London, 1969.
6. C. Ghiulai, *Mecanica automobilului*, Edit. tehnică, 1965.
7. G. Chiulai, Ch. Vasiliu, *Dinamica autovehiculelor*, Edit. didactică, București, 1975.
8. A. M. Julien, *Dynamique de la voiture automobile*, tome I, Paris, 1968.
9. Manfred Mitschke, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.
10. Р. В. Ротенберг, *Подвеска автомобиля. Колебания и плавность хода*, Москва, 1972.
11. Al. Stoenescu, Gh. Silaș, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, 1957.
12. S. Timoschenko, *Théorie des vibrations*, Paris, 1957.
13. M. Untaru, ș.a., *Construcția și calculul automobilelor*, Edit. tehnică, 1974.
14. V. Vâlcovici, ș.a., *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, 1963.
15. *Influența amortizorului cu frecare al ambreiajului asupra solicitărilor transmisiei autocamioanelor*, Contract de cercetare CMS București — ICPAT Brașov, 1974.
16. *Modelarea pe calculator a transmisiei și suspensiei autovehiculelor. Fenomene dinamice*, Contract de cercetare CMS București — ICPAT Brașov, 1975.

CONSIDERAȚII ASUPRA CALCULULUI CONTRAGREUTĂȚILOR AFECTATE ARBORILOR COTIȚI

de ANDREI RIPIANU

Institutul politehnic Cluj-Napoca

În construcția arborilor cotiți destinați motoarelor cu ardere internă, pentru descărcarea lagărelor, se obișnuiește ca să se atașeze contragreutăți la brațele coturilor. Momentul static al grupului de două concentrații aferente unui braț reprezintă de obicei 60% din momentul static al cotului, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit. Pentru a evita pericolul pătrunderii primei turații critice în domeniul turațiilor de regim, este necesar ca momentul de inerție al unui cot în raport cu axa de rotație a arborelui cotit să fie cît mai mic posibil. În lucrare se determină parametri geometrici ai contragreutăților, avînd forma de calotă cilindrică, care, pentru un moment static dat, prezintă valoarea minimă a momentului de inerție, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit.

Rolul contragreutrăților fixate la brațele coturilor arborilor cotiți de la motoarele cu ardere internă sau de la compresoarele cu piston este de a descărca lagărele prin echilibrarea parțială a forțelor de inerție centrifugale cauzate de masele în mișcare de rotație aparținînd coturilor și echipajelor mobile aferente acestora.

Pentru ca descărcarea lagărelor să fie totală ar fi necesar ca momentul static al celor două contragreutăți fixate la cele două brațe a fiecărui cot în raport cu axa de rotație a arborelui cotit să fi egal cu momentul static, în raport cu aceeași axă, a maselor în mișcare de rotație ce aparțin cotului respectiv și echipajelor mobile aferente acestuia. Totuși, în practica construcției de motoare și compresoare cu piston se dimensionează astfel contragreutățile încît momentul static al celor două contragreutăți aferente unui cot în raport cu axa de rotație a arborelui cotit să reprezinte 60% din valoarea momentului static, în raport cu aceeași axă, a maselor în mișcare de rotație a cotului și echipajelor mobile aferente acestuia. Într-adevăr, dimensionarea și plasarea contragreutăților astfel încît cele două momente statice să fie egale între ele ar permite echilibrarea totală a forțelor centrifugale în inerție însă ar genera și dezavantaje. Astfel, cu cît momentul static al grupului de două contragreutăți afectate unui cot, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit, este mai mare, cu atît este mai mare și momentul de inerție mecanic axial, în raport cu aceeași axă, a cotului plus echipajele mobile aferente acestuia. Cu cît aceste momente de inerție sînt mai mari cu atît pulsațiile proprii aferente vibrațiile de torsiune a arborelui cotit au valori mai mici ceea ce ar putea aduce prima sau primele turații critice în domeniul turațiilor de regim.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 5, 1977, P. 731–739

Totodată, cu cît momentul static al grupului de două contragreutăți afectate unui cot este mai mare și spațiul necesar rotației acestora în timpul exploatării motorului sau compresorului trebuie să fie mai mare. În plus, costul materialului și manoperei necesare construcției și montării contragreutăților crește o dată cu valoarea momentului static al acestora.

Ținînd seama de condițiile antagoniste indicate precedent, practica construcției de motoare și compresoare cu piston a arătat că momentul static al grupului de două contragreutăți aferente unui cot nu trebuie să depășească 60% din valoarea momentului static al cotului. Totodată se caută să se realizeze o echilibrare cît mai completă a forțelor de inerție cauzate de masele rotative ale arborelui cotit printr-o configurație cît mai favorabilă a stelajului coturilor și amplasării contragreutăților, căutîndu-se să se evite afectarea unei contragreutăți la fiecare braț.

În cele ce urmează se vor utiliza următoarele notații adoptîndu-se pentru contragreutăți forma, curent utilizată, de calote cilindrice (fig. 1):

r — raza cilindrului căruia aparțin cele două contragreutăți aferente unui cot (m),

$\frac{1}{2} W_1$ — lățimea unei contragreutăți (m),

2α — unghiul la centru corespunzător unei contragreutăți (grade)

C — centrul maselor unei contragreutăți,

x_C — distanța de la centrul maselor C la axa de rotație a arborelui cotit (m),

$\frac{1}{2} M$ — masa unei contragreutăți (kg),

$\frac{1}{2} S$ — momentul static al unei contragreutăți în raport cu axa de rotație a arborelui cotit (kgm),

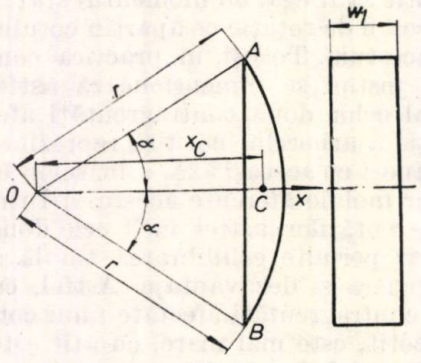


Fig. 1

S_r — momentul static, în raport cu axul de rotație al arborelui cotit, al maselor în mișcare de rotație aparținînd unui cot plus echipajelor mobile aferente acestuia (kgm),

$\frac{1}{2} J$ — momentul de inerție mecanic axial al unei contragreutăți în raport cu axa de rotație a arborelui cotit (kgm^2),

γ — masa specifică volumetrică a materialului din care sînt construite contragreutățile (kgm^{-3}).

Se va presupune că la fiecare braț este afectată o contragreutate, deci fiecărui cot îi corespund două contragreutăți.

Valoarea momentului static S este impusă fiind dată de relația

$$S = 0{,}6\, S_r. \tag{1}$$

Din cele artătate precedent rezultă că cele două contragreutăți afectate unui cot vor trebui astfel dimensionate și amplasate încît, respectînd condiția (1), momentul de inerție mecanic axial J să aibă cea mai mică valoare posibilă.

Prin aceasta se evită pătrunderea primei sau primelor turații critice în domeniul turațiilor de regim.

Întrucît

$$M = \frac{1}{2}\gamma W_1 r^2(2\alpha - \sin 2\alpha), \tag{2}$$

$$S = \frac{4}{3} Mr \frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}, \tag{3}$$

$$J = \frac{1}{2} M r^2 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right), \tag{4}$$

notînd

$$k = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{S}{\gamma W_1}}, \tag{5}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{3S^4}{8192\gamma W_1}}, \tag{6}$$

se calculează

$$J = K \frac{12\alpha - 4\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\sin^4 \alpha}, \tag{7}$$

$$r = \frac{k}{\sin \alpha}. \tag{8}$$

Pentru a găsi valoarea unghiului α pentru care momentul de inerție J ia cea mai mică valoare se anulează derivata

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 0. \tag{9}$$

Eliminînd soluția $\sin \alpha = 0$, deci $\alpha = 0$ sau $\alpha = 180°$ care nu prezintă interes, se obține ecuația

$$2\sin^3\alpha - 3\sin \alpha + 3\alpha \cos \alpha = 0. \tag{10}$$

Singura rădăcină ce prezintă interes este

$$\alpha_3 = 72°,9363594. \tag{11}$$

Pentru a reliefa variația pe care o prezintă momentul de inerție J în funcție de diferitele valori ce pot fi date unghiului α, momentul static S fiind constant și avînd valoarea (1), s-a întocmit tabela 1 ce conține valorile lui J corespunzătoare valorilor $\alpha = 1°; 2°; 3°; \ldots; 90°$ și s-a trasat curba din figura 2.

	Tabela 1	*Tabela 2*	*Tabela 3*
α°	J	r	ω_1
1°	22,15459	9,51698	227,78208
2°	11,07797	4,75921	316,54096
3°	7,38607	3,17362	381,17133
4°	5,54034	2,38106	432,97967
5°	4,43309	1,90572	476,45182
6°	3,69508	1,58899	513,93872
7°	3,16807	1,36289	546,86424
8°	2,77292	1,19344	576,17209
9°	2,46570	1,06175	603,52751
10°	2,22003	0,95650	626,42098
11°	2,01911	0,87047	648,22663
12°	1,85177	0,79887	668,23758
13°	1,71026	0,73836	686,68848
14°	1,58905	0,68656	703,77048
15°	1,48407	0,64174	719,64164
16°	1,39230	0,60258	734,43428
17°	1,31139	0,56809	748,26037
18°	1,23955	0,53749	761,21555
19°	1,7534	0,51017	773,38217
20°	1,11762	0,48563	784,83165
21°	1,06547	0,46347	795,62634
22°	1,01813	0,44338	805,82097
23°	0,97498	0,42509	815,46381
24°	0,93549	0,40836	824,59768
25°	0,89923	0,39301	833,26067
26°	0,86583	0,37889	841,48683
27°	0,83498	0,36585	849,30669
28°	0,80640	0,35379	856,74770
29°	0,77987	0,34260	863,83463
30°	0,75517	0,33219	870,58988
31°	0,73215	0,32249	877,03377
32°	0,71064	0,31343	883,18473
33°	0,69052	0,30496	889,05957
34°	0,67165	0,29702	894,67360
35°	0,65394	0,28958	900,04082
36°	0,63730	0,28258	905,17403
37°	0,62165	0,27599	910,08494
38°	0,60690	0,26978	914,78430
39°	0,59300	0,26393	919,28196
40°	0,57988	0,25840	923,58698
41°	0,56749	0,25317	927,70767
42°	0,55579	0,24822	931,65165
43°	0,54473	0,24354	935,42596
44°	0,53428	0,23910	939,03702
45°	0,52439	0,23489	942,49075
46°	0,51504	0,23090	945,79258
47°	0,50619	0,22711	948,94748
48°	0,49783	0,22350	951,95999
49°	0,48992	0,22008	954,83426
50°	0,48245	0,21682	957,57407
51°	0,47540	0,21372	960,18285
52°	0,46874	0,21078	962,66370
53°	0,46247	0,20797	965,01941
54°	0,45657	0,20530	967,25246
55°	0,45102	0,20276	969,36508
56°	0,44582	0,20035	971,35919
57°	0,44095	0,19804	973,23650

(continuare) *Tabela 1* *Tabela 2* *Tabela 3*

$\alpha°$	J	r	ω_1
58°	0,43641	0,19585	974,99842
59°	0,43218	0,19377	976,64617
60°	0,42826	0,19179	978,18070
61°	0,42465	0,18990	979,60275
62°	0,42133	0,18811	980,91284
63°	0,41831	0,18641	982,11127
64°	0,41558	0,18480	983,19814
65°	0,41314	0,18326	984,17332
66°	0,41098	0,18181	985,03649
67°	0,40911	0,18044	985,78713
68°	0,40753	0,17914	986,42449
69°	0,40623	0,17791	986,94765
70°	0,40522	0,17675	987,35546
71°	0,40450	0,17566	987,64658
72°	0,40407	0,17464	987,81945
73°	0,40394	0,17368	987,87233
74°	0,40411	0,17368	987,80325
75°	0,40459	0,17279	987,61003
76°	0,40538	0,17195	987,29027
77°	0,40649	0,17118	986,84138
78°	0,40794	0,17046	986,26052
79°	0,40972	0,16980	985,54464
80°	0,41185	0,16920	984,69046
81°	0,41434	0,16866	983,69446
82°	0,41720	0,16816	982,55289
83°	0,42045	0,16773	981,26177
84°	0,42411	0,16734	979,81685
85°	0,42818	0,16701	978,21366
86°	0,43269	0,16673	976,44745
87°	0,43766	0,16650	974,51325
88°	0,44310	0,16632	972,40578
89°	0,44905	0,16620	970,11955
90°	0,45553	0,16609	967,64877

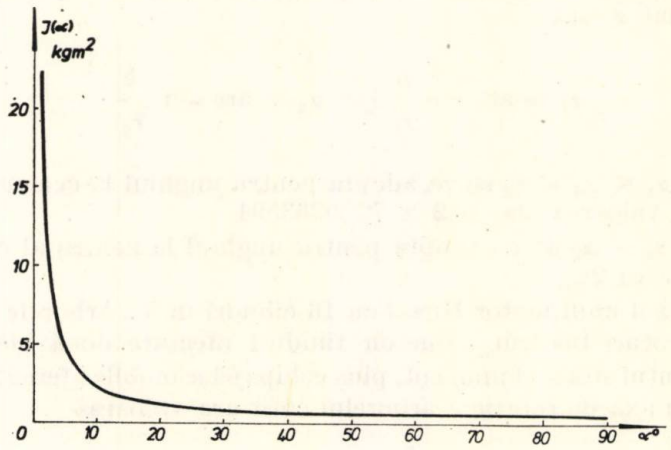


Fig. 2

Valorile numerice cu ajutorul cărora a fost calculată valoarea constantei K sînt

$$S=2{,}33346 \text{ kgm}; \qquad \gamma=7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$W_1= 0{,}098 \text{ m}.$$

Tabelul 2 conţine valorile razei r în funcţie de valorile unghiului $\alpha=1°;2°;\ldots;90°$, iar curba din figura 3 a fost construită pe baza acestei tabele.

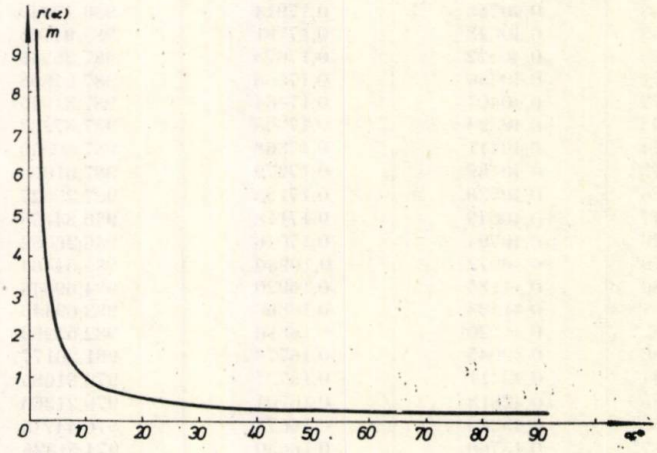


Fig. 3

Fie r_1 şi r_2 $(r_1 > r_2)$ limitele între care poate varia raza r, limite impuse de construcţia motorului sau compresorului. Limitele corespunzătoare ale unghiului α sînt

$$\alpha_1 = \text{arc sin}\frac{k}{r_1}; \qquad \alpha_2 = \text{arc sin}\frac{k}{r_2}. \tag{12}$$

Dacă $\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \leqslant k_2$ se va adopta pentru unghiul la centru al contragreutăţilor valoarea $2\alpha_3 = 2 \times 72°{,}9363594$.

Dacă $\alpha_2 < \alpha_3$ se va adopta pentru unghiul la centru al contragreutăţilor valoarea $2\alpha_2$.

Fie cazul unui motor Diesel cu 16 cilindri în V. Arborele cotit comportă opt coturi fiecărui maneton fiindu-i afectate două biele (fig. 4).

Momentul static al unui cot, plus echipajelor mobile aferente acestuia, în raport cu axa de rotaţie a arborelui cotit are valoarea

$$S_r = 3{,}8891 \text{ kgm}. \tag{13}$$

Conform cu (1) momentul static aferent grupului de două contragreutăți afectate unui cot, în raport cu aceeași axă de rotație a arborelui cotit va trebui să aibă valoarea

$$S = 0{,}6 \times 3{,}8891 = 2{,}33346 \text{ kgm.} \tag{14}$$

Eliminînd din sistemul vibrant redus, dinamic echivalent cu arborele cotit plus echipajele mobile aferente acestuia, masa redusă a volantului și a amortizorului de vibrații, se obține sistemul vibrant redus omogen reprezentat în figura 5 comportînd un număr de opt mase reduse identice

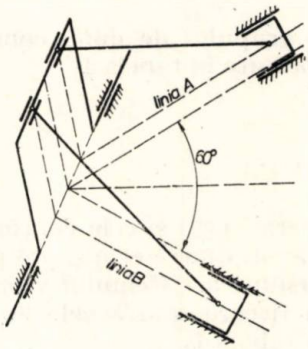


Fig. 4

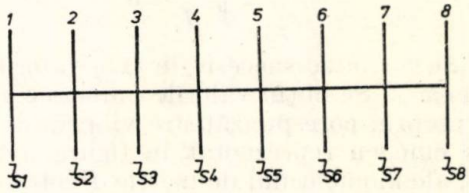


Fig. 5

fixate pe arborele echivalent, de masă neglijabilă, constantele elastice ale tronsoanelor din arbore limitate de două mase reduse consecutive fiind identice între ele.

Se vor utiliza notațiile :

C_s — constanta elastică la torsiune a tronsoanelor din arborele echivalent limitate de două mase reduse consecutive $\left(\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}\right)$.

J_c — momentul de inerție mecanic axial al unui cot, plus echipajele mobile aferente acestuia, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit (kgm^2),

J — momentul de inerție mecanic axial al grupului de două contragreutăți afectate unui cot în raport cu axa de rotație a arborelui cotit (kgm^2),

$J_s = J_c + J$ — momentul de inerție mecanic axial total al unui cot identic cu momentul de inerție mecanic axial al unei mase reduse în raport cu axa de rotație a arborelui cotit (kgm^2),

$\omega_p = \sqrt{\frac{C_s}{J_s}}$ — pulsația proprie corespunzătoare vibrațiilor de torsiune a unei singure mase reduse (s^{-1}),

z — numărul de mase reduse pe care le comportă sistemul vibrant redus.

Cele $z-1$ pulsaţii proprii, corespunzătoare vibraţiilor de torsiune ale sistemului vibrant redus omogen, sînt date de relaţia Berthold Frank,

$$\omega_i = 2\,\omega_p \sin\frac{i\pi}{2z} \quad (i = 1;\ 2;\ \ldots;\ z-1). \tag{15}$$

Pentru cazul sistemului vibrant redus omogen reprezentat în figura 5 :

$$z = 8;\ C_s = 0{,}7829\times 10^7\ \frac{\text{Nm}}{\text{rad}},\qquad J_c = 0{,}817397\ \text{kgm}^2. \tag{16}$$

Momentul de inerţie mecanic axial J a grupului de două contragreutăţi aferente unui cot ia succesiv valorile coţinute în tabela 1.

Relaţiile (15) mai pot fi scrise sub forma

$$\omega_i = 2\sqrt{\frac{C_s}{J_s}}\sin\frac{i\,\pi}{2z} \quad (i = 1;\ 2;\ \ldots;\ z-1). \tag{17}$$

Se introduc succesiv în (17) valorile numerice (16) şi cele conţinute în tabela 1. Se obţin valorile numerice ale fiecăreia dintre cele şapte pulsaţii proprii, corespunzătoare vibraţiilor de torsiune a sistemului vibrant redus omogen reprezentat în figura 5 pentru fiecare dintre cele 90 de valori ale momentului de inerţie J conţinute în tabela 1.

Cele 90 de valori ale pulsaţiei proprii de gradul întîi (fundamentale) astfel obţinute au fost înscrise în tabela 3. Pe baza acestor valori numerice a fost trasată curba din figura 6. Se observă că valoarea maximă a pulsaţiei proprii fundamentale are loc pentru valoarea minimă a momentului de inerţie J şi deci J_s adică pentru valoarea unghiului α egală cu $\alpha_3 = 72°,9363594$.

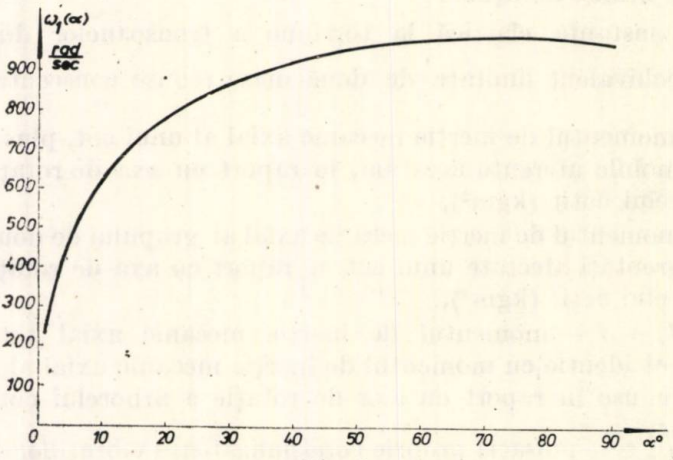


Fig. 6

Din relaţia (15) rezultă că curbele de variaţie ale pulsaţiilor proprii de gradul 2 ; ; ... ; 7 în funcţie de unghiul α vor fi identice cu curba din figura 6, ce reprezintă variaţia pulsaţiei proprii fundamentale în funcţie

de unghiul α. Se schimbă doar scara ordonatelor. Astfel, din (15) rezultă valorile rapoartelor dintre pulsațiile proprii de gradul 2; 3; ...; 7 și pulsația proprie fundamentală

$$\frac{\omega_i}{\omega_1} = \frac{\sin\frac{i\pi}{2z}}{\sin\frac{\pi}{2z}} = \frac{\sin\frac{i\pi}{16}}{\sin\frac{\pi}{16}} \qquad (i = 2; 3; \ldots; 7). \tag{18}$$

Se calculează succesiv

$$\begin{aligned} &\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1{,}961570; \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = 2{,}847759; \\ &\frac{\omega_4}{\omega_1} = 3{,}624509; \quad \frac{\omega_5}{\omega_1} = 4{,}261972; \\ &\frac{\omega_6}{\omega_1} = 4{,}735650; \quad \frac{\omega_7}{\omega_1} = 5{,}027339. \end{aligned} \tag{19}$$

În concluzie, atunci cînd contragreutățile au forma de calote cilindrice, unghiul la centru al acestora va trebui să aibă o valoare cît mai apropiată de

$$2\alpha_3 = 145°{,}8727188, \tag{20}$$

raza r a cilindrului din care fac parte contragreutățile fiind dată de relația (8).

Concluziile obținute pentru cazul sistemului vibrant omogen reprezentat în figura 5 rămîn desigur valabile pentru orice sistem vibrant omogen sau neomogen.

În figura 7 a fost reprezentat sistemul vibrant neomogen ce rezultă prin completarea sistemului vibrant omogen reprezentat în figura 5 cu masa redusă a volantului și masa redusă a amortizorului de vibrații de torsiune. Calculul valorilor pulsațiilor proprii s-a efectuat pentru sistemul vibrant redus omogen reprezentat în figura 5 pentru a se putea utiliza relația Berthold Frank (15). Dacă s-ar fi calculat pulsațiile proprii corespunzătoare sistemului vibrant redus neomogen reprezentat în figura 7, concluziile ar fi fost aceleași dar calculele ar fi fost mai complicate.

Primită la redacție la 2 iulie 1976

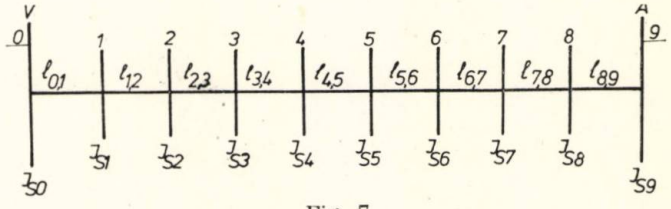


Fig. 7

BIBLIOGRAFIE

1. A. Ripianu, *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*. Edit. Academiei, București, 1969
2. B. Popa, A. Somcuteanu, A. Ripianu I. Trebonius, *Arbori cotiți*, Edit. tehnică, București, 1960.

PROPRIETĂȚI GEOMETRICE ALE PROFILELOR NACA

de GHEORGHE ZIDARU

Institutul politehnic București

În lucrare, autorul determină printr-o metodă directă aria, poziția centrului de greutate și momentele de inerție în raport cu axele Ox și Oy ale profilelor NACA din seria cu patru cifre și NACA din seria „65" Rezultatele pot fi utilizate la calculul de rezistență ale palelor de turbomașini axiale proiectate pe baza acestor profile

1. INTRODUCERE

În calculul de rezistență al palelor de turbomașini axiale este necesară cunoașterea parametrilor geometrici ai profilelor din secțiunile cilindrice caracteristice [9]. Calculul grafo-analitic al acestor parametri (suprafața, coordonatele centrului de greutate și momentul de inerție în raport cu coarda) este laborios și insuficient de precis.

În lucrarea [9] autorul a determinat caracteristicile geometrice ale unor profile remarcabile, obținute prin transformarea conformă a cercului (profilele Jukovski, Kármán-Trefftz, Carafoli [1], [2], [8]).

În ultima vreme, proiectanții de turbomașini axiale hidraulice și pneumatice s-au orientat către utilizarea pe scară largă a profilelor NACA din seria cu patru cifre și a profilelor NACA din seria „65" (laminare), [2]÷[9]. Pentru aceste două tipuri de profile, funcția de grosime și curba scheletului sînt date analitic și deci se pot determina odată pentru totdeauna proprietățile geometrice care interesează în calculul de rezistență al paletajelor.

2. PROFILE NACA DIN SERIA CU 4 CIFRE

Se raportează un profil la sistemul de axe Oxy cu axa Ox de-a lungul coardei și cu axa Oy drept mediatoare a acesteia (fig. 1).

Cele patru cifre care definesc un profil NACA din seria cu patru cifre au următoarele semnificații, [4], [5]:

— prima cifră exprimă în procente curbura profilului f/l. 100 % (se extinde la două cifre dacă $f/l > 0{,}09$);

— a doua cifră reprezintă în procente raportul dintre distanța săgeții scheletului față de bordul de atac și coarda profilului, $(x_{f/l}+1/2)\cdot 100[\%]$;

— cifrele a treia și a patra exprimă grosimea relativă în procente, $d/l \cdot 100$ [%].

De exemplu, profilul NACA 4412 are curbura $f/l = 4\,\%$, săgeata este situată la distanța $x_f = 0{,}4\,l$ față de bordul de atac, iar grosimea relativă este $d/l = 12\,\%$. Toate profilele NACA cu patru cifre, pentru care autorul dispune de date, au grosimea maximă $d = (2y_d)_{\max}$ situată la $30\,\%$ din coarda față de bordul de atac, deci $x_d = -0{,}2\,l$. Bordurile de atac sînt rotunjite cu razele r_A și r_F, date prin relațiile :

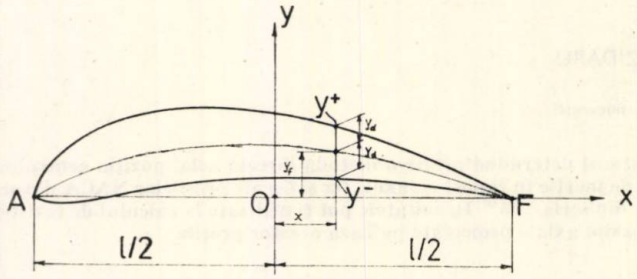


Fig. 1

$$\frac{r_A}{l} = 1,1\left(\frac{d}{l}\right)^2 ; \frac{r_F}{l} = 0{,}105\left(\frac{d}{l}\right)^2. \tag{1}$$

Funcția de grosime are ecuația

$$\frac{y_d(x)}{l} = \frac{d}{l}\left[1{,}4845\sqrt{\frac{x}{l}+\frac{1}{2}} - 0{,}6300\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\right) - 1{,}7580\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 1{,}4215\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\right)^3 - 0{,}5075\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\right)^4\right]. \tag{2}$$

Scheletul este format din două arce de parabole, racordate în punctul $x_{f/l} = -0{,}10$, de ecuații :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{l} \leqslant -\frac{1}{10} : \frac{y_f}{l} &= \frac{f}{l}\left[\frac{15}{16} - \frac{5}{4}\frac{x}{l} - \frac{25}{4}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right], \\ -\frac{1}{10} \leqslant \frac{x}{l} \leqslant \frac{1}{2} : \frac{y_f}{l} &= \frac{f}{l}\left[\frac{35}{36} - \frac{5}{9}\frac{x}{l} - \frac{25}{9}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Aria profilului NACA cu patru cifre se determină astfel :
— se scrie expresia ariei elementare

$$\mathrm{d}S = [y^+(x) - y^-(x)]\mathrm{d}x = 2y_d(x)\,\mathrm{d}x = 2l^2 \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{y_d(x/l)}{d}\, d\left(\frac{x}{l}\right), \tag{4}$$

unde $y^+(x)$ și $y^-(x)$ sînt, respectiv, ordonatele extradosului și intradosului corespunzătoare abscisei x;

— se introduce funcția (2) în expresia (4) și, integrînd pe domeniul $\frac{x}{l} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, rezultă

$$S = 0{,}685084 \left(\frac{d}{l}\right) l^2. \tag{5}$$

Din teorema momentului static al ariei S în raport cu axa Ox și ținînd seama de exprsia (4), se află abscisa centrului de greutate

$$x_G = \frac{1}{S}\int_S x \, \mathrm{d}\, S = \frac{2}{S} l^3 \left(\frac{d}{l}\right) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{y_d \frac{x}{l}}{\mathrm{d}} \cdot \frac{x}{l} \, \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right) =$$

$$= -\frac{l}{2} + 2l^3 \cdot \left(\frac{d}{l}\right) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d} \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right).$$

Se introduce expresia (2) în ultima integrală și se obține

$$x_G = -0{,}079564 \; l. \tag{6}$$

Analog, se determină și ordonata centrului de greutate:

$$y_G = \frac{1}{S}\int_S y \, \mathrm{d}S = \frac{1}{S} \int_{-l/2}^{l/2} y_f(x) 2 y_d(x) \mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$y_G = \frac{2}{S}\left(\frac{f}{l}\right)\left(\frac{d}{l}\right) l^3 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{y_f\left(\frac{x}{l}\right)}{f} \cdot \frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d} \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right). \tag{7'}$$

Ținînd seama de expresiile (3), ultima integrală se descompune în două integrale pe domeniile $[-1/2\,;\, -1/10]$ și $[-1/10\,;\, 1/2]$. Prin calcule, rezultă

$$y_G = 0{,}771477 \left(\frac{f}{l}\right) l. \tag{8}$$

Aplicînd teorema lui Steiner, se află momentul de inerție elementar al ariei profilului în raport cu axa Ox,

$$\mathrm{d}I_x = \frac{\mathrm{d}x \cdot [2y_d(x)]^3}{12} + y_f^2(x) \cdot 2y_d(x) \, \mathrm{d}x.$$

Deci

$$I_x = 2\left(\frac{d}{l}\right)l^4\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{d}{l}\right)^2\int_{-1/2}^{1/2}\left[\frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d}\right]^3 \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{f}{l}\right)^2\int_{-1/2}^{1/2}\frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d}\cdot\left[\frac{y_f\left(\frac{x}{l}\right)}{f}\right]^2 \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right)\right\}. \tag{9}$$

Pentru calculul mai simplu al acestor integrale, cît şi pentru calculul tuturor integralelor care urmează, autorul a utilizat o subrutină standard de integrare numerică, QATR (XL, XU, EPS, NDIM, Y, Z, I, AUX), cu alegerea automată a pasului, astfel încît eroarea de calcul să fie $\varepsilon < 10^{-6}$. Procedeul a fost aplicat pentru testare şi la calculul integralelor care au intervenit în expresiile suprafeţei şi coordonatelor centrului de greutate, rezultînd coincidenţa primelor şase zecimale. Calculele s-au efectuat cu ajutorul calculatorului electronic FELIX C 256.

Astfel, expresia (9) se transformă astfel:

$$I_x = \left[0{,}0394072\left(\frac{d}{l}\right)^3 + 0{,}446784\left(\frac{d}{l}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]l^4. \tag{10}$$

Momentul de inerţie în raport cu axa Oy este

$$I_y = \int_S x^2\,\mathrm{d}S = \int_{-l/2}^{l/2} x^2\,2y_d(x)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{d}{l}\right)l^4\int_{-1/2}^{1/2}\frac{x^2}{l}\frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d}\mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right). \tag{11}$$

Efectuînd calculul ultimei integrale, rezultă

$$I_y = 0{,}0421516\left(\frac{d}{l}\right)l^4. \tag{12}$$

3. PROFILE NACA DIN SERIA „65"

Aceste profile sînt laminare; avînd grosimea maximă aproape de mijlocul coardei, maximul vitezei este mai apropiat de bordul de fugă decît la alte tipuri de profile şi astfel porţiunea de frînare a mişcării, deci cu gradient pozitiv de presiune este mai redusă şi stratul-limită este stabil. De asemenea, avînd maximul vitezei aplatisat, palele dobîndesc calităţi cavitaţionale deosebite în cazul lichidelor, iar la compresoare axiale mişcarea rămîne subcritică pe tot profilul.

În cele ce urmează se consideră profile NACA din seria 65— .. A_{10} .. [4]÷[7].

Prima cifră („6") este un indicator al funcției de grosime, de ecuație

$$\frac{y_d(x)}{l} = \frac{d}{l} \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{l}}{1 - 0{,}1760\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)} \left[1{,}0675 \sqrt{\frac{x}{l} + \frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. -0{,}2758\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right) + 2{,}4478\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)^2 - 2{,}8385\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)^3\right], \quad (13)$$

care asigură aplatisarea vitezei pe profil.

Cifra a doua („5") arată că maximul grosimii profilului este situat la mijlocul coardei.

Cifrele a treia și a patra reprezintă coeficientul de portanță c_{p0} al profilului izolat la intrarea fără șoc a fluidului (curbura profilului este proporțională cu c_{p0}). Litera cu indice „A_{10}" se referă la repartiția uniformă a vîrtejurilor pe coardă pentru obținerea scheletului profilului de ecuație

$$\frac{y_f(x)}{l} = -\frac{c_{p0}}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right)\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right)\right]. \quad (14)$$

Cifrele a cincea și a șasea reprezintă în procente grosimea relativă $d/l \cdot 100$ [%].

Bordul de atac este rotunjit cu raza r_A, unde $r_A/l = 0{,}687 \cdot (d/l)^2$, iar bordul de fugă este ascuțit.

Analizînd expresia (13) a funcției de grosime, se vede că pentru aceste profile calculul tuturor parametrilor trebuie efectuat folosind algoritmul de integrare numerică.

Suprafața profilului și abscisa centrului de greutate au expresiile finale:

$$S = 0{,}650854\left(\frac{d}{l}\right) l^2; \quad (15)$$

$$x_G = -0{,}022499\ l. \quad (16)$$

Înlocuind ecuațiile (13) și (14) în expresia (7), se obține formula pentru determinarea ordonatei centrului de greutate

$$y_G = \frac{2}{S} c_{p0}\left(\frac{d}{l}\right) l^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{y_f\left(\frac{x}{l}\right)}{l\, c_{p0}} \cdot \frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d} \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right)$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$y_G = 0{,}045700\ c_{p0} l. \quad (17)$$

Expresia momentului de inerţie în raport cu axa Ox se deduce astfel :

$$I_x = \frac{2}{3}\left(\frac{d}{l}\right)^3 l^4 \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d}\right]^3 \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{d}{l}\right) c_{p0}^2\, l^4 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{y_d\left(\frac{x}{l}\right)}{d}\left[\frac{y_f\left(\frac{x}{l}\right)}{l\, c_{p0}}\right]^2 \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right).$$

După calculul integralelor, se obţine

$$I_x = \left[0{,}0369845\left(\frac{d}{l}\right)^3 + 0{,}00143686\left(\frac{d}{l}\right) c_{p0}^2\right] l^4. \tag{18}$$

Momentul de inerţie I_y se determină analog pornind de la formula (11) şi rezultă

$$I_y = 0{,}034844\left(\frac{d}{l}\right) l^4. \tag{19}$$

Observaţii.

1. Pentru aplicarea formulelor deduse, este suficient să se cunoască tipul şi coarda profilului ales într-o secţiune de calcul a palei.

2. În scopul obţinerii unei pale cu feţe netede, în anumite secţiuni pot fi utilizate profile ajustate (îngroşate sau subţiate). Această ajustare trebuie efectuată fără modificarea scheletului deoarece hotărîtoare pentru portanţă este curba scheletului, nu funcţia de grosime.

Cunoscînd factorul de ajustare

$$k = \frac{d'}{d} = \frac{y'_d(x)}{y_d(x)} \tag{20}$$

şi reluînd calcuele anterioare, se vede imediat că toate formulele deduse se păstrează dacă se înlocuieşte d/l cu $d'/l = kd/l$, iar curbura $\frac{f}{l}$ sau c_{p0} nu se modifică.

Primită la redacţie la 20 septembrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor, vol. II*, Buc., Edit. Academiei, 1955.
2. F. Riegels, *Aerodynamische Profile*, München, Oldenbourg, 1958.
3. J. H. Horlock, *Axialkompressoren*, Karlsruhe, G. Brann, 1965.
4. N. Scholz, *Aerodynamik der Schaufelgitter, Bd. I*, Karlsruhe, G. Braun, 1965.
5. Gh. Zidaru, *Hidrodinamica reţelelor de profile*, Curs, Lit. Inst. Politehn. Bucureşti, 1974.
6. — *Beitrag zur Auslegungsaufgabe der axialen Turbomaschinen*, Rev. Roum. Sci., Techn. Electrot. et Énerg., **18**, *1* (1974).
7. — *Utilizarea profilelor laminare pentru proiectarea palelor turbomaşinilor de lucru*, Com. la „Prima Conf. a Energ. din România", Bucureşti, 1974.
8. J. Florea, Gh. Zidaru, V. Panaitescu, *Mecanica fluidelor şi hidraulica, vol. I.*, Lit. Inst. politehnic, Bucureşti, 1975,
9. Gh. Zidaru, *Caracteristicile geometrice ale profilelor*, St. Cerc. Mec. Apl., **34**, *2* (1975).

INFLUENȚA STĂRII STRUCTURALE ȘI A CARACTERISTICILOR MECANICE ALE OȚELULUI OLC 45 ASUPRA PRELUCRABILITĂȚII PRIN AȘCHIERE

de MIHAI TEODORESCU
Universitatea din Galați

În lucrare se prezintă rezulatatele cercetărilor privind influența caracteristicilor mecanice ale diferitelor stări structurale ale oțelului OLC 45 asupra prelucrabilității prin așchiere a acestuia, apreciată după indicele v_{T20}.
Din lucrare se obține o apreciere mult mai corespunzătoare a influenței caracteristicilor de rezistență ale materialului prelucrat asupra prelucrabilității, comparativ cu indicațiile prezentate de literatură.

1. INTRODUCERE

În literatură se prezintă diferite modalități de stabilire a dependenței dintre caracteristicile mecanice ale materialului prelucrat și un indice ce caracterizează prelucrabilitatea acestuia prin așchiere, exprimată de obicei prin durabilitatea sculei sau prin viteza de așchiere pentru obținerea unei anumite durabilități.

Astfel, variația durabilității sculei în funcție de caracteristicile materialului prelucrat [1] se poate exprima sub forma generală

$$T = T_0 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^m . \tag{1}$$

În alte lucrări [2], [3], [4] aprecierea prelucrabilității se face după viteza de așchiere, ce corespunde la o anumită durabilitate, de exemplu 60 minute (v_{60}), obținîndu-se relații de forma :

$$v_{60} = \frac{C}{\sigma_r^{1,6\ldots2}} \tag{2}$$

sau

$$v_{60} = \frac{C_1}{\sigma_r^{1,2}} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_r} \right)^3 \qquad \text{pentru } \frac{\sigma_c}{\sigma_r} < 0{,}5, \tag{3}$$

$$v_{60} = \frac{C_2}{\sigma_r^{1,2}} \left[0{,}25 - \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_r} - 0{,}5 \right)^2 \right] \qquad \text{pentru } \frac{\sigma_c}{\sigma_r} > 0{,}5. \tag{4}$$

Pentru a se putea face o apreciere mai precisă, ținîndu-se seama și de gradul de uzură al sculei așchietoare [5], s-a adoptat criteriul $v_{60;\,h_\gamma\,0,1}$ (viteza de așchiere pentru obținerea durabilității de 60 minute, la o uzură

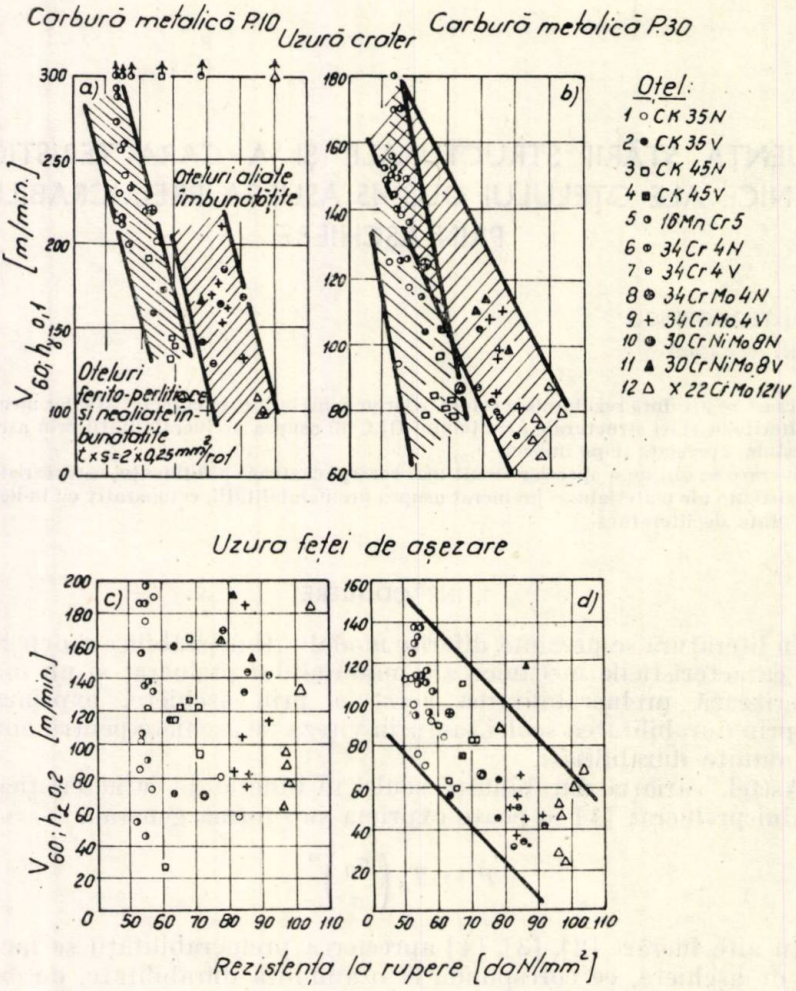


Fig. 1. — Influența rezistenței la rupere asupra prelucrabilității prin așchiere (indicele v_{60}), după [5]

Corespondența materialelor :

Nr. ordine	Materialul, după [5]	Material, orientativ, conform STAS
1	Ck 35 N	OLC 35 (normalizat)
2	Ck 35 V	OLC 35 (îmbunătățit)
3	Ck 45 N	OLC 45 (normalizat)
4	Ck 45 V	OLC 45 (îmbunătățit)
5	16 Mn Cr 5	17 MC 10
6	34 Cr 4 N	50 VC 11 (normalizat)
7	34 Cr 4 V	50 VC 11 (îmbunătățit)
8	34 Cr Mo 4 BN	33 Mo C 11 (normalizat)
9	34 Cr Mo 4 V	33 Mo C 11 (îmbunătățit)
10	30 Cr Ni Mo 8 N	30 Mo C N 20 (normalizat)
11	30 Cr Ni Mo 8 V	30 MoCN 20 (îmbunătățit)
12	X 22 Cr Mo V 12 IV	oțel refractar și rezistent la coroziune

crater cu adîncimea de 0,1 mm), sau $v_{60;h_\alpha 0,2}$ (viteza de așchiere pentru obținerea durabilității de 60 minute, la o uzură pe fața de așezare de 0,2 mm). Modul de influență a rezistenței de rupere la tracțiune asupra acestor indici de prelucrabilitate [5], pentru diferite materiale prelucrate prin strunjire cu scule din carburi metalice P 10 și P30, rezultă din figura 1. Cele două zone de împrăștiere din figură, cînd se apreciază uzura tip crater, corespund oțelurilor aliate în domeniul rezistențelor mari și oțelurilor cu structuri ferito-perlitice în domeniul rezistențelor mai mici. Această repartizare în două zone, lățimea mare a acestor zone, precum și faptul că unele valori se găsesc chiar în afara zonelor, ne arată clar că între mărimea de uzură luată în considerare și rezistența de rupere la tracțiune nu se poate stabili o corelație directă.

Observația privind împrăștierea rezultatelor este în măsură și mai mare, valabilă pentru cazul uzurii pe fața de așezare (fig. 1).

Conform rezultatelor prezentate în literatuă se desprinde concluzia că odată cu creșterea rezistenței de rupere la tracțiune se micșorează prelucrabilitatea oțelurilor, apreciată după indicile v_{60}, dar că, numai influența acestui parametru care caracterizează materialul prelucrat, nu este suficientă.

Rezultă deci, că mai există și alți factori de influență, care nu au fost luați în considerație. Lucrarea își propune să stabilească influența caracteristicilor materialului prelucrat asupra prelucrabilității prin așchiere, ținînd însă seama de starea structurală a acestui material.

2. CONDIȚII EXPERIMENTALE

Condițiile în care s-au desfășurat cercetările experimentale au fost următoarele :

a. Material prelucrat — oțelul OLC 45 STAS 880- bară cu diametrul de 60 mm, cu compoziția chimică : % C = 0,47 ; %Si = 0,29 ; %Mn = = 0,69 ; %P = 0,019 ; %S = 0,023 ; %Cu = 0,03 ; ±Cr = 0,03 ; %Ni = = 0,02. S-au aplicat materialului diferite scheme de tratament termic, prezentate împreună cu microstructurile obținute în lucrarea [7].

b Aprecierea prelucrabilității s-a făcut prin viteza corespunzătoare durabilității de 20 minute (v_{T20}), folosind drept criteriu uzura radială sau dimensională, la valoarea $h_r = 0{,}020$ mm.

Observație. S-a adoptat indicele v_{T20} deoarece aceasta este valoarea maximă a durabilității care se obține în condițiile specifice lucrării, pentru oțelul OLC 45, călit și revenit la 300°C.

c. Utilaj și aparatură : strung SN 400 ; sculă : cuțit de strung normal armat cu plăcuță din carburi metalice P 10 cu geometria : $\gamma = 70°$; $\gamma_1 = 10°$; $\gamma = 0°$; $\alpha = \alpha_1 = 8°$; $\lambda = 0°$; $r = 0{,}5$ mm.

Măsurarea uzurii sculei s-a făcut cu un dispozitiv cu comparator cu cadran cu precizia de 0,001 mm [9, 10, 11].

d. Regim de așchiere :

$v = 70 \ldots 200$ m/min ; $s = 0{,}2$ mm/rot ; $r = 0{,}4$ mm. Încercările au fost făcute prin strunjire longitudinală, fără lichide de răcire. Fiecare punct din diagramele prezentate reprezintă media a cinci determinări.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru a putea pune în evidenţă influenţa caracteristicilor mecanice ale materialului prelucrat asupra prelucrabilităţii prin aşchiere, se prezintă în figurile 2—5 dependenţele viteză (v_{T20}), caracteristici ale materialului prelucrat, pentru diferite stări structurale ale oţelului OLC 45.

În figurile 2 şi 3 s-au reprezentat aceste dependenţe pentru cazul materialului OLC 45 cu diferite stări structurale obţinute prin călire şi reveniri, iar în figurile 4, şi 5 pentru structurile de tip ferito-perlitic. S-au reprezentat variaţiile vitezei de aşchiere (v_{T20}) în funcţie de caracteristicile de rezistenţă ale materialului prelucrat, precum şi în funcţie de caracteristicile de plasticitate. Pe lîngă mărimi obţinute din diagrama convenţională s-au folosit şi mărimi obţinute din diagrama reală la tracţiune, pentru a se putea stabili care dintre acestea şi în ce condiţii ar caracteriza mai bine prelucrabilitatea prin aşchiere. Precizăm că în figurile 2 şi 3 structurile au fost obţinute sau prin călire în apă (deci călire la martensită) urmată de revenire la diferite temperaturi de reveni (probele au fost notate cu călire + revenire la 300 ; 400 ; 500 şi 600°), sau prin călire în ulei [7]. În acest din urmă caz viteza de răcire este subcritică, iar structura obţinută este formată din troostită+baintită+martensită [7]. Ca urmare, duritatea probei obţinută prin călire în ulei poate fi inferioară faţă de cea obţinută prin călire în apă + revenire la 500°C.

Din analiza rezultatelor prezentate în figurile 2—5 se observă rolul important al structurii materialului prelucrat asupra prelucrabilităţii prin aşchiere. Astfel, pentru cazul probelor obţinute prin căliri şi reveniri (fig. 2 şi 3) se observă că în cazul structurilor de acelaşi tip [7], (structuri de revenire obţinute prin căliri la martensită şi reveniri la temperaturi de 300, 400 şi 500°C) între viteza (v_{T20}) şi caracteristici de rezistenţă, se poate stabili o dependenţă clară şi anume că viteza scade odată cu creşterea unei caracteristici de rezistenţă.

Rezultă de asemenea, că pentru caracteristici de rezistenţă apropiate ca valoare, dar pentru stări structurale diferite (călire în ulei şi călire şi revenire la 500°C), se obţin indici de prelucrabilitate diferiţi. Deci se impune necesitatea de a analiza prelucrabilitatea ţinînd seama şi de factorul structural al materialului prelucrat.

Între mărimea ce caracterizează prelucrabilitatea adoptată drept parametru şi caracteristicile de plasticitate, pentru stările structurale luate în discuţie mai sus, se poate aprecia că viteza (v_{T20}) creşte odată cu creşterea acestor caracteristici. De remarcat împrăştierea ceva mai mare a rezultatelor decît în cazul variaţiilor viteză-caracteristici de rezistenţă.

Pentru cazul grupei de structuri ferito-perlitice (fig. 4) se poate stabili o corelaţie bună între v_{T20} pe de o parte şi duritate sau rezistenţa de rupere la tracţiune pe de altă parte şi mai slabă (cu împrăştiere ceva mai mare), cu rezistenţa reală şi limita de curgere. În cazul acestor structuri, odată cu creşterea caracteristicilor de rezistenţă se îmbunătăţeşte şi prelucrabilitatea prin aşchiere, din punctul de vedere analizat, aspect diferit faţă de cazurile analizate în figura 2 precum şi în literatură.

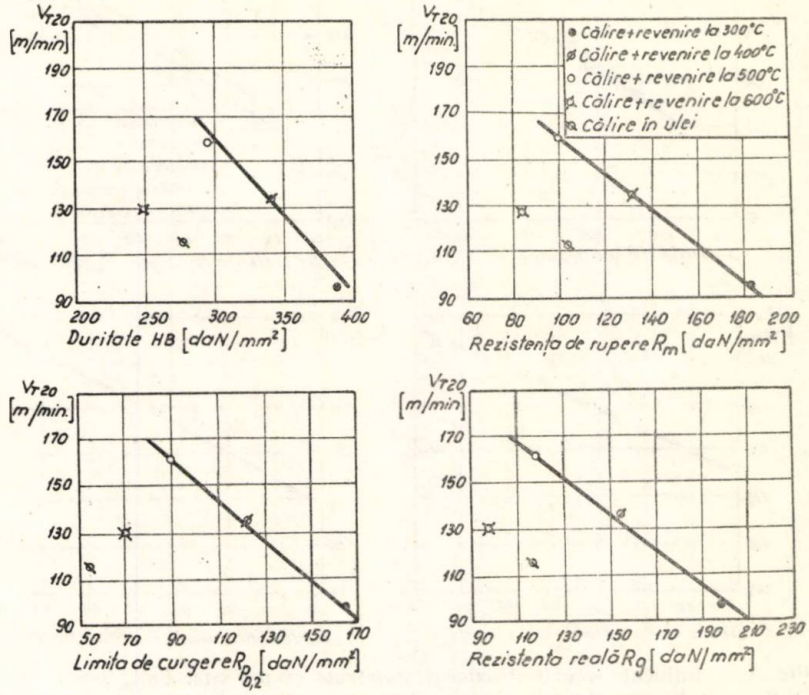


Fig. 2. — Influența caracteristicilor de rezistență asupra vitezei v_{T20} pentru oțelul OLC 45 cu diferite stări structurale obținut prin călire și revenire. Condiții de lucru : sculă P 10 ; s=2 mm/rot ; t=0,4 mm. Criteriul de uzură : h_r=0,02 mm

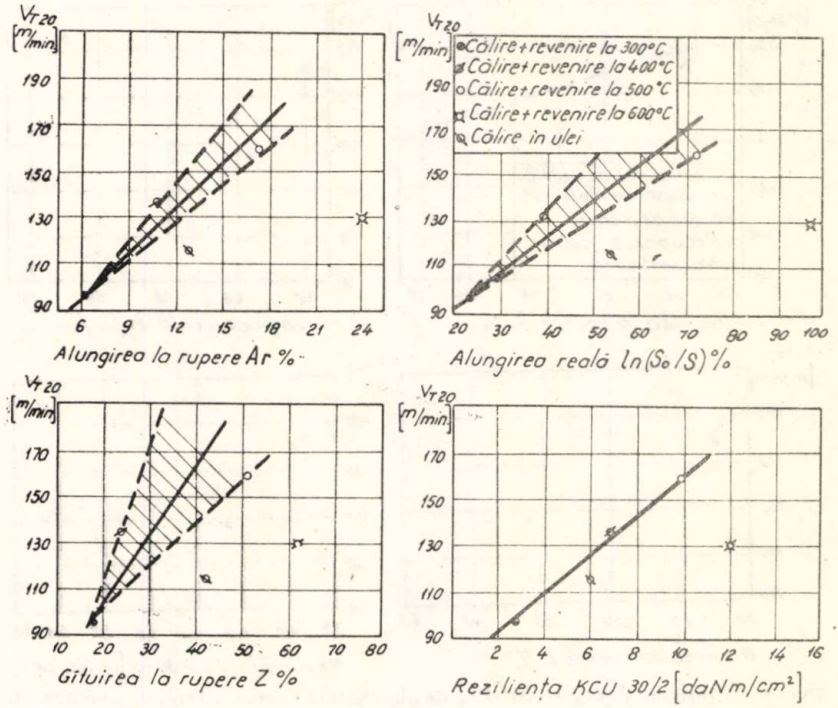


Fig. 3. — Influența caracteristicilor de plasticitate asupra vitezei v_{T20} pentru oțelul OLC 45 cu diferite stări structurale obținute prin călire și revenire Condiții de lucru : sculă P 10, s=0,2 mm/rot ; t=0,4 mm Criteriul de uzură: h_r=0,02 mm.

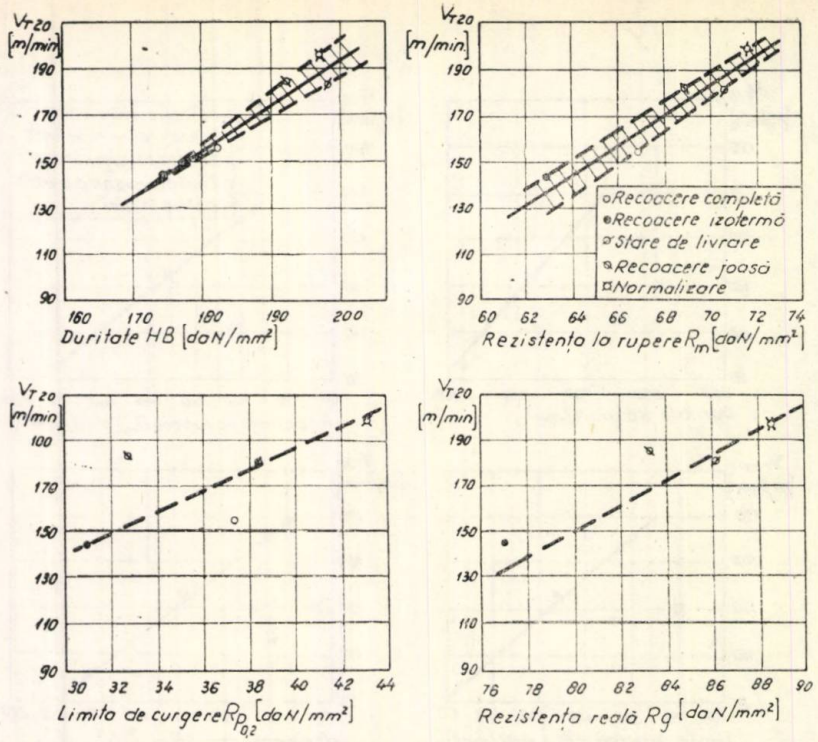


Fig. 4. — Influența caracteristicilor de rezistență asupra vitezei v_{T20} pentru oțelul OLC 45 cu diferite structuri ferito-perlitice Condiții de lucru : sculă P 10 ; s = = 0,2 mm/rot ; t = 0,4 mm. Criteriul de uzură : h_r = 0,020 mm.

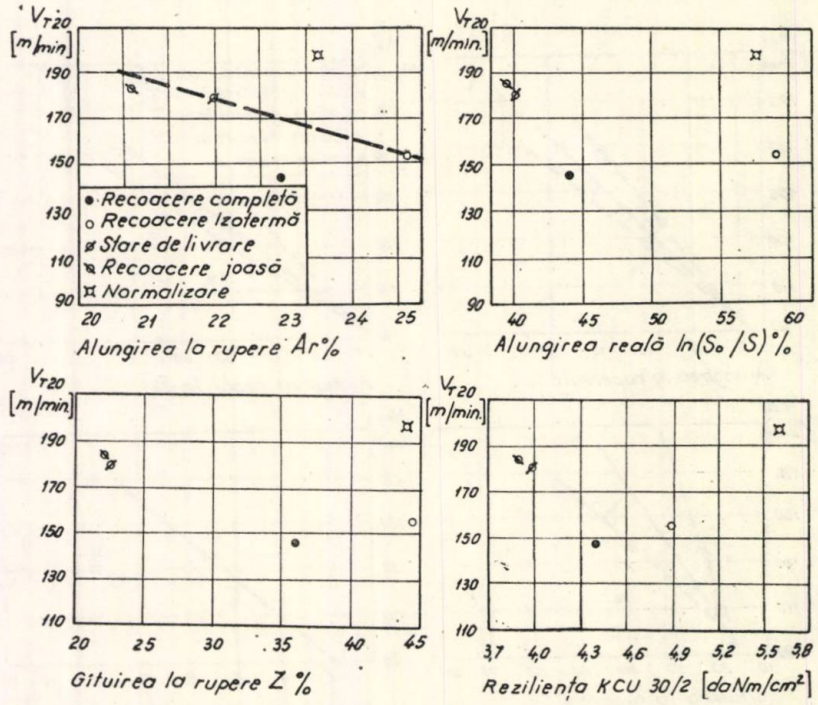


Fig. 5. — Influența caracteristicilor de plasticitate asupra vitezei v_{T20} pentru oțelul OLC 45 cu diferite structuri ferito-perlitice. Condiții de lucru : Sculă P 10 ; s = 0,2 mm/rot ; t = 0,4 mm ; Criteriul de uzură : h_r = 0,2 mm.

Se constată, de asemenea, că între viteza de așchiere v_{T20} și mărimile ce caracterizează plasticitatea oțelului OLC 45 cu diferite structuri ferico-perlitice nu se poate stabili o corelație satisfăcătoare. Aceasta, ca și împrăștierea ceva mai mare constatată la caracteristicile de rezistență se datorește faptului că aceste structuri de tip perlitic se caracterizează

Tabela 1

Numărul probei, conform lucrării [7]		6	7	8	9	10
Tratament termic aplicat		Normalizare	Recoacere completă	Recoacere izotermă	Recoacere joasă	Stare de livrare
Constituienți	Ferită liberă %	35	48	42	25	25
	Perlită %	65	52	58	75	74
Mărimea grăunților (punctaj)		8	7	8	4	4

atît prin mărimi diferite ale grăunților de perlită, precum și prin cantitatea și modul de distribuție al feritei (vezi tabela 1), constituent ce influențează mult caracteristicile de rezistență și de plasticitate.

4. INTERPRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Comportarea diferită a materialului prelucrat pentru cele două grupe de stări structurale ce au fost analizate considerăm că se datorește influenței diferite a constituienților structurali asupra procesului de uzare a sculei cu carburi metalice la strunjirea de finisare [12]. Astfel, scăderea prelucrabilității (parametru v_{T20}), odată cu creșterea caracteristicilor de rezistență pentru structurile de revenire de același tip (călire și revenire la 500, 400 și 300°C), se datorește în principal importanței pe care o prezintă creșterea gradului de dispersie al amestecului ferito-carburic, odată cu scăderea temperaturii de revenire, asupra accelerării procesului de uzare prin difuziune a sculei așchietoare [12]. Acest proces este de o deosebită importanță, deoarece solicitările mecanice și deci și termice ale zonei active nu cresc odată cu creșterea caracteristicilor de rezistență la structurile ferito-carburice obținute prin căliri și reveniri la diferite temperaturi [10]. Deci comportarea amintită nu trebuie pusă direct pe seama caracteristicilor de rezistență acestea fiind determinate în primul rînd de starea structurală.

La structurile de tip ferito-perlitic creșterea prelucrabilității cu duritatea sau rezistența de rupere la tracțiune, se datorește faptului că prin tratamentele termice analizate, structurile cu rezistență mecanică scăzută (obținute prin recoacere completă și recoacere izotermă) se caracterizează prin cantitate mare de ferită liberă [7], care influențează negativ asupra procesului de așchiere [10], [11], și uzării sculei așchietoare.

5. CONCLUZII

Din lucrare se obţine o apreciere mult mai corespunzătoare a influenţei caracteristicilor de rezistenţă ale materialului prelucrat asupra prelucrabilităţii, comparativ cu indicaţiile prezentate de literatură.

Se remarcă faptul că la valori apropiate ale caracteristicilor de rezistenţă, dar la structuri diferite, se obţin prelucrabilităţi diferite.

În cazul structurilor de tip ferito-carburic [7] obţinute prin căliri şi reveniri, prelucrabiliatea prin aşchiere (v_{T20}) scade odată cu creşterea caracteristicilor de rezistenţă şi creşte odată cu creşterea celor de plasticitate.

La structurile ferito-perlitice prelucrabilitatea prin aşchiere se îmbunătăţeşte odată cu creşterea caracteristicilor de rezistenţă, aspect total diferit de cele prezentate în literatură.

În cazurile analizate în lucrare, caracteristicile de plasticitate, la aceleaşi tipuri de stări structurale, duc la o apreciere mai slabă a prelucrabilităţii prin aşchiere, decît cele de rezistenţă.

Dintre toate caracteristicile luate în considerare pentru materialul prelucrat, numai rezistenţa la rupere la tracţiune şi duritatea HB dau o apreciere mai corectă a prelucrabilităţii în cazul structurilor de acelaşi tip.

Rezultă deci că prelucrabilitatea prin aşchiere nu este influenţată direct numai de caracteristicile de rezistenţă, ci în primul rînd de starea structurală a materialului prelucrat, care, împreună cu compoziţia chimică a acestuia, determină şi mărimea caracteristicilor mecanice. Apare deci ca o necesitate continuarea în acest mod a studiilor şi pentru alte materiale cu largă utilizare în industria constructoare de maşini.

Primită la redacţie la 14 februarie 1974; în formă revăzută la 16 mai 1977

BIBLIOGRAFIE

1. Z. Duca, *Bazele teoretice ale prelucrărilor pe maşini unelte*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1969.
2. * * * *Razvitie nauki o rezanii metallow*, Moskva, Maşinostroenie (1967).
3. E. I. Feldstein, *Obrabativaemosti stalei*, Moskva Maşghiz (1953).
4. G. Weber, Stahl und Eisen, **78** (1958).
5. H. Opitz, Stahl und Eisen, **83** (1963).
6. G. F. Micheletti, Ann. CIRP, **18**, *1* (1970).
7. A. Nanu şi M. Teodorescu, At. cerc. mec. apl., **32**, *5* (1973).
8. M. Teodorescu, Standardizarea română, **23**, *12* (1971).
9. — Standardizarea română, **25**, *2* (1973).
10. — *Contribuţii la studiul influenţei stării structurale a unor oţeluri hipoeutectoide asupra prelucrabilităţii prin aşchiere*, Teză de doctorat, I. P. „Traian Vuia" Timişoara (1973).
11. — *Influenţa stării structurale a materialului prelucrat asupra durabilităţii sculelor la strunjire*, Comunicare la Conferinţa republicană de scule aşchietoare, Universitatea Braşov (1972).
12. A. Nanu, şi M. Teodorescu, Lucrări ştiinţifice, I. P. Galaţi, *5*, (1972).
13. T. N. Loladze, *Iznos rejuşcego instrumenta*, Moskva, Maşghiz (1958).
14. G. Ostermann, Ind. Anz, Essen, **62** (1959).

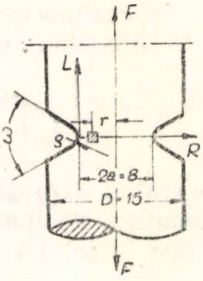
CONTRIBUȚII LA CERCETAREA DEFORMĂRII PLASTICE ÎN CONDIȚIILE STĂRII SPAȚIALE DE SOLICITARE

DE VOICU SAFTA

Centrul de sudură și încercări la oboseală, Timișoara

1. CONDIȚII GENERALE

Starea de tensiune spațială de tipul $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, s-a realizat în cadrul prezentei lucrări cu ajutorul concentratorului de tensiune



s mm	ω°	α_K
∞	130	1,0
8	130	1,2
2	90	1,7
0,6	60	2,7
0,3	45	3,6
0,2	40	4,4

Fig. 1. — Tipul concentratorului și valorile parametrilor geometrici investigate.

circumferențial de profil V, echivalent profilului hiperbolic [1], avînd parametri geometrici definiți în figura 1. Analiza teoretică și experimentală a desfășurării deformării plastice este considerată într-un plan diametral (longitudinal), sistemul de coordonate fiind ales ținînd seama de direcțiile principale ale tensorului deformație din secțiunea minimă.

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

Plecînd de la relația stabilită de H. Neuber [2], pentru coeficientul teoretic de concentrare

$$\alpha_K = (\alpha_\sigma \cdot \alpha_\varepsilon)^{1/2}, \tag{1}$$

în care α_σ și α_ε sînt coeficienții de concentrare a tensiunilor, respectiv a deformațiilor în domeniul plastic după direcția L și admițînd pentru variația tensiunii normale la vîrful concentratorului în stadiu elastic o expresie care generalizează relația propusă de V. Weiss [3], se ajunge la forma

$$\alpha_K = \frac{\alpha_{K\,\max}}{1 + c(k \cdot \lambda)}, \tag{2}$$

în care k reprezintă coeficientul de formă al concentratorului

$$k = \frac{a}{\rho}, \tag{3}$$

iar λ coeficientul de poziţie

$$\lambda = \frac{a - r}{a}, \tag{4}$$

a, ρ şi r avînd semnificaţia din figura 1, iar c fiind o constantă dependentă de intensitatea concentrării tensiunii şi de gradul de deformare.

Folosind ecuaţia exponenţială pentru caracteristica reală a materialului dedusă de J. Hollomon [4], din considerente de mecanism fizic de deformare

$$\sigma_n = \sigma_0 \cdot \varepsilon_n^m \tag{5}$$

şi ţinînd seama de (1) şi (2), rezultă următoarea relaţie pentru deformaţia specifică longitudinală în domeniul plastic :

$$\varepsilon_{Lp} = \varepsilon_n \left[\frac{\alpha_{K\max}}{1 + c(k \cdot \lambda)} \right]^{\frac{2}{m+1}}. \tag{6}$$

În mod similar se poate stabili expresia corespunzătoare deformaţiei specifice radiale, iar din condiţia de incompresibilitate, relaţia corespunzătoare deformaţiei specifice tangenţiale.

3. METODOLOGIA CERCETĂRILOR EXPERIMENTALE

La baza investigaţiilor experimentale a stat ipoteza potrivit căreia o dată cu mărirea deformaţiei, în volumele maxim solicitate se produc modificări de microgeometrie structurală la nivelul constituenţilor feritici [5], [6] (fig. 2) ai oţelului cu conţinut scăzut de carbon utilizat pentru experimentări. Intensitatea acestor modificări depinde de tensiunea aplicată şi de gradul de triaxialitate a stării de tensiune din zona considerată, care la rîndul ei este condiţionată de mărimea coeficientului teoretic de concentrare α_k şi de poziţia relativă în secţiunea minimă λ.

Prin admiterea ipotezei lipsei rotaţiilor în regiuni suficient de limitate ca extindere pe direcţiile principale [7], între deformaţia specifică longitudinală şi mărimea constituenţilor, se poate deduce următoarea relaţie :

$$\varepsilon_L = \frac{h_L - h_R}{\mu h_L + h_R} \tag{7}$$

şi în mod asemănător o expresie similară pentru ε_R. Indicii pentru mărimea granulei h au semnificaţia din figura 2 ; μ este coeficientul lui Poisson.

Mărimea granulelor s-a determinat cu ajutorul metodei reţelelor, formate din 8 — 10 linii paralele echidistante, dispuse perpendicular,

intervalul dintre două linii consecutive fiind de 0,020 mm. Eroarea maximă de măsurare a fost de $\pm 1\%$. Rezultatele cu abateri considerabile au fost eliminate prin aplicarea criteriului Chauvenet. Măsurătorile s-au

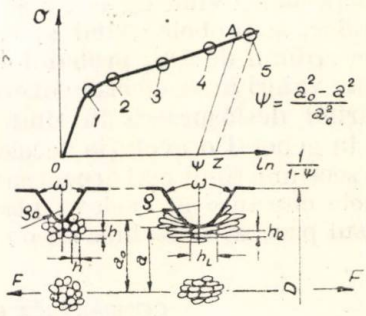


Fig. 2. — Modificarea macro și microgeometriei în cursul deformării.

efectuat în cinci zone distincte din secțiunea minimă a probelor în cîte cinci stadii de deformare, cuprinse în intervalul $\psi/Z = 0{,}025 \ldots 0{,}950$ (fig. 2).

4. REZULTATELE OBȚINUTE, ANALIZA LOR

Pe baza rezultatelor obținute s-au construit diagramele reprezentînd funcțiile $\varphi_1(\varepsilon_L, \psi/Z, \lambda)$, respectiv $\varphi_2(\varepsilon_R, \psi/Z, \lambda)$ pentru diferitele valori ale parametrului α_K, indicate în figura 1. Proiecțiile acestora în planul $\varepsilon O \lambda$ au permis relevarea familiilor de curbe $\varepsilon_L = f_1(\lambda)$, respectiv $\varepsilon_R = f_2(\lambda)$, avînd ca parametru raportul ψ/Z. Pentru ilustrare, în figura 3 se prezintă funcția φ_1 pentru $\alpha_K = 2{,}7$, iar în figura 4, dependențele f_1 pentru $\alpha_K =$

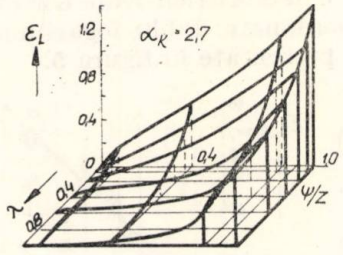


Fig. 3. — Variația deformației specifice locale în secțiune (λ) în funcție de gradul de deformare (ψ/Z), pentru $\alpha_K = 2{,}7$.

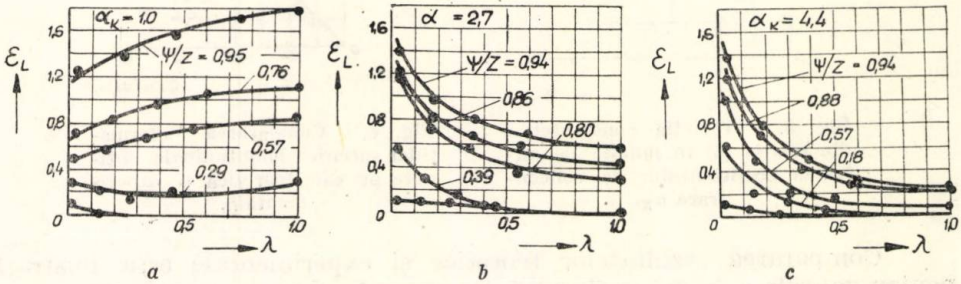


Fig. 4. — Distribuția în secțiune a deformației specifice longitudinale : *a* — pentru $\alpha_K = 1{,}0$; *b* — pentru $\alpha_K = 2{,}7$; *c* — pentru $\alpha_K = 4{,}4$.

$= 1{,}0$; 2,7 respectiv 4,4. Analiza lor oferă posibilitatea formării unei imagini complete asupra distribuției deformațiilor în secțiune, precum și asupra evoluției lor în diferitele stadii de deformare. Este interesant de remarcat faptul, că dacă spre deosebire de probele cu concentratori de tensiune, la probele având $\alpha_K = 1{,}0$ se constată o distribuție convergentă a deformațiilor, la probele având $\alpha_K = 1{,}1 \ldots 1{,}3$ variațiile în secțiune nu depășesc ordinul de 5%, probabil ca urmare a echilibrului care se creiază la aceste valori între efectul concentrării și efectul stricțiunii.

Urmărind desfășurarea în timp a deformațiilor (funcție de ψ/Z), se observă în general o evoluție accelerată. Acest proces se generalizează în întreaga secțiune fiind mai accentuat în faza finală a deformării. Excepție fac zonele cuprinse în enclava plastică de la vîrful concentratorului, unde procesul pare să se stabilizeze de la un anumit nivel de deformare.

5. COMPARAREA REZULTATELOR

În vederea confruntării rezultatelor s-a impus determinarea prealabilă a constantei c. Pentru aceasta s-a folosit relația

$$c(a - r) = \rho \left[\frac{\alpha_{K\,\max}}{\left(\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{m+1}{2}}} - 1 \right], \tag{8}$$

înlocuindu-se termenii respectivi cu valorile efective corespunzătoare fazei de deformare ψ/Z considerate. În acest fel s-au putut lua în considerație modificările geometrice ale profilelor concentratorilor de tensiune în timpul deformării [8]. Valoarea coeficientului de ecruisare a materialului m s-a determinat prin ridicarea caracteristicii reale corectate a oțelului [9], [10], într-un sistem de coordonate dublu logaritmic, folosind metoda fotografierii. Rezultatele sînt prezentate în figura 5.

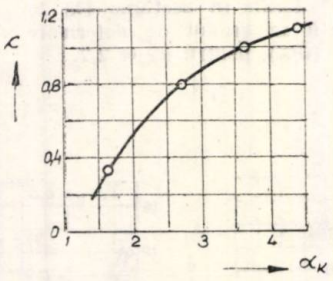


Fig. 5. — Variația constantei c din relația (6) în funcție de valoarea coeficientului de concentrare α_K.

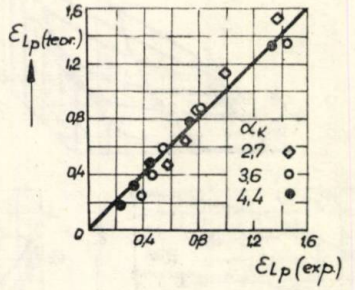


Fig. 6. — Compararea deformațiilor specifice longitudinale obținute pe cale teoretică și experimentală.

Compararea rezultatelor teoretice și experimentale este ilustrată pentru valorile $\alpha_K \geqslant 2{,}7$ în figura 6. Se observă o bună concordanță, punctele obținute plasîndu-se de o parte și de alta a dreptei înclinate la 45°,

într-un cîmp de dispersie acceptabil. Coeficientul de corelație a rezultat de 0,97. La valori mai mici ale lui α_K relația (6) nu mai poate fi utilizată, deoarece forma concentratorului se îndepărtează prea mult de cea teoretică, adoptată în deducerea relațiilor de bază folosite.

BIBLIOGRAFIE

1. C. V. Ujik, Soprotivlenie otrîvu i procinosti metallov. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskova-Leningrad, 1950.
2. H. Neuber, Journal of Applied Mechanics, **12**, 550 (1961).
3. V. Weiss „Fracture". Ed. by H. Liebowitz, vol. 3, Academic Press, New York, London, 1971, 233.
4. J. H. Hollomon, AIMME Metals Technical Publication, 1945, 1879.
5. V. Safta, Rev. Roum. Sci. techn., Métallurgie, Acad. RSR, București, *2*, 208 (1969).
6. V. Safta, A. Bernath, Rev. Roum. sci. techn., Mélallurgie, Ed. Acad. RSR, București, *1*, 71 (1965).
7. A. N. Grubin, I. I. Lihacev, Journal tehniceskoi fiziki Akad. Nauk SSSR, *3*, 512 (1955).
8. V. Safta, Materialprüfung, Materials Testing, Matériaux essais et recherches, *11*, 376 (1971).
9. A. Nadai, Theory of Flow and Fracture of Solids vol. 1, Mc Graw-Hill-New York, Toronto, London, 1950.
10. P. W. Bridgman, Studies in Large Plastic Flow and Fracture. Mc. Graw-Hill — New York, Toronto, London, 1952.

ÎNTINDEREA FILMULUI CONTINUU DE LUBRIFIANT ÎNTRE DOUĂ SUPRAFEȚE INELARE PLANE PARALELE ÎN ROTAȚIE

de MIRCEA PASCOVICI
Institutul politehnic București

NOTAȚII

A — aria de contact a fluidului cu discurile;
Q — debitul radial;
h — grosimea interstițiului dintre discuri;
l — lățimea filmului format din „șuvițele" reunite;
n — turația:
p — presiunea;
q — debitul unitar;
r — coordonata în direcție radială;
v — viteza în direcție radială;
w — viteza în direcție tangențială;
y — coordonata pe direcția normală la discuri;
α — raportul dintre aria de contact efectivă și cea maxim-posibilă;
η — viscozitatea dinamică a lubrifiantului;
ν — viscozitatea cinematică a lubrifiantului;
ρ — densitatea lubrifiantului;
ω — viteza unghiulară;

Calculul termic corect al ambreiajelor multilamelare unse cere cunoașterea întinderii filmului continuu de lubrifiant. În lucrarea [1], s-a evidențiat experimental că de la o anumită turație n_{cr}, filmul de lubrifiant dintre două discuri în rotație, coaxiale și sincrone, devine discontinuu de la o anumită rază, r_2 (fig. 1). Pentru proiectare este util să se cunoască, mărimea ariei de contact efective a lubrifiantului cu suprafețele inelare, în funcție de parametri geometrici și funcționali.

Folosind ipotezele uzuale din teoria hidrodinamică a lubrificației, considerînd și efectul forțelor centrifuge, ecuația de mișcare, în direcție radială, pentru o particulă de lubrifiant dintre discurile sincrone [2] va fi

$$\frac{dp}{dr} = \eta \frac{d^2v}{dy^2} + \rho r\omega^2. \qquad (1)$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 5, 1977, P. 761 – 766

Cu condiţiile la limită, $y=0,\ h\ ;\ v=0$, ecuaţia (1) duce la expresia vitezei în direcţia r, într-un punct oarecare al filmului de lubrifiant

$$v=\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}-\rho r\omega^2\right)(y^2-hy). \tag{2}$$

Integrînd expresia vitezei v pe grosimea filmului de lubrifiant şi înmulţind rezultatul obţinut cu perimetrul cercului de rază r se obţine debitul volumetric Q care circulă în direcţie radială între cele două discuri

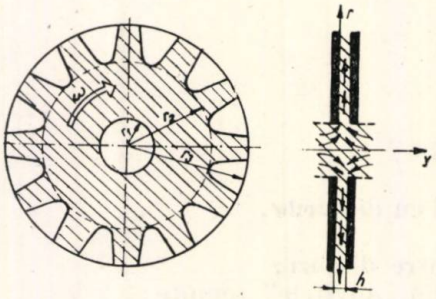


Fig. 1

$$Q=\frac{\pi r h^3}{6\eta}\left(\rho r\omega^2-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right). \tag{3}$$

Expresia presiunii în zona filmului de lubrifiant continuu se obţine prin integrare din ecuaţia (3)

$$p=p_1+\rho\frac{\omega^2}{2}(r^2-r_1^2)-\frac{6Q\eta}{\pi h^2}\ln\frac{r}{r_1}, \tag{4}$$

unde p_1 este presiunea lubrifiantului la intrare, la raza r_1.

Conform studiilor efectuate în problema continuităţii filmului de lubrifiant [3], [4], se poate afirma că la o anumită rată r_2, atingerea unei presiuni p_0 mai mică sau apropiat egală cu presiunea atmosferei p_a, lubrifiantul lichid nemaisuportînd tensiunile de întindere care apar se va rupe, căpătînd aspectul din figura 1.

Se poate face ipoteza, că începînd din secţiunea de rupere variaţia presiunii în direcţie radială este neglijabilă. Această ipoteză este întîlnită în studiul lagărelor radiale hidrodinamice. În aceste condiţii se pot scrie condiţiile la limită de presiuni

$$r\geqslant r_2\ ;\quad p=p_0\ ;\quad \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|_{r\geqslant r_2}=0. \tag{5}$$

Introducînd aceste condiţii în ecuaţiile (3) şi (4) se obţin relaţiile :

$$Q=\frac{\pi r_2^2 h^3\omega^2\rho}{6\eta}=\frac{\pi r_2^2 h^3\omega^2}{6\nu}, \tag{6}$$

$$\frac{p_1-p_0}{\rho\omega^2 r_1^2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Raza r_2 de la care filmul devine discontinuu se poate determina din relaţiile (6) sau (7) în funcţie de datele cunoscute de proiectant.

În vederea unei posibilităţi de folosire mai facile a rezultatelor obţinute, în figura 2 s-a reprezentat grafic ecuaţia (7) pentru un cîmp de

valori de interes practic. În lipsa unor date mai exacte se poate considera că presiunea de rupere p_0 este practic egală cu cea atmosferică, $p_0 \approx p_a$.

După cum s-a afirmat, interesează în special cunoașterea ariei efective de contact a lubrifiantului cu discurile. Modelul teoretic de față nu abordează calculul numărului de „șuvițe" care caracterizează aspectul curgerii în zona filmului discontinuu. Determinarea ariei de contact se va face presupunînd „șuvițele" reunite, conform figurii 3. Debitul radial unitar q printr-o secțiune de înălțime h și de lățime egală cu unitatea la o rază r, $r_2 < r < r_3$, se va obține din integrarea ecuației vitezei (2), în care s-a anulat gradientul de presiuni, $\frac{dp}{dr} = 0$

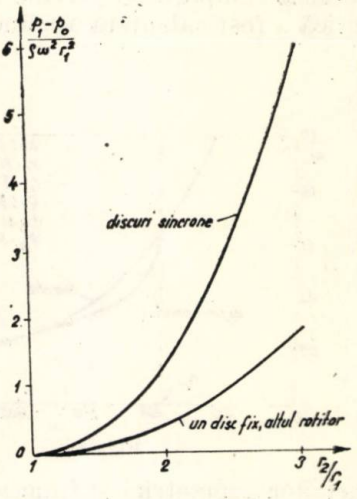


Fig. 2

$$v = -\frac{\rho r \omega^2}{2\eta}(y^2 - hy), \qquad (2')$$

$$q = \frac{rh^3\,\omega^2}{12\nu}. \qquad (8)$$

Din relațiile (6) și (8), se găsește că valoarea lățimii însumate a „șuvițelor" l, la o rază r (fig. 3), va fi pentru

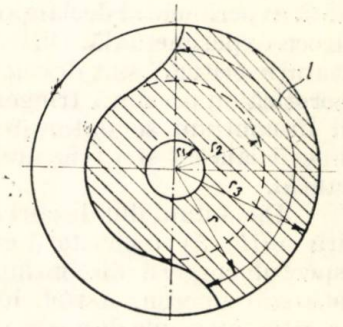


Fig. 3

$$r_2 < r < r_3; \quad l = \frac{2\pi r_2^2}{r}. \qquad (9)$$

Aria de contact dintre lubrifiant și discuri A, precizată prin porțiunea hașurată din figura 3, se poate exprima astfel:

$$A = 2\left[\pi(r_2^2 - r_1^2) + \int_{r_2}^{r_3} \frac{2\pi r_2^2}{r}\,dr\right], \qquad (10)$$

integrînd se obține

$$A = 2\pi\left[r_2^2\left(2\ln\frac{r_3}{r_2} + 1\right) - r_1^2\right]. \qquad (10')$$

Interesează pentru evaluări comparative raportul α dintre aria de contact efectivă și aria de contact maxim — posibilă, pentru filmul complet continuu. Cu notațiile folosite, utilizînd relația (10') se obține

$$\alpha = \frac{r_2^4 - r_1^2 + 2r_2^2 \ln\frac{r_3}{r_2}}{r_3^2 - r_1^2}. \qquad (11)$$

S-au comparat rezultatele obținute prin modelul teoretic de față cu datele experimentale din lucrarea [1]. În figura 4 este prezentată această comparație, privind variația raportului α cu turația n. Curba teoretică a fost calculată apelînd la relațiile (6) și (11) pentru valori ale parametrilor geometrici și funcționali identice cu cele corespunzătoare condițiilor experimentale.

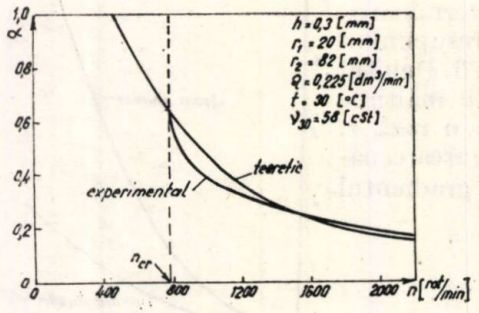


Fig. 4

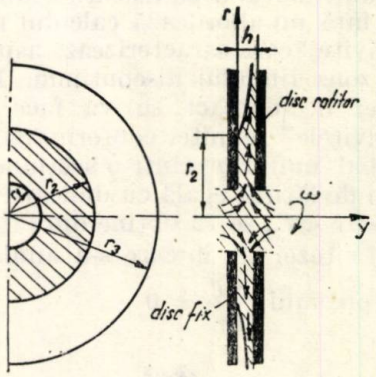


Fig. 5

Pentru turațiile mai mari decît „turația critică" n_{cr} la care se constată experimental declanșarea ruperii, curba teoretică este foarte apropiată de cea experimentală. Diferențele din zona turațiilor mai mici decît această „turație critică" sînt destul de mari. Aceste diferențe, cît și faptul că curba teoretică nu prezintă frîngerea care ilustrează experimental apariția curgerii discontinui se datorește neconsiderării efectului forțelor de tensiune superficială cît și a tensiunilor de întindere pe care le poate suporta lubrifiantul.

Dacă unul din discuri este fix, iar celălalt se rotește cu viteza unghiulară ω (fig. 5) se constată experimental [1], că ruperea filmului, respectiv aspectul curgerii discontinui, este diferit de cel descris pentru discurile rotitoare sincron. Astfel, începutul curgerii discontinui este marcat prin apariția unor bule de aer începînd de la periferia discului fix, apoi pe măsură ce turația crește, sporirea continuă a numărului de bule duce în final la desprinderea completă a fluidului de pe suprafața fixă, începînd de la o anumită rază r_2. Studiul analitic cu un model analog celui anterior poate fi efectuat pentru stabilirea turațiilor de la care lubrifiantul s-a desprins complet de pe suprafața fixă, începînd de la o anumită rază r_2.

În cazul de față ecuația de mișcare va fi : [2]

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \eta \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} + \rho \frac{w^2}{r}, \tag{1'}$$

unde w este viteza tangențială a particulei de fluid, care în porțiunea de curgere continuă variază liniar pe grosimea filmului, gradientul de presiuni pe direcție tangențială fiind nul.

$$w = \omega r \frac{y}{h}. \tag{12}$$

Expresia vitezei radiale v a unei particule de fluid în porțiunea de curgere continuă, $r_1 < r < r_2$, va fi în acest caz

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}(y^2 - hy) - \frac{\rho r\omega^2}{12\eta}\left(\frac{y^2}{h^2} - hy\right). \tag{2''}$$

Debitul de lubrifiant Q care circulă radial devine

$$Q = \frac{\pi r h^3}{\eta}\left(\frac{\rho r\omega^2}{20} - \frac{1}{6}\frac{dp}{dr}\right). \tag{3'}$$

În fine, presiunea în filmul de lubrifiant continuu va fi :

$$p = p_1 + \frac{3\rho\omega^2}{20}(r^2 - r_1^2) - \frac{6Q\eta}{\pi h^3}\ln\frac{r}{r_1}. \tag{4'}$$

Folosind aceleași condiții la limită pentru determinarea analitică a razei r_2 de la care se produce curgerea discontinuă se vor obține expresiile :

$$Q = \frac{\pi r_2^2 h^3\omega^2\rho}{20\eta} = \frac{\pi r_2^2 h^3\omega^2}{20\nu} \tag{6'}$$

și

$$\frac{10(p_1 - p_0)}{3\rho\,\omega^2 r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(\ln\frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}. \tag{7}$$

În figura 3 s-a reprezentat grafic și ecuația (7') pentru aceleași valori ale raportului r_2/r_1.

Aria efectivă de contact fluid — discuri va fi pentru această situație :

$$A = \pi(r_2^2 + r_3^2 - 2r_1^2), \tag{13}$$

iar raportul α dintre suprafața efectivă de contact și cea maxim-posibilă

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} + 1\right). \tag{14}$$

Rezultatele analitice obținute, respectiv cele date de relația (6'), au fost confruntate cu încercările experimentale corespunzătoare din lucrarea (1). Figura 6 ilustrează evoluția curgerii discontinui în funcție de turație și de debitul radial. Curbele *1* și *1'* arată turația de la care apar bulele de aer, respectiv începutul curgerii discontinui la raza r_3, iar curbele *2* și *2'* precizează turația la care lubrifiantul s-a desprins complet de pe întreg discul (fix), respectiv curgerea a ajuns la raza r_1.

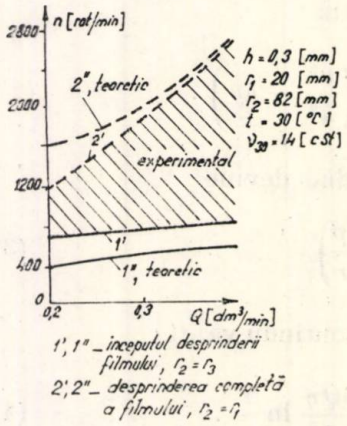


Fig. 6

Curbele teoretice au fost calculate pentru valori ale parametrilor geometrici și funcționali corespunzătoare condițiilor experimentale, folosind relația (6') în care pentru curba *1''* s-a considerat $r_2 = r_3$, iar pentru curba *2''*, $r_2 = r_1$. Curbele *2'* și *2''* sînt foarte apropiate în special pentru debite mari. Curbele *1'* și *1''* sînt destul de diferențiate tot din aceleași motive ca cele semnalate pentru discurile sincrone.

Rezultatele acestor modele teoretice simple pot fi de folos direct proiectantului de ambreiaje multilamelare unse pentru aprecierea ariei efective de contact a lubrifiantului cu discurile, atunci cînd ambreiajul este decuplat și lubrifiantul are rol de mediu de răcire, în funcție de parametri geometrici și funcționali dați.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Kaebernick, *Verteilung des Kühlös im Lamellenpaket von ölgekühlten Kupplungen*, Ind. Anz., **96**, *106*, 2382 — 2383 (1974).
2. I. Klase, *Ausnutzung der Fliehkraft des Schmiermittels zur Erzeugung der Tragkraft eines hochtourigen Axialgleitlagers*, Machinenbautechnik, **14**, *8*, 433 — 442 (1965).
3. L. Floberg, *On hydrodynamic lubrication with special reference to sub — cavity pressures and number of streamers in cavitation regions*, Acta Polytechnica Scandinavica, Me 19, 1965, 1 — 24.
4. P.A.I. Scott, *Condițiile la limită ale ecuațiilor lubrificației hidrodinamice*, teză de doctorat, București, 1968.

RECENZII

R. COMOLET — Mécanique expérimentale des fluides, II, Dynamique des fluides réels. Turbomachines. (Mecanica experimentală a fluidelor reale. Turbomaşini), MASSON, Paris, 1976, 447 p., 293 fig., 12 planşe.

Lucrarea face parte dintr-un ciclu de trei volume ale aceluiaşi autor, celelalte două intitulîndu-se : I — Statique et dynamique des fluides non visqueux (Statica şi dinamica fluidelor nevîscoase), 1969, şi III — Recueil de problèmes (Culegere de probleme), 1973.

În lucrare se tratează mişcarea fluidelor vîscoase omogene newtoniene în prezenţa sau în vecinătatea unor pereţi fixi sau mobili, punîndu-se în evidenţă coeficienţii determinabili experimental.

Primele patru capitole (Introducere; Ecuaţiile fundamentale ale mecanicii fluidelor; Statica fluidelor; Integrale primare ale dinamicii fluidelor) prezintă relaţiile teoretice de bază ale mecanicii fluidelor pornind de la principiile generale ale mecanicii şi fizicii.

Capitolele V—VIII (Mişcări laminare; Turbulenţa şi mişcări turbulente; Similitudinea curgerilor; Teoria stratului limită) analizează unele probleme de interes general în mecanica fluidelor, cuprinzînd aspectele teoretice definitorii şi aplicaţiile corespunzătoare.

Capitolele IX—X (Aerodinamica corpurilor geometric simple; Aerodinamica aripii de avion) au drept obiect stabilirea forţelor aerodinamice ce acţionează asupra unor corpuri solide de diverse forme, cu aplicaţii la aripa de avion şi la turbomaşini.

Capitolele XI—XIII (Curgeri în conducte; Curgeri în singularităţi — pierderi de sarcină singulare; Curgeri în canale deschise) cuprind în principal calculul repartiţiei vitezelor şi a pierderilor de sarcină la mişcarea unidirecţională în conducte şi canale.

Capitolul XIV (Elemente ale teoriei turbomaşinilor) abordează proprietăţile esenţiale ale mişcării fluidelor incompresibile în interiorul turbomaşinilor, fără a intra în detaliile constructive ale pompelor sau turbinelor.

Sumarul bibliografiei cuprinde 26 de titluri de cărţi actuale în domeniul mecanicii fluidelor.

Lucrarea îmbracă un domeniu larg de probleme, utilizează rezultate recente, are un stil clar şi concis. Se acordă atenţie formelor integrale (globale) ale relaţiilor teoretice fundamentale din mecanica fluidelor, care prezintă un interes sporit pentru cercetător şi inginer. Lucrarea se adresează de asemenea învăţămîntului superior.

Mihail Roco

Proceedings of the Fourth International Conference on WIND EFFECTS ON BUILDINGS AND STRUCTURES Heathrow-London 1975, Edited by Dr. K. T. Eaton Publisher : Cambridge University Press, 1977 Cambridge, London, New York, Melbourne

Cartea prezentă, cu un titlu ce reflectă foarte bine conţinutul ei, era necesar să fie scrisă şi difuzată , pentru a înmănunchia lucrările specialiştilor din domeniu, la nivel internaţional, cunoscînd interesul permanent crescînd al inginerilor cercetători, proiectanţi şi executanţi din construcţii în problema realizării siguranţei şi stabilităţii acestora sub acţiunea vîntului.

Cartea conţine lucrările prezentate la Conferinţa a IV-a internaţională privind efectele vîntului asupra construcţiilor şi structurilor, ţinută la Heathrow-Londra în anul 1975. Scopul acestei conferinţe a fost de a promova un schimb de idei şi de cunoştinţe relative la problemele actuale de ingineria vîntului (meteorologică, aerodinamică şi structurală) şi exploatarea lor de către constructor şi arhitect (în construcţii, structuri şi pe om). Conferinţa a fost organizată de către Building Research Establishment-Anglia şi International Study Group on Wind Effects on Buildings and Structures.

Temele principale propuse pentru a fi abordate în Conferință, au fost :

1. structura vîntului (turbulența atmosferică, analiza statistică, date meteorologice, perioade de revenire).

2. încărcările statice și dinamice (distribuții de forțe și presiuni pe structură și pe învelitoare, presiuni interioare).

3. răspunsul dinamic (încărcare din rafală, instabilitate aerodinamică, rigiditate, amortizare, accelerație, deformație, vibrație, oboseală, răspunsul omului).

4. efectele în mediul înconjurător (scurgerea vîntului în jurul construcțiilor, distribuții de viteze, efecte de vecinătate, criterii de confort, măsuri de remediere).

5. tehnici de măsurare (pentru viteză, presiune, forță și răspuns la scară naturală și în tunel).

6. aplicații practice și recomandări pentru proiectare.

Cartea conține toate lucrările prezentate la această conferință. Pentru fiecare secțiune, în care se prezintă articolul de sinteză, articolele relative la problemele speciale cu rezultatele aferente, noi și de detaliu, precum și discuțiile purtate între diferiții contributori și autorii lucrărilor prezentate.

Lucrările de sinteză se referă la :

1. Natura vîntului : statistici pe perioade lungi, structura vîntului pentru regiuni obișnuite sau speciale, interacțiunea dintre structură și vînt (Prof. Panofsky).

2. Încărcările statice și dinamice care se aplică structurii și construcției : determinarea acestora cu ajutorul tunelului sau la scară naturală (Ing. Scruton).

3. Răspunsul dinamic, I, comentează studiile pe cilindrul circular și pe podurile de deschidere mare (Prof. Davenport).

4. Răspunsul dinamic, II : studii pe modele bi- și tridimensionale, studii la scară naturală, concluzii (Prof. Tohns).

5. Efecte asupra mediului : considerații meteorologice, aerodinamice (Dr. Wise).

6. Tehnici de măsurare : necesități, instrumente și aparate, modele, parametri măsurați (Prof. Ishizaki).

7. Proiectarea la vînt : aplicarea în practică a rezultatelor arătate în secțiunile anterioare, aspecte tehnice și economice (Eng. Newherry).

8. Recomandări relative la realizarea lucrărilor supuse efectului vîntului (BSc Obe).

În articolele de detaliu publicate în cartea de față se fac treceri în reviste a problemei efectului vîntului asupra structurilor, prin prisma măsurătorilor, în situ și în tunelul de vînt, a analizei teoretice și a metodelor de proiectare. Subiectele abordate pot fi grupate după cum urmează :

— Structura vîntului ; profile ale vitezelor ; intensitatea și scara turbulenței ; coeziunea ; spectre și viteze ale rafalei ; probabilități ale distribuțiilor ; efectele terenului ; statistica evenimentelor ; simulări în tunel.

— Presiuni mijlocii, fluctuante și de vîrf ; spectre ; corelări.

— Încărcări provenite din vînt, în lungul și transversal lui, precum și torsionale ; valori medii și variabile în timp ; spectre ; corelări (pe diferite tipuri de construcții și învelitori).

— Răspunsul dinamic, în lungul și transversal vîntului, cel de torsiune ; deplasări, turbulențe, vîne și jeturi provocate ; mișcări și forțe ; spectre și distribuții probabile ; perioade naturale ; amortizări.

— Caracteristici ale jetului (dîrei) de curent ; viteze medii ; intensitatea și scara turbulenței ; vîrtejuri (numărul lui Strouhal) ; spectre ; aspecte fizice, forțe de ridicare și de apăsare, modelări și simulări.

— Realizarea de structuri, de secțiuni circulare și rectangulare, de tip placă și de alte forme ; construcții înalte și de tip turn ; structuri de înălțime medie și mică ; poduri de deschidere mare ; ferestrele.

— Parametri de studiat ; viteza și profilele vitezei, intensitatea și scara turbulenței, numărul Reynolds, unghiul de atac, geometria structurală, rugozități ale suprafețelor, interferența structurală, vibrații ale structurilor, amortizări, porozități, scări de modelare, interacțiunea vînt-structură.

— Instrumentație pentru măsurarea vitezelor, a mișcărilor și forțelor ; modelarea aeroelastică ; vizualizarea scurgerii ; prelucrarea datelor.

— Proiectarea pe baza criteriilor de încărcare, de rezistență, de utilitate în serviciu, de mediu înconjurător ; metode simplificate de proiectare ; coduri ; economia proiectării.

— Evenimente extraordinare, uragane, cicloane ; analiza avariilor, analiza riscului probabil.

— Alte subiecte: controlul vibrațiilor, ventilații, vînturarea de nisip și de moloz; stabilitatea pînzelor (scheletelor); efectul vegetației; zgomotul produs de vînt; efecte asupra omului.

Discuțiile purtate pe marginea comunicărilor, bogate documentate și foarte utile — clarifică aspectele matematice și fizice ale problemelor și sugerează noi posibilități de investigare.

Atenția acordată subiectului este dovedită prin faptul că la conferințe au fost reprezentate institute de învățămînt superior, universitar și tehnic, de cercetare și proiectare, din domeniile mecanicii aplicate (solidului și fluidului), al ingineriei construcțiilor civile, aerospațiale, maritime și energetice, al ingineriei mediului înconjurător și serviciilor meteorologice, al materialelor de construcții (aluminiul, plasticul, oțelul, cimentul), al unor institute de prevenirea dezastrelor, de științe inginerești.

Dintre lucrările publicate un număr apreciabil provine de la binecunoscutele Building Research Establishment, care se preocupă de un timp mai îndelungat de asemenea probleme și Boundary Layer Tunnel Laboratory ca și la de alte institute de specialitate (construcții civile, aeronautice, meteorologice, științe fizice). Enumerările acestea de teme și institute este făcută cu scopul de a atrage atenția asupra bogatului conținut de subiecte abordate în conferință și publicate în această carte.

Lucrările publicate (în total 78), împreună cu bogata bibliografie prezentată la fiecare articol (în total cca. 400 titluri distincte), contribuie cu mult succes la lărgirea domeniului de cunoaștere a problemelor de ingineria vîntului în general și a celor ale ingineriei de construcții civile în particular. Cartea se extinde pe 845 pagini.

Editura Cambridge University Press, bine cunoscută prin ținuta și poziția față de publicarea de lucrări de interes și nivel superior, realizează odată în plus, în condiții impecabile, o lucrare de utilitate evidentă.

Prof. Ioan I. Munteanu

S. C. Hunter, Mechanics of Continuous Media (Mecanica mediilor continue) Ellis Horwood — Wiley, Chichester, 1976, 568 pg., 126 fig., £ 7.00

Cartea profesorului S. C. Hunter de la Universitatea Sheffield — Anglia, binecunoscut îndeosebi pentru lucrările sale în domeniul viscoelasticității și plasticității, se bazează pe materialul expus în cadrul cursului introductiv de mecanica mediilor continue. Pornind de la constatarea întemeiată că în marea majoritate a cazurilor, noțiunile de bază ale mecanicii mediilor continue, așa cum se află ele incluse în manualele universitare, se regăsesc în cursurile separate de teoria elasticității, hidrodinamică etc., autorul își propune clarificarea fundamentului lor comun, stabilirea și interpretarea corectă a legilor de comportare mecanică a materialelor.

Primele cinci capitole ale cărții cuprind prezentarea noțiunilor și reprezentărilor fundamentale cu care se operează în mecanica mediilor continue (noțiunea de continuum și descrierea acestuia, forță, tensiune, ecuații de mișcare, deformație). În plus, sînt date elemente utile de algebră și analiză tensorială și matriceală.

Capitolele VI—VIII se referă la expunerea legilor de comportare mecanică a materialelor. Este remarcabil faptul că se insistă asupra semnificației fizice a acestor legi, formulîndu-se și principiul indiferenței materiale. Analiza este continuată cu discutarea legilor de comportare ale fluidelor și, respectiv, ale materialelor elastice și termoelastice.

Rezultatele prezentate în capitolele introductive sînt folosite în continuare pe parcursul capitolelor IX—XIII, în care sînt examinate o serie de aspecte deosebit de importante ale mecanicii fluidelor (soluții ale curgerii fluidelor Reiner-Rivlin, soluții exacte ale ecuațiilor Navier—Stokes, ecuația lui Bernoulli și aplicații, teoria potențialului în teoria clasică a hidrodinamicii).

Capitolul al XIV-lea este consacrat discutării succinte a rezultatelor fundamentale ale teoriei clasice liniare a elasticității pentru solidele mecanic izotrope. În acest cadru sînt tratate cu o atenție aparte unele chestiuni de interes practic din elastostatică și, respectiv, elstodinamică.

Capitolele al XV-lea și al XVI-lea conțin prezentarea unor elemente de teoria viscoelasticității liniare și, respectiv, a plasticității. Se remarcă grija deosebită ce trebuie acordată justificării fizice a formulărilor teoretice a legilor de comportare precum și consecințelor imediate ale acestora. În cazul prezentării comportării viscoelastice sînt descrise funcțiile de răspuns cvasistatic și, respectiv, dinamic și sînt menționate date interesante referitoare la rezultatele experimentale. Capitolul consacrat teoriei plasticității cuprinde descrierea particularităților acestei proprietăți remarcabile a solidelor, idealizările matematice clasice, implicațiile diferitelor criterii de curgere plastică.

Cantitatea de informație cuprinsă în materialul propriu-zis este simțitor îmbogățită prin cele 134 de probleme incluse în text și care apar mai degrabă ca o continuare firească a sa decît ca simple exerciții de calcul, cu atît mai mult cu cît o bună parte din ele sînt discutate și rezolvate.

Lucrarea conține o anexă referitoare la unele formule uzuale de analiză vectorială, precum și un index de termeni.

Bibliografia, sistematizată pe capitole cuprinde aproape 40 de titluri cheie.

Interesul constant pe care autorul îl acordă justificării fizice a chestiunilor prezentate, precum și numeroasele exemple concrete din bogata sa experiență inginerească recomandă în mod deosebit această lucrare tuturor acelora care sînt preocupați atît de corectitudinea interpretării din punct de vedere fizic a rezultatelor obținute, cît și de rezolvarea judicioasă a unor probleme practice de mecanică.

Horia Paven

F 2557

6
TOMUL 36
Nov. — Dec.
1977

1978 IAN 12

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*

Membri :

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞTEFAN BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. CR. MATEESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. RADU PRIŞCU,
Dr. doc. V. VISARION,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), str. 13 Decembrie nr. 3, P.O.Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 36, nr. 6 noiembrie—decembrie 1977

SUMAR

STUDII

ŞTEFAN NEDELCU, Metodă de rezolvare numerică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al II-lea, întîlnite în mecanica fluidelor 773

GABRIELA OPRESCU, Ecuaţiile Euler generalizate, pentru mişcarea perturbată. . . 781

NICOLAE PANDREA, Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul teoriei vectorilor duali . 789

C. BUDA, ŞT. POPESCU, Stabilirea rezervei optime a unui sistem cu elemente în serie 803

VALERIU PANAITESCU, Transferul turbulent de căldură şi de masă în conducte netede 811

M. POPESCU, I. JELEV, Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice concepute pe scheme complexe 819

GELU ONU, Calculul diafragmelor cu buiandrugi subţiri prin metoda elementelor finite 837

ION SIMIONESCU, CEZAR DUCA, Sinteza mecanismelor pentru realizarea poziţiilor asociate cu ajutorul operatorilor matriceali 855

MIHAI BUCULEI, Contribuţii la analiza cinematică, prin metode matriceale, a multipolilor termocinematici 865

ANDREI RIPIANU, VASILE MARCU, Consideraţii asupra calculului momentului de inerţie mecanic axial al unui cot, plus echipajele mobile aferente acestuia aparţinînd unui arbore cotit 879

M. MITRACHE, Posibilităţi de reproducere în laborator a solicitărilor reale din exploatare în transmisia autoturismului Dacia 1300. 889

MIRCEA MUNTEANU, Asupra comportării îmbinării bolţ-ochi la încărcări care depăşesc limita de elasticitate 905

NOTE

FLAVIUS POCIOIANU, Rezolvarea numerică a ecuaţiei diferenţiale a presiunilor din lagărele hidrodinamice cilindrice pentru lubrifiant bifazic 925

RECENZII 931

METODĂ DE REZOLVARE NUMERICĂ A ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL II-LEA, INTÎLNITE ÎN MECANICA FLUIDELOR

de ȘTEFAN NEDELCU
INCREST—BUCUREȘTI

În lucrare se prezintă o metodă de rezolvare a unor ecuații cu derivate parțiale de ordinul al II-lea, liniare și două variante ale metodei, care o fac aplicabilă, cu ajutorul calculatoarelor electronice existente în țară, la rezolvarea unor probleme similare.

Odată cu apariția și generalizarea calculatoarelor electronice, ca instrumente de lucru în aproape toate activitățile vieții sociale, procedeele numerice de rezolvare a unor probleme ce modelează relații de dependență între diferiți parametri reali au cunoscut o dezvoltare impetuoasă. Au apărut metode cu o sferă largă de aplicabilitate și metode cu o aplicabilitate redusă, specifice unei anumite probleme.

Metodele specifice au un randament mai bun, exprimat prin rapiditate și calculator de capacitate mică, față de metodele generale aplicate aceleiași probleme. Dar problemele ce trebuie rezolvate sînt mult mai numeroase decît metodele specifice existente și apar dificultăți produse de posibilitățile tehnice limitate ale instrumentului de lucru cu o metodă generală. În cele ce urmează am căutat să modificăm o metodă generală, referitor la domeniul mecanicii fluidelor, pentru a putea fi aplicată cu calculatoarele electronice de capacitate mică, 32K sau 64K.

Problemele de mecanica fluidelor cu aplicație în tehnică sînt reprezentate de sisteme de ecuații diferențiale sau ecuații cu derivate parțiale a căror soluții permit interpretarea unor situații din funcționarea unui dispozitiv, furnizînd astfel posibilitatea intervenției pentru asigurarea unei funcționări optime.

Foarte des se întîlnesc în mecanica fluidelor ecuații cu derivate parțiale de ordinul al II-lea liniare.

Forma generală a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al II-lea liniare este :

$$a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + b_1(x, y)\frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+ b_2(x, y)\frac{\partial p}{\partial y} + c_0(x, y)\, p = d(x, y). \qquad (1)$$

Considerăm un domeniu D cu frontiera C în care coeficienţii ecuaţiei (1) sînt funcţii continue. Pe frontiera domeniului avem condiţii la limită de tip Dirichlet:

$$p(x, y) = p_0 \quad \text{pentru } (x, y) \in C. \tag{2}$$

Soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile (2) în domeniul închis $\overline{D}$ este greu de găsit prin procedee analitice. S-a demonstrat unicitatea dar o soluţie generală de tip închis nu există.

Prima etapă a rezolvării numerice a sistemului (1), (2) este a discretizării, adică a transformării ecuaţiilor cu derivate parţiale într-un sistem de ecuaţii algebrice.

Metoda pe care o expunem consideră un domeniu de formă dreptunghiulară (fig. 1).

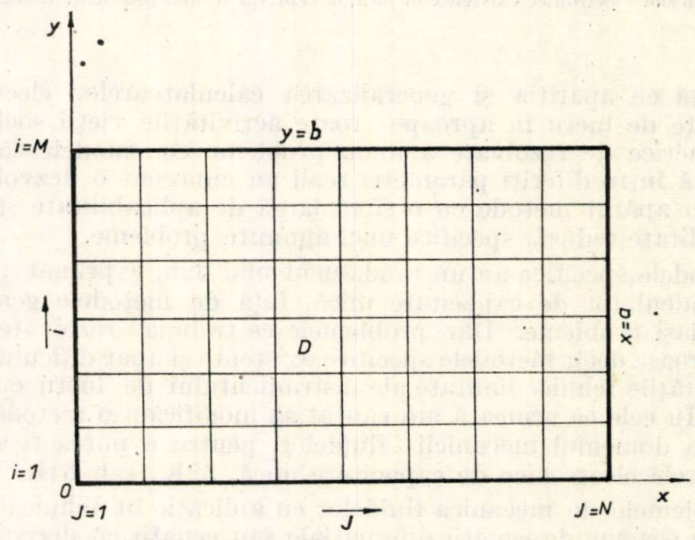


Fig. 1. — Reţea dreptunghiulară pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei (1) cu condiţiile (2).

Utilizînd ca metodă de discretizare diferenţele finite, alegem o reţea ca în figura 1 şi aproximăm derivatele funcţiei necunoscute într-unul din nodurile reţelei (fig. 2) prin:

$$\begin{aligned}
(\partial p/\partial x)_{i,j} &= (p_{i,j+1} - p_{i,j-1})/(2Dx),\\
(\partial p/\partial y)_{i,j} &= (p_{i+1,j} - p_{i-1,j})/(2Dy),\\
(\partial^2 p/\partial y^2)_{i,j} &= (p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j})/(Dy)^2,\\
(\partial^2 p/\partial x \partial y)_{i,j} &= (p_{i+1,j+1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1} - p_{i+1,j+1})/(4DxDy),\\
(\partial^2 p/\partial x^2)_{i,j} &= (p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1})/(Dx)^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Cu aproximațiile (3), în fiecare din punctele interioare ale rețelei, ecuația (1) se transformă într-un sistem algebric de forma

$$b_{i-1,j-1}p_{i-1,j-1} + b_{i,j-1}p_{i,j-1} + b_{i+1,j-1}p_{i+1,j-1} + a_{i-1,j}p_{i-1,j} +$$

$$+ a_{i,j}p_{i,j} + a_{i+1,j}p_{i+1,j} + c_{i-1,j+1}p_{i-1,j+1} + c_{i,j+1}p_{i,j+1} +$$

$$+ c_{i+1,j+1}p_{i+1,j+1} = f_{i,j} \tag{4}$$

Coeficienții sistemului (4) sînt expresii liniare de coeficienții ecuației (1) calculați în nodurile rețelei. Dacă pe direcția x sînt N noduri, iar pe direcția y sînt M noduri, sistemul (4) este format din $(N-2)\times$ $\times (M-2)$ ecuații cu $M \times N$ necunoscute. Adăugînd condițiile (2) transformate în

$$p_{i,j} = p_0 \quad \begin{matrix} (i = 1, M & j = 1, 2, \ldots, N), \\ (j = 1, N & i = 1, 2, \ldots, M), \end{matrix} \tag{5}$$

sistemul este determinat.

Pentru rezolvarea sistemului (4) și (5) se pot utiliza metode exacte sau metode iterative.

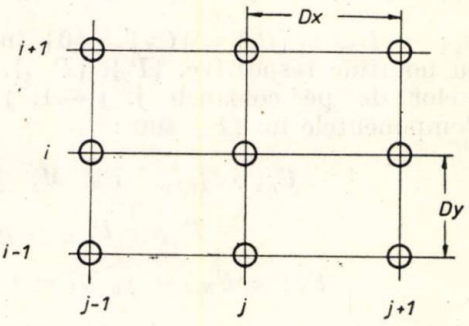


Fig. 2. — Moleculă de calcul pentru aproximarea derivatelor prin diferențe finite.

Metodele iterative sînt specifice unui anumit tip de ecuație, eliptic, hiperbolic sau parabolic și sînt mai restrictive decît metodele exacte datorită condițiilor suplimentare necesare pentru convergență.

Metodele exacte nu cer condiții în plus față de cele specificate la scrierea ecuației (1) dar conduc, în general, la o durată mai mare de timp. Metodele bazate pe inversare de matrice fac parte din această categorie. Metoda inversării directe necesită un timp proporțional cu puterea a a treia a dimensiunii matricei inversate, respectiv cu $(MN)^3$. Metoda rezolvării pe coloane folosește tot inversare de matrice, dar alegînd coloanele în mod convenabil, timpul necesar devine mult mai mic. În continuare ne vom referi numai la această metodă [1].

Fie $M < N$. Atunci, considerînd sistemul scris pentru un j și $i = 1, 2, \ldots, M$, se obține o relație între necunoscutele de pe coloanele $j-1, j, j+1$:

$$[A_j]\{P_j\} + [B_j]\{P_{j-1}\} + [C_j]\{P_{j+1}\} = \{F_j\}. \tag{6}$$

Folosind terminologia din algebra matriceală, $[A_j]$, $[B_j]$, $[C_j]$ sînt matrice pătrate, $(M \times M)$, tridiagonale, ale căror elemente sînt:

$$A_{j,i,i-1} = a_{i-1,j},$$
$$A_{j,i,i} = a_{i,j},$$
$$A_{j,i,i+1} = a_{i+1,j},$$
$$B_{j,i,i-1} = b_{i-1,j},$$
$$B_{j,i,i} = b_{i,j}, \quad i \neq 1, M \quad j \neq 1, N, \tag{7}$$
$$B_{j,i,i+1} = b_{i+1,j},$$
$$C_{j,i,i-1} = c_{i-1,j},$$
$$C_{j,i,i} = c_{i,j},$$
$$C_{j,i,i+1} = c_{i+1,j}$$

şi

$$A_{j,1,1} = A_{j,M,M} = 1,$$
$$B_{j,1,1} = B_{j,M,M} = C_{j,1,1} = C_{j,M,M} = 0,$$
$$[A_1] = [A_N] = I \text{ (matricea unitate)},$$

$[B_1] = [B_N] = [C_1] = [C_N] = [0]$ (matricea cu toate elementele nule). Cu notaţiile respective, $\{P_j\}$, $\{P_{j-1}\}$, $\{P_{j+1}\}$, $\{F_j\}$ sînt vectorii necunoscutelor de pe coloanele j, $j-1$, $j+1$ şi vectorul termenilor liberi. Componentele lui $\{F_j\}$ sînt:

$$F_{j,i} = f_{i,j}, \quad i \neq M, \quad j \neq 1, N,$$
$$F_{j,1} = F_{j,M} = p_0, \tag{8}$$
$$F_{1,i} = F_{N,i} = p_0 \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Sistemul vectorial (6), unde $\{P_1\}$ şi $\{P_N\}$ sînt cunoscuţi, conduce la o relaţie de tipul

$$\{P_{j-1}\} = [E_j]\{P_j\} + \{R_j\}. \tag{9}$$

Pentru determinarea matricelor $[E_j]$ şi a vectorilor $\{R_j\}$ se obţin relaţii de recurenţă. Din (9) şi (6) rezultă

$$\{P_j\} = ([A_j] + [B_j][E_j])^{-1}(-[C_j]\{P_j{}^{+}{}_1\} + \\ + \{F_j\} - [B_j]\{R_j\}). \tag{10}$$

Comparînd (9) cu (10), rezultă

$$[E_{j+1}] = ([A_j] + [B_j][E_j])^{-1}[C_j], \\ j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{11}$$
$$\{R_{j+1}\} = ([A_j] + [B_j][E_j])^{-1}(\{F_j\} - [B_j]\{R_j\}),$$

unde $[E_1] = [0]$ și $\{R_1\} = 0$ (vectorul $\{P_1\}$ nu este legat de vectorul $\{P_0\}$, ce nu aparține rețelei).

După calcularea matricelor $[E_j]$ și a vectorilor $\{R_j\}$, cu relația (9), se calculează vectorii coloană $\{P_j\}$ în ordinea $\{P_{N-1}\}\{P_{N-2}\}, \ldots, \{P_2\}$. Această metodă este cunoscută [1]. Vom face în continuare cîteva considerații legate de utilizarea metodei cu ajutorul unui calculator electronic. Programul de calcul ocupă în memoria operativă a calculatorului un spațiu repartizat instrucțiunilor și varibilelor. Atunci cînd se lucrează cu matrice, spațiul ocupat de variabile poate fi mult mai mare decît cel ocupat de instrucțiuni. Acest lucru face ca metoda expusă mai sus să nu poată fi aplicată pentru calculatoarele mici (32K, 64K). Pentru un anumit tip de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al II-lea, liniare, am utilizat o modificare a metodei care o face aplicabilă și pentru calculatoarele de tipul menționat.

Dacă în ecuația (1) $a_{12}(x, y) = 0$, atunci sistemul (4) devine :

$$b_{i,j-1}p_{i,j-1} + a_{i-1,j}p_{i-1,j} + a_{i,j}p_{i,j} + \\ + a_{i+1,j}p_{i+1,j} + c_{i,j+1}p_{i,j+1} = f_{i,j}. \tag{12}$$

Vectorial se păstrează (6), dar matricele $[B_j]$ și $[C_j]$ sînt acum matrice diagonale. Se folosesc relațiile (11) pentru a obține $[E_N]$ și $\{R_N\}$ și cu (9) $\{P_{N-1}\}$. Pentru a determina ceilalți vectori coloană, $\{P_{N-2}\}$, $\{P_{N-3}\}, \ldots, \{P_2\}$, revenim la sistemul (6) în care matricea $[B_j]$ este înlocuită cu $[\bar{B}_j]$ și vectorul $\{F_j\}$ cu $\{\bar{F}_j\}$:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{j,i,i} &= B_{ji,i} \qquad i \neq 1, M, \\ \bar{B}_{j,1,1} &= \bar{B}_{j,M,M} = 1 \\ \bar{F}_{j,i} &= \bar{F}_{j,i}, \\ \bar{F}_{j,1} &= \bar{F}_{j,M} = 2p_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Această modificare corespunde considerării în sistemul de ecuații de pe coloana $j - 1$ a condițiilor la limită care au fost preluate pînă în această etapă de coloana j (vectorii P_j și P_{j+1} sînt cunoscuți acum).

Formula de calcul pentru P_{j-1} este

$$\{P_{j-1}\} = [\bar{B}_j]^{-1}(\{\bar{F}_j\} - [A_j]\{P_j\} - [C_j]\{P_{j+1}\}) \tag{14}$$
$$(j = N - 1,\ N - 2, \ldots, 3).$$

Deoarece matricea $[\bar{B}_j]$ este diagonală, $[\bar{B}_j]^{-1}$ este tot diagonală și are elementele egale cu $1/\bar{B}_{j,i,i}$.

Pentru a compara metoda inițială cu aceasta, modificată, calculăm numărul minim de variabile pentru una și pentru cealaltă.

În prima, deoarece se folosește relația (9), sînt necesare (fig. 3*a*)

$3M$ variabile pentru matricea tridiagonală $[A]$,

$2M$ variabile pentru matricele diagonale $[B]$ şi $[C]$,

M variabile pentru vectorul termenilor liberi $\{F\}$,

M^2N variabile pentru matricele $[E_j]$ (se păstrează pentru $j=1, 2, \ldots, N$),

MN variabile pentru vectorii $\{R_j\}$, în total $M[(M+1)N+6]$ variabile.

Pentru metoda modificată sînt posibile două procedee; primu necesită păstrarea matricelor $[A_j]$, $[B_j]$, $[C_j]$ pentru toţi j, iar altul calculează matricele fără a le păstra pentru j-ul următor.

În prima variantă sînt necesare (fig. 3.*b*)

$3M(N-1)$ variabile pentru matricele tridiagonale $[A_j]$,

$2M(N-1)$ variabile pentru matricele diagonale $[B_j]$ şi $[C_j]$,

$M(N-1)$ variabile pentru vectorii termenilor liberi, $\{F_j\}$,

$2M$ variabile pentru doi vectori consecutivi $\{R_1\}$, $\{R_2\}$,

$2M^2$ variabile pentru două matrice consecutive $[E_1]$, $[E_2]$, în total $2M(3N+M-2)$ variabile. Economia de memorie este $M[(M-5)N-2M+10]$ (în general $M>5$).

În a doua variantă sînt necesare (fig. 3*c*)

$3M$ variabile pentru matricea tridiagonală $[A]$,

$2M$ variabile pentru matricele diagonale $[B]$ şi $[C]$,

M variabile pentru vectorul termenilor liberi $\{F\}$,

$2M$ variabile pentru doi vectori consecutivi $\{R_1\}$, $\{R_2\}$,

$2M^2$ variabile pentru două matrice consecutive $[E_1]$, $[E_2]$, în total $M(2M+8)$ variabile. Economie de memorie este $M(M+1)(N-2)$.

În acest din urmă caz este necesar un timp mai lung de calcul deoarece matricele $[A]$, $[B]$, $[C]$ se calculează pentru fiecare j de două ori: pentru relaţiile (11) şi pentru relaţiile (14). Diferenţa de timp este neglijabilă în comparaţie cu timpul consumat pentru obţinerea matricelor $[E]$ şi a vectorilor $\{R\}$, ce necesită inversări de matrice pentru fiecare j.

Pentru a vedea cum depinde memoria afectată pentru o metodă sau alta în funcţie de dimensiunile reţelei, în tabelul 1 s-au indicat la diferite perechi (M, N) numărul de variabile necesar.

Metoda rezolvării pe coloane este o metodă exactă ce poate fi aplicată pentru ecuaţii de tip eliptic, hiperbolic sau parabolic. Timpul necesar pentru rezolvarea sistemului algebric (6) este proporţional cu M^3N. Pentru un timp acceptabil este necesar ca M să nu fie prea mare. De aceea coloana a doua din tabelul 1 este mai aproape de reţelele folosite în practică.

S-a expus metoda pentru domenii de formă dreptunghiulară. Se poate folosi şi pentru domenii de altă formă, cu condiţia posibilităţii înscrierii domeniului într-un dreptunghi şi a extinderii condiţiilor de pe frontieră în porţiunile adăugate prin extinderea domeniului.

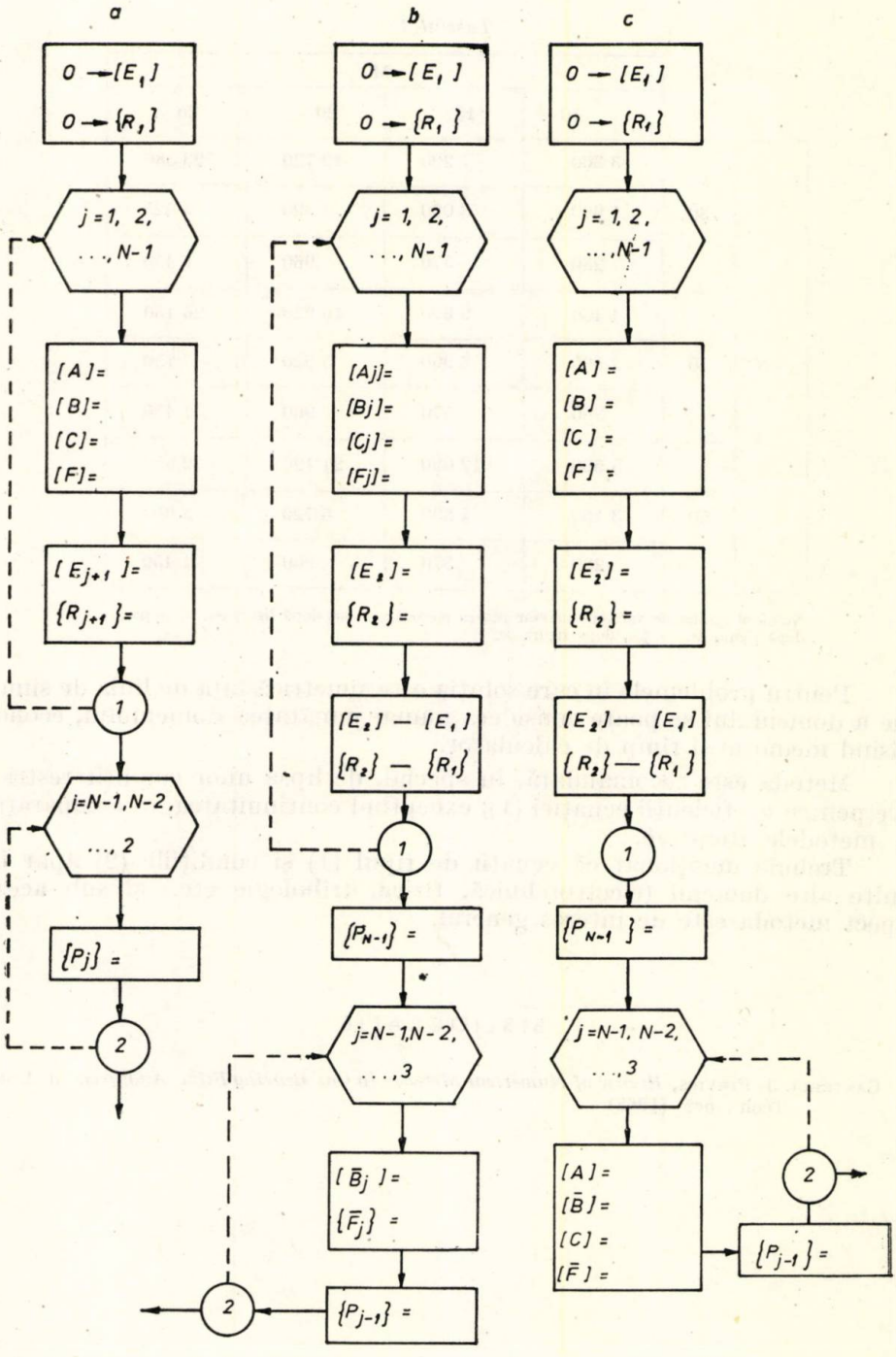


Fig. 3. — Scheme logice pentru metoda rezolvării pe coloane a sistemului algebric obținut prin discretizare.

Tabelul 1

		M			
		10	15	20	25
N	30	3 360	7 290	12 720	23 580
		1 960	3 090	4 320	5 625
		280	570	960	1 450
	40	4 460	9 690	16 920	26 150
		2 560	3 990	5 520	7 150
		280	570	960	1 450
	50	5 560	12 090	21 120	32 650
		3 160	4 890	6 720	8 650
		280	570	960	1 450

Numărul minim de variabile necesar pentru metodă: — sus după figura 3*a*, — mijloc, după figura 3*b*. — jos, după figura 3*c*.

Pentru problemele în care soluţia este simetrică faţă de linia de simetrie a domeniului se poate considera numai jumătatea domeniului, economisind memorie şi timp de calculator.

Metoda este recomandată, în special, de lipsa unor condiţii restrictive pentru coeficienţii ecuaţiei (1), exceptînd continuitatea, în comparaţie cu metodele iterative.

Trebuie menţionat că ecuaţii de tipul (1) şi condiţiile (2) apar în multe alte domenii (electrotehnică, fizică, tribologie etc.) şi sub acest aspect metoda este de interes general.

BIBLIOGRAFIE

V. Castelli, J. Pirvics, *Review of Numerical Methods in Gas Bearing Film Analysis*, J. Lnb. Tech., oct. (1968).

ECUAȚIILE EULER GENERALIZATE, PENTRU MIȘCAREA PERTURBATĂ*

de GABRIELA OPRESCU
Observatorul Astronomic din București

În articolul de față sînt prezentate ecuațiile Euler generalizate, cu membru drept, deci în cazul mișcării de rotație a Pămîntului, perturbată de acțiunea Lunii și Soarelui. Se definește un sistem de referință avînd ca pol P_0, polul mediu al mișcării polului de rotație pe suprafața Pămîntului și se calculează momentul forțelor exterioare în acest sistem.

Mișcarea de rotație a Pămîntului în jurul axei sale, care constitue scara astronomică a timpului universal, suferă de multe imperfecțiuni așa cum s-a scos în evidență în ultimele decenii.

Timpul universal $TU0$ este afectat de variații sezoniere, anuale, care sînt corectate în timpul universal sub forma unui termen ΔT_s și de variații datorate mișcării polului pe suprafața Pămîntului, care sînt introduse sub forma unei corecții $\Delta\lambda$, astfel că timpul universal sau semidefinitiv are forma

$$TU2 = TU0 + \Delta\lambda + \Delta T_s. \tag{1}$$

Variațiile sezoniere anuale au în majoritate cauze meteorologice. Mișcarea polilor pe suprafața Pămîntului poate fi descompusă în două mișcări: una anuală, sub formă de elipsă și a cărei cauză este căutată tot în variațiile anuale meteorologice, și alta aproape circulară, mișcarea Chandler, cu perioada de aproximativ 420 zile, legată de proprietățile elastice ale Pămîntului și de structura lui internă. La aceste variații se mai adaugă încetinirea seculară a vitezei de rotație a Pămîntului, precum și variațiile brusce.

Studiul mișcării de rotație a Pămîntului trebue să ia în considerare un Pămînt deformabil ce are momentele principale de inerție A, B, C și produsele de inerție F, G, H definite astfel:

$$A = \int (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m,\quad B = \int (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}m,\quad C = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m,$$
$$F = \int yz\,\mathrm{d}m,\quad G = \int xz\,\mathrm{d}m,\quad H = \int xy\,\mathrm{d}m. \tag{2}$$

* Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

Ecuația generală de mișcare a Pământului în jurul axei instantanee de rotație, cu viteza instantanee $\bar{\omega}$, și avînd momentul cinetic total iar momentul forțelor externe $\bar{L}$ este

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K} = \bar{L}, \tag{3}$$

ceea ce proiectat pe un sistem de axe cu centrul în centrul de greutate al Pământului și cu axa OZ foarte apropiată de $\bar{\omega}$ ne conduce la ecuațiile lui Euler generalizate:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ap} - Hq - Gr) + qK_z - rK_y = L_x, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-Hp + Bq - Fr) + rK_x - pK_z = L_y, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-Gp - Fq + Cr) + pK_y - qK_x = L_z, \end{aligned} \tag{4}$$

în care

$$\begin{aligned} Kx &= Ap - Hq - Gr, \\ Ky &= -Hp - Bg - Fr, \\ Kz &= Gp - Fg + Cr, \end{aligned} \tag{5}$$

iar p, q, r sînt componentele vitezei instantanee $\bar{\omega}$ în sistemul de axe ales.

Folosind numai ecuația a treia și neglijînd termenii de ordinul al doilea în p și q, obținem

$$\frac{\dot{G}}{C}p - \frac{\dot{F}}{C}g + \frac{\dot{C}}{C}r - \frac{G}{C}(\dot{p} + rq) - \frac{F}{C}\dot{q} + rp) + \dot{r} = L_z, \tag{6}$$

ecuație ce ne va permite să apreciem valoarea rapoartelor momentelor de inerție atunci cînd cunoaștem componentele vitezei de rotație în cazul mișcării perturbate.

Studiul acestor rapoarte sau variații relative ale momentelor de inerție a fost deja făcut în cazul mișcării neperturbate, deci cînd $L_z = 0$. [1]

Considerînd Pământul ca un tot împreună cu atmosfera sa, variațiile momentelor de inerție trebuie să cuprindă atît cauze meteorologice, cît și legate de structura internă a Pământului. Deplasările mari de mase atmosferice ce au loc deasupra continentelor cu ocazia schimbării sezoanelor, deplasările de mase din structura internă a Pământului trebuie să se oglindească în variația valorilor momentelor de inerție și în schimbarea poziției polului de inerție, pol definit ca locul unde axa mică a elipsoidului de inerție C intersectează suprafața Pământului.

Influența Lunii și a Soarelui se reflectă în primul rînd asupra vitezei de rotație a Pământului, dar se reflectă și în variația momentelor

de inerție în special datorită acțiunii mareice asupra atmosferei și scoarței terestre.

Lucrarea de față se ocupă de calculul momentelor forțelor exterioare, care constituie membrul drept al ecuațiilor Euler generalizate.

Fixăm sistemul de referință în care avem scrise ecuațiile (4) ca sistemul avînd axa Oz îndreptată spre P_0, polul mediu al mișcării polului pe suprafața Pămîntului, iar axa Ox la intersecția planului perpendicular pe OP_0 cu meridianul Greenwich.

Corpurile perturbatoare Soare și Lună sînt raportate la un sistem de axe geocentrice avînd axa OZ îndreptată după axa instantanee de rotație a Pămîntului, iar OX după direcția punctului vernal γ.

Poziția celor două sisteme unul față de celălalt este fixată prin cele trei unghiuri Γ, φ, ψ (fig. 1). Cosinusurile unghiurilor dintre aceste axe sînt exprimate prin relațiile :

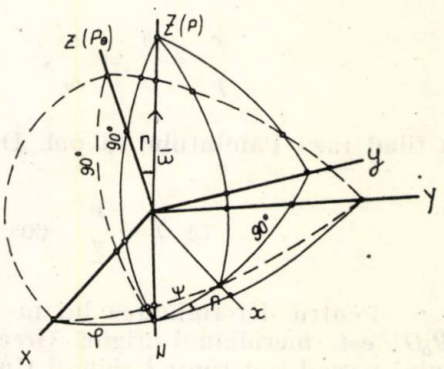


Fig. 1

$$\cos(x, X) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Gamma,$$

$$\cos(x, Y) = \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\Gamma,$$

$$\cos(x, Z) = \sin\psi\sin\Gamma;$$

$$\cos(y, X) = -\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Gamma,$$

$$\cos(y, Y) = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos,\ \Gamma, \qquad (7)$$

$$\cos(y, Z) = \cos\psi\sin\Gamma;$$

$$\cos(z, X) = \sin\varphi\sin\Gamma,$$

$$\cos(z, Y) = -\cos\varphi\sin\Gamma,$$

$$\cos(z, Z) = \cos\Gamma.$$

Dacă viteza instantanee de rotație $\bar{\omega}$ are componentele p, q, r, în sistemul de axe P_0xyz, atunci conform (7) avem relațiile :

$$p = \omega\cos(Z, x) = \omega\sin\psi\sin\Gamma,$$

$$q = \omega\cos(Z, y) = \omega\cos\psi\sin\Gamma, \qquad (8)$$

$$r = \omega\cos(Z, z) = \omega\cos\Gamma,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{p}{q}, \quad \cos \Gamma = \frac{r}{\omega}. \tag{9}$$

Conform indicațiilor din lucrarea [1] p, q, r sînt legate de pozițiile polului $\underline{x}$, $\underline{y}$ în planul tangent la Pămînt în P_0 prin relațiile

$$\frac{\underline{x}}{p} = \frac{\underline{y}}{q} = \frac{a}{\omega}, \quad p = \frac{\omega \underline{x}}{a}, \quad q = \frac{\omega \underline{y}}{a}, \tag{10}$$

a fiind raza Pămîntului la pol. Deci unghiurile ψ, Γ se calculează prin

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\underline{x}}{\underline{y}} \quad \cos \Gamma = \sqrt{1 - \frac{\underline{x}^2 + \underline{y}^2}{a^2}}. \tag{11}$$

Pentru determinarea lui ne folosim de figura 2, în care $XN = \varphi$, P_0G este meridianul origină Greenwich, $X\xi$ este unghiul orar al punctului vernal sau timpul sideral Greenwich la 0 TU, $\xi N = \Delta\varphi$, PG este meridianul instantaneu Greenwich.

Pentru φ putem scrie

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi. \tag{12}$$

Determinarea lui φ se reduce la determinarea lui $\Delta\varphi$.

Notăm cu $\xi E = \Delta\lambda$, variația longitudinii datorată mișcării polului și cu $xE = \Delta l$, variația latitudinii datorată tot mișcării polului. $\Delta\lambda$ și Δl sînt legate de pozițiile polului prin relațiile [2]:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= (\underline{x} \sin \lambda - \underline{y} \cos \lambda) \operatorname{tg} l, \\ \Delta l &= (\underline{x} \cos \lambda + \underline{y} \sin \lambda). \end{aligned} \tag{13}$$

În triunghiul sferic NxE (fig. 2) avem relațiile

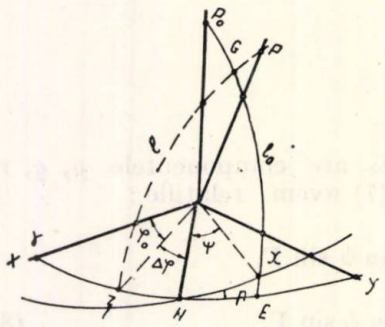


Fig. 2

$$\frac{\sin \Gamma}{\sin xE} = \frac{1}{\sin NE}, \tag{14}$$

$NE = (\Delta\lambda - \Delta\varphi)$, care este suficient de mic pentru a aproxima sinusul prin arc,

$$(\Delta\lambda - \Delta\varphi) \sin \Gamma = \Delta l,$$

$$\Delta\varphi = \Delta\lambda - \frac{\Delta l}{\sin \Gamma}. \tag{15}$$

În acest fel, avînd coordonatele polului $\underline{x}$, $\underline{y}$ în planul tangent, fixăm poziția celor două sisteme de coordonate prin relațiile (11), (12), (15).

Avînd pentru corpurile perturbatoare α și δ aparent, deci raportate la ecuatorul adevărat și γ al momentului, pentru coordonatele dreptunghiulare ecuatoriale căpătăm expresiile:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \alpha \cos \delta, \\ Y &= r \sin \alpha \cos \delta, \\ Z &= r \sin \delta. \end{aligned} \tag{16}$$

Notăm coordonatele corpurilor perturbatoare cu x, y, z și le exprimăm în sistemul P_0xyz funcție de X, Y, Z prin expresiile:

$$\begin{aligned} x &= X \cos (X, x) + Y \cos (Y, x) + Z \cos (Z, x), \\ y &= X \cos (X, y) + Y \cos (Y, y) + Z \cos (Z, y), \\ z &= X \cos (X, z) + Y \cos (Y, z) + Z \cos (Z, z). \end{aligned} \tag{17}$$

CALCULUL MOMENTELOR FORȚELOR EXTERIOARE L_z

Momentul forțelor exterioare se exprimă prin

$$\bar{L} = \bar{r} \times (-\operatorname{grad} U), \tag{18}$$

iar componenta L_z a momentului

$$L_z = y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{19}$$

Pentru calcularea funcției de forță U pornind de la calculul potențialului creat de Pămînt într-un punct N exterior în care se află un corp perturbator presupus inițial punctiform,

$$V = \int_P \frac{dm}{MN}, \tag{20}$$

unde dm este elementul de masă din punctul M din Pămînt,

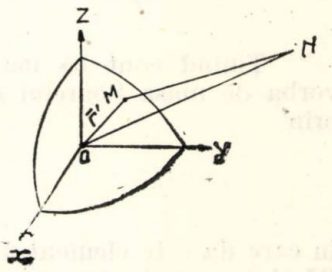


Fig. 3

$$MN^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma,$$

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos \gamma\right]^{-1/2}.$$

Cum $\frac{r'}{r} \ll 1$, expresia este dezvoltabilă în serie de puteri ale lui $\frac{r'}{r}$ și poate fi considerată ca funcție generatoare a polinoamelor lui Legendre,

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k (\cos \gamma) = \frac{1}{r}\left[P_0 (\cos \gamma) + \left(\frac{r'}{r}\right) P_1 (\cos \gamma) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos \gamma) + \ldots\right] = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos \gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{3\cos^2 \gamma - 1}{2}\right) + \ldots\right].$$

Deci prin integrare asupra întregului Pământ, obţinem

$$V = \frac{M_p}{r} + \frac{1}{2r^5} \int_P (r'r)^2 (3 \cos^2 \gamma - 1)\, dm$$

sau

$$V = \frac{M_P}{r} + \frac{A + B + C}{2r^3} - \frac{3(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{2r^5} + \frac{6(Fyz + Grz + Hxy)}{2r^5}, \tag{21}$$

unde A, B, C sînt momentele principale de inerţie ale Pământului, iar F, G, H sînt produsele de inerţie.

Momentul de inerţie al unui corp faţă de o axă se exprimă prin

$$I_r = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\alpha\beta H - 2\,\alpha\gamma G - 2\beta\gamma F, \tag{22}$$

unde α, β, γ sînt cosinuşii directori ai acelui ax faţă de sistemul de coordonate ales. Alegem ca axă $\bar{r}(x, y, z)$ distanţa între centrele de greutate a Pământului şi a unuia din corpurile perturbatoare,

$$\alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta = \frac{y}{r}, \quad \gamma = \frac{z}{r},$$

$$I_r = \frac{x^2}{r^2} A + \frac{y^2}{r^2} B + \frac{z^2}{r^2} C - \frac{2xy}{r^2} H - \frac{2xz}{r^2} G - \frac{2yz}{r^2} F$$

şi

$$V = \frac{M_P}{r} + \frac{A + B + C - 3Ir}{2r^3}. \tag{23}$$

Ţinînd cont că masa perturbatoare nu este punctiformă ci este vorba de masa Soarelui sau a Lunii, funcţia de forţă U se calculează prin

$$U = K \int_P \int_L \frac{d\mu\, dm}{\rho}, \tag{24}$$

în care $d\mu$ este elementul de masă lunară, dm este elementul de masă pe Pământ, ρ distanţa între două puncte curente, unul pe Pământ, celălalt în masa perturbatoare. Fixăm punctul din Lună, de exemplu în centrul de greutate şi integrăm numai asupra Pământului:

$$U = k \int_L d\mu \int \frac{dm}{\rho} = k \int_L \left[\frac{M_P}{r} + \frac{A + B + C - 3Ir}{2r^3} \right] d\mu.$$

Apoi considerăm şi punctul de pe Lună variabil şi integrăm

$$U = k \frac{M_P M_L}{r} + k M_P \frac{A' + B' + C' - 3Ir'}{2r'^3} + k M_L \frac{A + B + C - 3Ir}{2r^3}.$$

În cazul Lunii sau Soarelui facem ipoteza că $A' + B' + C' = 3I'_r$ și avem

$$U = k\frac{M_P M_L}{r} + kM_L\frac{A + B + C - 3Ir}{2r^3}. \tag{25}$$

Pentru ambele corpuri perturbatoare expresia funcției de forță va fi dată de

$$U = kM_S\left[\frac{M_P}{r} + \frac{A + B + C}{2r^3} - \frac{3(x^2A + y^2B + z^2C)}{2r^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{6(xyH + xzG + yzF)}{2r^5}\right]_S + kM_L\left[\frac{M_P}{r} + \frac{A + B + C}{2r^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3(x^2A + y^2B + z^2C)}{2r^5} + \frac{6(xyH + xzG + yzF)}{2r^5}\right]_L^Q. \tag{26}$$

Cu funcția de forță sub forma (26) calculăm momentul L_z al forțelor exterioare din expresia (19):

$$L_z = 3kM_S\left[(B - A)\frac{xy}{r^5} + \frac{H(y^2 - x^2)}{r^5} + \frac{Gzy}{r^5} - \frac{Fxz}{r^5}\right]_S +$$

$$+ 3kM_L\left[(B - A)\frac{xy}{r^5} + \frac{H(y^2 - x^2)}{r^5} + \frac{Gyz}{r^5} - \frac{Fxz}{r^5}\right]_L. \tag{27}$$

Ținînd cont de relațiile (7), (16), (17) avem expresia momentului L_z pentru unul din corpurile perturbatoare:

$$L_z = \frac{3kM}{r^3}\cdot\frac{B - A}{C}\{\cos^2\alpha\cos^2\delta[\sin\psi\cos\psi(\sin^2\varphi\cos^2\Gamma - \cos^2\varphi) +$$

$$+\cos\varphi\sin\varphi\cos\Gamma(\sin^2\psi - \cos^2\psi)] + \sin^2\alpha\cos^2\delta[\sin\psi\cos\psi(\cos^2\varphi\cos^2\Gamma -$$

$$-\sin^2\varphi) + \cos\varphi\sin\varphi\cos\Gamma(\cos^2\psi - \sin^2\psi)] + \sin^2\delta\sin\psi\cos\psi\sin^2\Gamma +$$

$$+ \cos\alpha\sin\alpha\cos^2\delta[-2\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi\cos\psi(1 + \cos^2\Gamma) +$$

$$+ (\sin^2\psi - \cos^2\psi)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\cos\Gamma] + \cos\alpha\sin\delta\cos\delta\times$$

$$\times[\cos\varphi\sin\Gamma(\cos^2\psi - \sin^2\psi) - 2\sin\varphi\sin\psi\cos\psi\cos\Gamma\sin\Gamma] +$$

$$+ \sin\alpha\sin\delta\cos\delta[\sin\varphi\sin\Gamma(\cos^2\psi - \sin^2\psi) + 2\cos\varphi\sin\psi\times$$

$$\times\cos\psi\cos\Gamma\sin\Gamma]\} + \frac{3kM}{r^3}\cdot H\{\cos^2\alpha\cos^2\delta[(\sin^2\psi - \cos^2\psi)(\cos^2\varphi -$$

$$- \sin^2 \varphi \cos^2 \Gamma) + 4 \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi \cos \psi \cos \Gamma] +$$

$$+ \sin^2 \alpha \cos^2 \delta[(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi)(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \Gamma) -$$

$$- 4 \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi \cos \psi \cos \Gamma] - \sin^2 \delta \sin^2 \Gamma(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) +$$

$$+ 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \delta [(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \cos \varphi \sin \varphi(1 + \cos^2 \Gamma) +$$

$$+ 2 \sin \psi \cos \psi \cos \Gamma (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)] + 2 \cos \alpha \sin \delta \cos \delta[(\sin^2 \psi -$$

$$- \cos^2 \psi \varphi) \sin \varphi \cos \Gamma \sin \Gamma - 2 \cos \varphi \sin \psi \cos \psi \sin \Gamma] -$$

$$- 2 \sin \alpha \sin \delta \cos \delta[(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \cos \varphi \cos \Gamma \cos \Gamma +$$

$$+ 2 \sin \varphi \sin \psi \cos \psi \sin \Gamma]\} + \frac{3kM}{r^3} \cdot G\{\cos^2 \alpha \cos^2 \delta[-\cos \varphi \sin \varphi \sin \psi \sin \Gamma -$$

$$\sin^2 \varphi \cos \psi \cos \Gamma \cdot \sin \Gamma] + \sin^2 \alpha \cos^2 \delta[\sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \sin \Gamma -$$

$$- \cos^2 \varphi \cos \psi \cos \Gamma \sin \Gamma] + \sin^2 \delta \cos \psi \sin \Gamma \cos \Gamma + \cos \alpha \sin \alpha \times$$

$$\times \cos^2 \delta [- (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \sin \psi \sin \Gamma + 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi \times$$

$$\times \sin \Gamma \cos \Gamma] + \cos \alpha \sin \delta \cos \delta[(\sin^2 \Gamma - \cos^2 \Gamma) \sin \varphi \cos \psi -$$

$$- \cos \varphi \sin \psi \cos \Gamma] + \sin \alpha \sin \delta \cos \delta[- (\sin^2 \Gamma - \cos^2 \Gamma) \cos \varphi \cos \psi -$$

$$- \sin \varphi \sin \psi \cos \Gamma] - \frac{3kM}{r^3} F\{\cos^2 \alpha \cos^2 \delta (\sin \varphi \cos \varphi \sin \Gamma \cos \psi -$$

$$- \sin^2 \varphi \sin \psi \sin \Gamma \cos \Gamma) + \sin^2 \alpha \cos^2 \delta (-\sin \varphi \cos \varphi \sin \Gamma \cos \psi -$$

$$- \cos^2 \varphi \sin \psi \sin \Gamma \cos \Gamma) + \sin^2 \delta \sin \psi \sin \Gamma \cos \Gamma +$$

$$+ \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \delta[(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \sin \Gamma \cos \psi +$$

$$+ 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi \cos \Gamma \sin \Gamma] + \cos \alpha \sin \delta \cos \delta[(\sin^2 \Gamma -$$

$$-\cos^2 \Gamma) \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Gamma] + \sin \alpha \sin \delta \cos \delta[-(\sin^2 \Gamma) -$$

$$\cos^2 \Gamma) \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \Gamma]\}. \qquad (28)$$

Calculul numeric al expresiilor lui L_z s-a efectuat pe baza unui program alcătuit de autor la calculatorul IBM al Centrului Universitar Bucureşti. Au fost calculaţi L_z pentru Lună şi Soare pe perioada 1962—1974.

Aceste expresii L_z vor fi folosite în ecuaţia (6) pentru calculul variaţiilor relative ale momentelor de inerţie ale Pământului în cazul mişcării perturbate.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Oprescu, *St. Cerc. Astr.*, **18**, 2, 179 (1973).
2. C. Drâmbă, *Anuarul Observatorului din Bucureşti*, 1961.

STUDIUL GENERAL AL CIOCNIRILOR CU AJUTORUL TEORIEI VECTORILOR DUALI*

de NICOLAE PANDREA
Institutul politehnic București.

În prezenta lucrare se face studiul ciocnirilor în cazul general cu ajutorul teoriei vectorilor duali.
Acest lucru face posibil a se demonstra unele proprietăți geometrice-mecanice și a se obține relații noi, care pot fi aplicate la determinarea percuțiilor într-un lanț cinematic.

1. INTRODUCERE

Aplicarea teoriei vectorilor duali în mecanică și în studiul mecanismelor a permis pe de o parte a se prezenta sub formă simplă unele rezultate stabilite pe baza calculului matematic clasic, iar pe de altă parte a făcut posibil a se evidenția proprietăți proiective și relații noi, ajutînd astfel atît la înțelegerea calitativă a fenomenului mecanic, cît și la formularea unor metode de calcul pentru proiectarea de mașini.

Studiul ciocnirilor în cazul general [6] constituie o problemă complexă, iar calculul matematic clasic nu evidențiază proprietăți geometrice și mecanice necesare determinării mișcării unui sistem de corpuri.

În prezenta lucrare se va aplica teoria vectorilor duali la studiul general al ciocnirilor fără frecare, lucru ce va conduce la demonstrarea unor proprietăți geometrice și la obținerea unor noi relații care pot fi aplicate la determinarea percuțiilor într-un lanț cinematic precum și la calculul dinamic al unor mașini la care fenomenul de ciocnire este prezent chiar în regimul permanent de lucru.

2. IMPULSUL DUAL ȘI ENERGIA CINETICĂ PENTRU UN CORP SOLID

Considerăm un corp solid în mișcare de masă m cu centrul de greutate în punctul c. Alegem ca referință sistemul triortogonal $c\,x\,y\,z$ al axelor principale centrale de inerție (fig. 1) față de care J_x, J_y, J_z sînt momentele principale de inerție.

În momentul considerat presupunem că viteza unghiulară a rigidului este $\bar{\omega}$, iar viteza centrului de greutate este $\bar{v}$.

Vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{v}$ definesc un vector dual numit viteză duală a cărui axă (D) este tocmai axa instantanee a mișcării elicoidale.

---

* Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

Dacă $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ și (v_x, v_y, v_z) sînt proiecțiile pe axele de referință ale vectorilor $\bar{\omega}$, $\bar{v}$, atunci viteza dual $\hat{\bar{V}}$ se poate scrie cu ajutorul coordonatelor plückeriene [3], [7] astfel:

$$\hat{\bar{V}} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z). \tag{1}$$

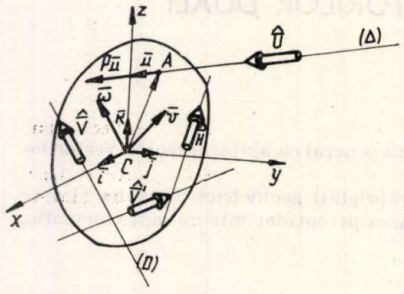


Fig. 1

Impulsul corpului $\bar{H}$ și momentul cinetic față de centrul de greutate $\bar{K}_c$ definesc împreună un alt vector dual $\hat{\bar{H}}$ pe care îl vom numi impuls dual.

Ținînd seama de faptul că impulsul și momentul cinetic au exprimările:

$$\bar{H} = m\bar{v},$$

$$\bar{K}_c = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}, \tag{2}$$

rezultă că impulsul dual în coordonatele plückeriene se va scrie:

$$\hat{\bar{H}} = (mv_x, mv_y, mv_z, J_x \omega_x, J_y \omega_y, J_z \omega_z). \tag{3}$$

Legătura dintre vectorii duali $\hat{\bar{H}}$ și $\hat{\bar{V}}$ se poate scrie în modul direct prin relația

$$\hat{\bar{H}} = [M](\hat{\bar{V}}), \tag{4}$$

unde $[M]$ este o matrice pe care o vom numi matrice de inerție, și are expresia

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ J_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Relația (4) arată că impulsul dual al unui corp solid se poate exprima ca produsul dintre matricea de inerție și viteza dual, rezultînd de aici analogia perfectă cu impulsul unui punct material.

Energia cinetică E a solidului, după cum se știe se exprimă prin relația

$$E = \frac{1}{2}(mv^2 + J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2). \tag{6}$$

Aceasta, ținînd seama de relațiile (2), devine

$$E = \frac{1}{2}(\bar{H}\,\bar{V} + \bar{K}_c \bar{\omega}) \tag{7}$$

și rezultă că energia cinetică se poate exprima cu ajutorul unui produs reciproc dintre vectorii duali $\bar{V}$ și $\hat{\bar{H}}$, adică

$$E = \frac{\hat{\bar{V}} * \hat{\bar{H}}}{2}. \tag{8}$$

3. CIOCNIREA UNUI SOLID LIBER

A. DETERMINAREA VITEZEI DUALE DUPĂ PERCUȚIE

Dacă asupra solidului considerat se aplică o percuție, atunci starea de viteze se modifică, rezultînd o nouă viteză dual ă $\hat{\bar{V}}'$. Considerînd că intensitatea percuției P, sensul și axa (Δ) pe care acționează percuția sînt cunoscute, va trebui să se determine viteza dual ă $\hat{\bar{V}}'$ care caracterizează noua stare de viteze a solidului. Ținînd seama de ipotezele care se fac la ciocniri [7], rezultă că poziția solidului deci și axele de referință imediat după ciocnire rămîn aceleași.

Fie $\bar{u}$ versorul axei (Δ), iar A punctul de aplicație al percuției.

Notînd cu $\bar{H}'$, $\bar{K}_c'$ impulsul, respectiv momentul cinetic după ciocnire, și aplicînd teoremele generale [7] pentru cazul ciocnirilor, rezultă

$$\begin{aligned} \bar{H}' - \bar{H} &= P\bar{u}, \\ \bar{K}_c' - \bar{K}_c &= P\,(\overline{CA} \times \bar{u}). \end{aligned} \tag{9}$$

Observînd că vectorii $\bar{u}$, $\overline{CA} \times \bar{u}$ definesc vectorul dual unitar, care are axa (Δ), rezultă că din relațiile (9) se obține:

$$\hat{\bar{H}}' - \hat{\bar{H}} = P\hat{\bar{U}}, \tag{10}$$

unde $\hat{\bar{H}}'$ este impulsul dual după ciocnire și este definit de vectorii $\bar{H}'$, $\bar{K}_c'$.

Relația (10), ținînd seama de (4), devine

$$M(\hat{\bar{V}}' - \hat{\bar{V}}) = P\hat{\bar{U}} \tag{11}$$

și deci viteza dual ă $\hat{\bar{V}}'$ va fi

$$\hat{\bar{V}}' = \hat{\bar{V}} + P\,[M]^{-1}(\hat{\bar{U}}). \tag{12}$$

În relaţia (12) $[M]^{-1}$ este inversa motricei $[M]$, adică

$$[M]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_x} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dacă mai notăm

$$\hat{\dot{Q}} = [M]^{-1}(\hat{\bar{U}}), \tag{14}$$

expresia (12) devine

$$\hat{\bar{V}}' = \hat{\bar{V}} + P\hat{\dot{Q}}. \tag{15}$$

Rezultă că viteza dual după ciocnire are două componente, una fiind viteza dual $\hat{\bar{V}}$ înainte de ciocnire, iar cea de-a doua $P\hat{\dot{Q}}$, care este variaţia de viteză dual datorită acţionării percuţiei. Acest vector dual îl vom numi „viteza dual de răspuns".

B. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE MIŞCĂRII DUPĂ CIOCNIRE

Vectorul dual $\hat{\dot{Q}}$, după cum rezultă din relaţia (14), este determinat de caracteristicile masice ale corpului precum şi de poziţia şi direcţia percuţiei.

În ipoteza în care mişcarea înainte de ciocnire precum şi dreapta suport a percuţiei sînt date, vectorii duali $\hat{\bar{V}}$, $\hat{\dot{Q}}$ sînt cunoscuţi, iar expresia (15) arată că mişcarea finală rezultă ca o combinaţie liniară a acestora.

Ca urmare [2], axa vectorului dual $\hat{\bar{V}}'$ va intersecta ortogonal perpendiculara comună a axelor vectorilor duali $\hat{\bar{V}}$, $\hat{\dot{Q}}$, descriind cilindroidul Ball.

Din proprietăţile mulţimii liniare de vectori duali (şuruburi) [2] mai rezultă că în general pasul vectorului dual $\hat{V}'$ va fi mărginit de două valori p_{min}, p_{max} existînd şi două direcţii pentru care acesta este nul.

De aici rezultă că pentru un solid cu o mişcare generală se poate determina o valoare a percuţiei astfel încît după ciocnire rigidul să aibă o distribuţie de viteze specifică rotaţiei. De asemenea, pasul mişcării fiind mărginit rezultă imposibilitatea obţinerii mişcării de translaţie în general după aplicarea unei percuţii.

Proprietăţile arătate mai sus sînt deduse pentru cazul în care vectorul dual $\hat{\bar{Q}}$ are axa situată la distanţă finită.

Dacă vectorul dual $\hat{\bar{Q}}$ nu este situat la distanţă finită, atunci după percuţie va rezulta o mişcare astfel încît axele mişcărilor instantanee elicoidale înainte şi după percuţie sînt paralele.

Fie (a, b, c) (d, e, f) proiecţiile vectorilor $\bar{u}$, $\overline{CA} \times \bar{u}$ pe axele de coordonate (fig. 1).

Cu aceste notaţii, vectorul dual unitar $\hat{\bar{U}}$ se exprimă în coordonate plückeriene prin relaţia

$$\hat{\bar{U}} = (a, b, c, d, e, f), \tag{16}$$

unde

$$ad + be + cf = 0 \tag{17}$$

şi rezultă din (14) expresia vectorului dual $\hat{\bar{Q}}$,

$$\hat{\bar{Q}} = \left(\frac{d}{J_x}, \frac{e}{J_y}, \frac{f}{J_z}, \frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}\right). \tag{18}$$

Dacă se consideră elipsoidul de inerţie

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 1 = 0, \tag{19}$$

rezultă că direcţiile vectorilor duali $\hat{\bar{U}}$ şi $\hat{\bar{Q}}$ sînt conjugate [8] faţă de acesta, adică direcţia axei vitezei duale de răspuns este conjugată direcţiei percuţiei faţă de elipsoidul de inerţie al corpului.

C. PROPRIETĂŢI GEOMETRICE ALE VITEZEI DUALE DE RĂSPUNS

a) *Cazurile directe.*

Pentru determinarea vitezei duale de răspuns $P\hat{\bar{Q}}$ se determină mai întîi vectorul dual $\hat{\bar{Q}}$, cu ajutorul relaţiei (14).

Această relaţie se poate privi ca o transformare în spaţiul vectorilor duali.

Astfel, dacă percuția trece prin centrul de greutate, vectorul dual $\hat{\bar{U}}$ are coordonatele plückeriene $(a, b, c, 0, 0, 0)$ și din (17) rezultă

$$\hat{\bar{Q}} = \left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{a}{m},\ \frac{b}{m},\ \frac{c}{m}\right). \tag{20}$$

Se obține astfel un vector dual cu axa situată la infinit și deci viteza dual de răspuns este o componentă de translație.

Judecînd în același mod se obțin rezultatele din tabelul 1.

b) *Viteza dual de răspuns este o rotație.*

În cazul general în care viteza dual de răspuns este o rotație, rezultă că vectorul dual $\hat{\bar{Q}}$ are pasul nul, adică

$$\frac{da}{J_x m} + \frac{eb}{J_y m} + \frac{fc}{J_z m} = 0, \tag{21}$$

ceea ce înseamnă că vectorii duali $\hat{\bar{U}}$, $\hat{\bar{O}}$ au axele perpendiculare.

Din relațiile (17) și (21) pentru situația menționată, rezultă

$$\frac{da}{J_y - J_z} = \frac{eb}{J_z - J_x} = \frac{fc}{J_x - J_y} = \lambda, \tag{22}$$

Tabelul 1

Percuția	Viteza dual de răspuns	
	axa	felul mișcării instantanee
Trece prin centrul de greutate	la infinit	translație
Situată într-un plan central principal	perpendiculară pe acel plan	rotație
Intersectează ortogonal o axă principală centrală de inerție	intersectează ortogonal acea axă	mișcare generală
Paralelă cu o axă principală centrală de inerție	perpendiculară pe acea axă	rotație
Intersectează o axă principală centrală de inerție	perpendiculară pe acea axă	mișcare generală

unde λ este un parametru arbitrar.

Relațiile (22) arată că în acest caz axa vectorului dual unitar $\hat{\bar{U}}$ nu mai poate ocupa orice poziție în spațiu.

Într-adevăr, considerînd vectorul dual de direcţie (a, b, c) care trece prin punctul $B(x_0, y_0, z_0)$, rezultă

$$J_0c - z_0b = \frac{(J_y - J_z)J_x}{a},$$

$$z_0a - x_0c = \frac{(J_z - J_x)J_y}{b}, \tag{23}$$

$$x_0b - y_0a = \frac{(J_x - J_y)J_z}{c}$$

şi sumînd relaţiile (23) înmulţite respectiv cu x_0, y_0, z_0, se obţine :

$$J_x(J_y - J_z)\frac{x_0}{a} + J_y(J_z - J_x)\frac{y_0}{b} + J_z(J_x - J_y)\frac{z_0}{c} = 0. \tag{24}$$

Relaţia (24) reprezintă ecuaţia unui plan care trece prin centrul de greutate şi este paralel cu direcţia dată, ceea ce arată că axele vectorului dual unitar $\hat{U}$ se găsesc în planul (24) şi evident axele vitezei duale de răspuns vor fi perpendiculare pe acest plan.

În concluzie, pentru ca viteza dual㠠de răspuns să constituie o rotaţie, trebuie ca percuţia de direcţie dată să se aplice într-un plan bine determinat şi atunci rotaţia rezultată va fi perpendiculară pe acel plan.

D. VITEZA DUALĂ DE RĂSPUNS ARE AXA DATĂ ŞI PASUL DAT

Fie p pasul impus, şi

$$\hat{D} = (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1) \tag{25}$$

vectorul dual unitar ataşat dreptei (D) date, unde

$$a_1d_1 + b_1e_1 + c_1f_1 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1. \tag{26}$$

Vectorul dual $\hat{Q}$ avînd aceeaşi axă cu $\hat{D}$, rezultă

$$\mu\frac{d}{J_x} = a_1; \quad \frac{a}{m} = d_1 + pa_1,$$

$$\mu\frac{e}{J_y} = b_1; \quad \frac{b}{m} = e_1 + pb_1, \tag{26'}$$

$$\mu\frac{f}{J_z} = c_1; \quad \frac{c}{m} = f_1 + pc_1,$$

unde μ este un parametru arbitrar.

Din (26) rezultă

$$d = \frac{1}{\mu} a_1 J_x, \qquad a = \frac{m}{\mu}(d_1 + p\, a_1),$$

$$e = \frac{1}{\mu} b_1 J_y, \qquad b = \frac{m}{\mu}(e_1 + p\, b_1), \tag{27}$$

$$f = \frac{1}{\mu} c_1 J_z, \qquad c = \frac{m}{\mu}(f_1 + p\, c_1)$$

şi ţinînd seama de (17) se obţine

$$J_x a_1 d_1 + J_y b_1 e_1 + J_z c_1 f_1 + p(J_x a_1^2 + J_y b_1^2 + J_z c_1^2) = 0. \tag{28}$$

Ducînd din punctul C perpendiculare CB pe axa (D), se poate forma sistemul triortogonal de referinţă $B\,x'y'z'$ (fig. 2) şi ţinînd seama de relaţiile (27), avem

$$CB = \xi = \sqrt{d_1^2 + e_1^2 + f_1^2}. \tag{29}$$

Cu aceste notaţii relaţia (28) devine

$$\xi J_{y'z'} + p\, J_{z'} = p\, \xi^2 m, \tag{30}$$

unde $J_{y'z'}$, $J_{z'}$ [7] sînt momentele de inerţie faţă de axele $B'Z'$, $B'y'$ respectiv faţă de axa Bz'.

Se desprinde de aici ideea că problema este posibilă numai în situaţia în care relaţia (30) este îndeplinită, adică axa vitezei duale de răspuns este axa principală de inerţie faţă de un anumit punct situat pe aceasta.

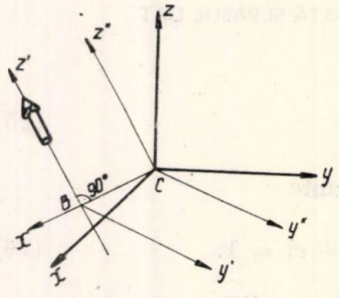


Fig. 2

În această situaţie, percuţia va trebui să fie situată pe dreapta ale cărei coordonate plückeriene sînt date de relaţiile (27).

În cazul particular în care $p = 0$, se obţine condiţia $J_{y'z'} = 0$, iar din relaţiile (27) se deduce poziţia percuţiei şi faptul că aceasta este perpendiculară pe planul determinat de centrul de greutate şi axa (D).

d) *Axa vitezei duale de răspuns trece printr-un punct dat.*

Scriind condiţiile ca axa vitezei duale de răspuns să treacă prin punctul dat $B\ (x_0, y_0, z_0)$, rezultă

$$p = \frac{\dfrac{a}{m} - J_0 \dfrac{f}{J_z} + z_0 \dfrac{e}{J_y}}{\dfrac{d}{J_x}} = \frac{\dfrac{b}{m} - z_0 \dfrac{d}{J_x} + x_0 \dfrac{f}{J_z}}{\dfrac{e}{J_y}} = \frac{\dfrac{c}{m} - x_0 \dfrac{e}{J_y} + y_0 \dfrac{d}{J_x}}{\dfrac{f}{J_z}}, \tag{31}$$

unde p este pasul vectorxlui dual $\hat{\hat{Q}}$.

Adăugînd la sistemul (31) relaţia

$$ad + be + cf = 0, \tag{32}$$

şi eliminînd d, e, f, se obţine ecuaţia

$$p^2(J_x a^2 + J_y b^2 + J_z c^2) - pJ_x a(cy_0 - bz_0) + J_y b(az_0 - cx_0) + \\ + J_z c(bx_0 - ay_0) + (ax_0 + by_0 + cz_0)(J_x a x_0 + J_y b\, y_0 + J_z cz)_0 = 0. \tag{33}$$

Rezultă că în ipoteza în care se alege direcţia, din ecuaţia (33) se calculează pasul p, iar apoi din sistemul (31) rezultă necunoscutele d, e, f, adică se determină poziţia percuţiei.

Dacă se impune condiţia ca pasul să fie nul, rezultă relaţiile

$$\frac{a}{m} - y_0 \frac{f}{J_z} + z_0 \frac{e}{J_y} = 0,$$

$$\frac{b}{m} - z_0 \frac{d}{J_x} + x_0 \frac{f}{J_z} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{c}{m} - x_0 \frac{c}{J_y} + y_0 \frac{d}{J_x} = 0,$$

din care se obţine

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = 0. \tag{35}$$

Aceasta înseamnă că direcţia percuţiei este perpendiculară pe dreapta care trece prin punctul dat şi centrul de greutate.

Din relaţiile (32) şi (34) se obţin

$$\frac{d}{J_x} = \frac{bc(J_z - J_y)}{m\eta}; \quad \frac{e}{J_y} = \frac{ac(J_x - J_z)}{m\eta}; \quad \frac{f}{J_z} = \frac{ab(J_y - J_x)}{m\eta}, \tag{36}$$

unde

$$\eta = J_x x_0 a + J_y y_0 b + J_z z_0 c. \tag{37}$$

În sfîrşit, dacă din (32) şi (34) se elimină a, b, c, se determină relaţia

$$x_0 \frac{e}{J_y} \frac{f}{J_z}(J_y - J_z) + y_0 \frac{f}{J_z} \frac{d}{J_y}(J_z - J_x) + z_0 \frac{d}{J_x} \frac{e}{J_y}(J_x - J_y) = 0, \tag{38}$$

care arată că atunci cînd percuţia acţionează în planul (35) axa vitezei duale răspuns se găseşte pe conul (38) cu vîrful în punctul dat.

E. CENTRUL PERCUȚIILOR

Centrul percuțiilor se definește la studierea ciocnirii solidului cu axă fixă (deci la solidul cu legături) ca fiind punctul în care aplicînd o percuție, percuțiile de legătură sînt nule.

Dacă percuțiile de legătură sînt nule, înseamnă că se poate determina centrul percuțiilor, studiind ciocnirea solidului liber și impunînd condiții corespunzătoare de mișcare a solidului după ciocnire.

În cazul solidului cu axă fixă rezultă că se poate obține centrul percuțiilor impunînd condiția ca după ciocnire viteza dual să aibă pasul nul și aceeași axă cu viteza dual înainte de ciocnire.

Rezultă deci că vectorii duali $\hat{\bar{V}}'$ și $\hat{\bar{V}}$ sînt liniar dependenți, adică

$$\hat{\bar{V}}' = \lambda \hat{\bar{V}}, \tag{39}$$

unde λ este un parametru real.

Ținînd seama de relația (15), rezultă

$$(\lambda - 1)\,\hat{\bar{V}} = P\hat{\bar{Q}}, \tag{40}$$

adică vectorul dual $\hat{\bar{Q}}$ trebuie să aibă pasul nul și aceeași axă cu vectorul dual $\hat{\bar{V}}$.

Se aplică deci cele stabilite anterior și rezultă că percuția trebuie să fie perpendiculară pe planul format de centrul de greutate și axa de rotație iar momentul de inerție centrifugal față de axele parale cu axa de rotație și cu percuția, duse prin centrul de greutate, să fie nul.

Din relațiile (27), făcînd $p = 0$, rezultă apoi coordonatele plückeriene ale axei percuției.

În cazul solidului cu punct fix la care se cere ca viteza dual finală să aibă o anumită axă, rezultă că axele vitezelor duale inițiale și finale determină un plan care taie conul (37) după axa vitezei duale de răspuns. Folosind apoi relațiile (34) (35) se deduce poziția percuției.

4. CIOCNIREA A DOUĂ CORPURI SOLIDE

A. COEFICIENTUL DE RESTITUIRE

Să considerăm acum cazul ciocnirii fără frecare a două corpuri solide. Prin analogie cu ciocnirea a două bile [7] se va considera că și aici se poate distinge faza în care corpurile se comprimă sub influența unei percuții P_c astfel încît la sfîrșitul acestei faze componentele normale ale vitezelor punctelor de contact sînt egale, precum și faza de destindere pe durata căreia acționează percuția P_d. Direcția percuțiilor este tot timpul aceeași și anume direcția normalei comune la contururile celor două corpuri în punctul de contact (fig. 3).

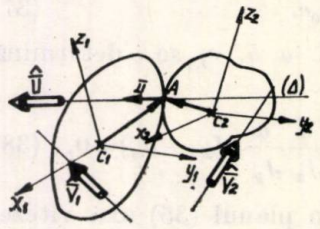


Fig. 3

Vom considera ca sisteme de referință triedrele $c_1x_1y_1z_1$, $c_2x_2y_2z_2$ formate, respectiv, de axele principale centrale de inerție.

Faţă de aceste axe momentele de inerţie vor fi $J_{x_1}J_{y_1}J_{z_1}$ pentru primul corp, respectiv $J_{x_2}J_{y_2}J_{z_2}$ pentru cel de-al doilea corp.

Ţinînd seama de faptul că vitezele duale ale celor două corpuri înainte de ciocnire sînt $\hat{\bar{V}}_1$, $\hat{\bar{V}}_2$, la sfîrşitul fazei de comprimare sînt $\hat{\bar{S}}_1$, $\hat{\bar{S}}_2$, iar după ciocnire sînt $\hat{\bar{V}}'_1$, $\hat{\bar{V}}'_2$ aplicînd relaţia (15) pentru fiecare corp (fig. 4) şi pentru fiecare fază, rezultă

$$\hat{\bar{S}}_1 = \hat{\bar{V}}_1 + P_c\hat{\bar{Q}}_1, \tag{41}$$

$$\hat{\bar{S}}_2 = \hat{\bar{V}}_2 - P_c\hat{\bar{Q}}_2, \tag{42}$$

$$\hat{\bar{V}}'_1 = \hat{\bar{S}}_1 + P_d\hat{\bar{Q}}_1, \tag{43}$$

$$\hat{\bar{V}}'_2 = \hat{\bar{S}}_2 - P_d\hat{\bar{Q}}_2. \tag{44}$$

În aceste relaţii vectorii duali notaţi cu indicele 1 sînt exprimaţi în sistemul $c_2x_2y_2z_2$.

Fie $\hat{\bar{U}}$ vectorul dual unitar ataşat dreptei (Δ), normala comună a cele două corpuri şi fie $\hat{\bar{U}}_1$, $\hat{\bar{U}}_2$ notaţiile pe care le facem pentru acest vector dual, atunci cînd se exprimă în sistemul $c_1x_1y_1$, z_1 respectiv $c_2x_2y_2z_2$.

După cum se ştie, produsul reciproc dintre vectorul dual unitar al unei drepte şi viteza dual a unui corp reprezintă tocmai proiecţia pe dreaptă a vitezei unui punct situat pe acea dreaptă, şi cum componentele normale ale vitezelor punctelor de contact la sfîrşitul fazei de comprimare sînt egale, rezultă

$$\hat{\bar{S}}_1 * \hat{\bar{U}}_1 = \hat{\bar{S}}_2 * \hat{\bar{U}}_2. \tag{45}$$

Astfel, din relaţiile (41)—(45) obţinem

$$P_c = \frac{\hat{\bar{V}}_2 * \hat{\bar{U}}_2 - \hat{\bar{V}}_1 * \hat{\bar{U}}_1}{\hat{\bar{Q}}_2\hat{\bar{U}}_2 + \hat{\bar{Q}}_1\hat{\bar{U}}_1}, \tag{46}$$

$$P_d = \frac{\hat{\bar{V}}'_1 * \hat{\bar{U}}_1 - \hat{\bar{V}}'_2 * \hat{\bar{U}}_1}{\hat{\bar{Q}}_2 * \hat{\bar{U}}_1 + \hat{\bar{Q}}_1 * \hat{\bar{U}}_1}. \tag{47}$$

Convenind prin analogie cu ciocnirea a două bile că şi în cazul ciocnirii generale să definim coeficientul de restituire prin raportul $\frac{P_d}{P_c}$, din (46) şi (47) se obţine

$$k = \frac{\hat{\bar{V}}'_1 * \hat{\bar{U}}_1 - \hat{\bar{V}}'_2 * \hat{\bar{U}}_2}{\hat{\bar{V}}_2 * \hat{\bar{U}}_2 - \hat{\bar{V}}_1 * \hat{\bar{U}}_1}. \tag{48}$$

Ţinînd seama de faptul că produsul reciproc reprezintă componenta normală a vitezei din punctul de contact, rezultă că relaţia (48) se mai scrie

$$k = \frac{v_1^{n'} - v_2^{n'}}{v_1^n - v_1^n}, \tag{49}$$

unde
v_1^n, $v_1^{n'}$, v_2^n, $v_2^{n'}$ sînt componentele normale ale vitezelor punctului aparţinînd corpului 1, respectiv 2, înainte şi după ciocnire.

B. DETERMINAREA VITEZELOR DUALE DUPĂ CIOCNIRE

Dacă percuţia totală din timpul ciocnirii are valoarea P, aplicînd relaţia (15) pentru fiecare corp (fig. 4), rezultă

$$\hat{\bar{V}}_1' = \hat{\bar{V}}_1 + P\hat{\bar{Q}}_1, \tag{50}$$

$$\hat{\bar{V}}_2' = \hat{\bar{V}}_2 - P\hat{\bar{Q}}_2. \tag{51}$$

Ţinînd seama de (50) şi (51), din relaţia (48) rezultă

$$P = (1 + k)\frac{\hat{\bar{V}}_2\hat{\bar{U}}_1 - \hat{\bar{V}}_1\hat{\bar{U}}_1}{\hat{\bar{Q}}_1\hat{\bar{U}}_1 + \hat{\bar{Q}}_2\hat{\bar{U}}_2}. \tag{52}$$

Înlocuind valoarea percuţiei P în relaţiile (50) şi (51), se obţin vitezele duale după ciocnire:

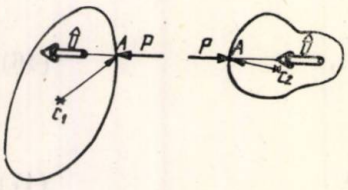


Fig. 4

$$\hat{\bar{V}}_1' = \hat{\bar{V}}_1 + (1 + k)\frac{\hat{\bar{V}}_2 * \hat{\bar{U}}_2 - \hat{\bar{V}}_1 * \hat{\bar{U}}_1}{\hat{\bar{Q}}_1 * \hat{\bar{U}}_2 + \hat{\bar{Q}}_2 * \hat{\bar{U}}_1}\hat{\bar{Q}}_1, \tag{53}$$

$$\hat{\bar{V}}_2' = \hat{\bar{V}}_2 + (1 + k)\frac{\hat{\bar{V}}_1 * \hat{\bar{U}}_2 - \hat{\bar{V}}_2 * \hat{\bar{U}}_1}{\hat{\bar{Q}}_1 * \hat{\bar{U}}_2 + \hat{\bar{Q}}_2 * \hat{\bar{U}}_1}\hat{\bar{Q}}_2. \tag{54}$$

C. PIERDEREA DE ENERGIE CINETICĂ PRIN CIOCNIRE

Pierderea de energie cinetică ΔE, ţinînd seama de relaţia (8) se scrie

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\hat{\bar{H}}_1 * \hat{\bar{V}}_1 + \hat{\bar{H}}_2 * \hat{\bar{V}}_2 - \hat{\bar{H}}_1' * \hat{\bar{V}}_1' - \hat{\bar{H}}_2' * \hat{\bar{V}}_2'). \tag{55}$$

Ţinînd în continuare seama de relaţiile (10), (50) şi (51) şi observînd că

$$\hat{\bar{U}}_1 * \hat{\bar{V}}_1 = \hat{\bar{Q}}_1 * \hat{\bar{H}}_1; \quad \hat{\bar{U}}_2 * \hat{\bar{V}}_2 = \hat{\bar{Q}}_2 * \hat{\bar{H}}_2, \tag{56}$$

avem

$$\Delta E = \frac{P}{2}\left[2\left(\hat{\bar{U}}_2 * \hat{\bar{V}}_2 - \hat{\bar{U}}_1 * \hat{\bar{V}}_1\right) - P\left(\hat{\bar{U}}_1 \hat{\bar{Q}}_1 + \hat{\bar{U}}_2 \hat{\bar{Q}}_2\right)\right] \tag{57}$$

Înlocuind apoi valoarea P din relaţia (51), se obţine

$$E = \frac{(1 - k^2)(\hat{\bar{U}}_2 * \hat{\bar{V}}_2 - \hat{\bar{U}}_1 * \hat{\bar{V}}_1)^2}{2(\hat{\bar{Q}}_1 * \hat{\bar{U}}_1 + \hat{\bar{Q}}_2 * \hat{\bar{U}}_2)}, \tag{58}$$

iar dacă se dezvoltă produsele reciproce, rezultă

$$\Delta E = \frac{(1 - k^2)\,(v_2^n - v_1^n)^2}{2\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{d_1^2}{J_{x_1}} + \dfrac{e_1^2}{J_{y_1}} + \dfrac{f_1^2}{J_{z_1}} + \dfrac{d_2^2}{J_{x_2}} + \dfrac{e_2^2}{J_{y_2}} + \dfrac{f_2^2}{J_{z_2}}\right)}, \tag{59}$$

unde d_1, e_1, f_1 sînt proiecţiile vectorului $\overline{c_1A_1} \times \bar{u}$ pe axele c_1x_1 c_1y_1, c_1z_1, iar d_2, e_2, f_2 sînt proiecţiile vectorului $\overline{C_2A} \times \bar{u}$ pe axele c_2x_2, c_2y_2, c_2z_2.

Se observă că în cazul particular al ciocnirii a două bile vectorii $\overline{C_1A} \times \bar{u}$, $\overline{C_2A} \times \bar{u}$ sînt nuli şi ţinînd seama că în acest caz $v_1^n = v_1$, $v_2^n = v_2$, rezultă formula cunoscută a pierderii de energie cinetică la ciocnire, adică

$$\Delta E = \frac{(1 - k^2)(v_2 - v_1)^2}{2\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)}. \tag{60}$$

BIBLIOGRAFIE

1. F. Dimentberg, *Opredelnie polojenii pronstranstvennih mehanizmov*, Izd. Akademia Nauk Moskva, S.S.S.R., 1950.
2. K. H. Hunt, *Screw Systems in Spatial Kinematics*, Monash Univ., Clayton, Victoria, Australia, 1970.
3. M. L. Keler, *Kinematics and Statics Including Friction in Single-Loop Mechanisms by Screw Calculus and Dual Vetors*, Journal of Engng. Ind., Trans., ASME, Serie B, **95**, 471 — 480, May (1973).
4. N. Pandrea, D. Voiculescu, *Analyse des déplacements finis et des vitesses des rigide par la théorie des vis*, Rev. Roum. Sci Techn. Méc. Appl., **20**, 3, (1975).
5. V. Valcovici, Şt. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Editura tehnică, 1968.
6. R. Voinarovski, *Mecanica teoretică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968
7. R. Voinea, D. Voiculescu, V. Ceauşu, *Mecanica*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.
8. G. Vrânceanu, *Geometrie analitică şi proiectivă*, Editura tehnică, Bucureşti, 1954.
9. A. T. Yang, *Application of Dual-Number Quanternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms*, Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME Serie E **86**, 300—308 June (1964).

STABILIREA REZERVEI OPTIME A UNUI SISTEM CU ELEMENTE ÎN SERIE

C. BUDA şi ŞT. POPESCU
Institutul politehnic Iaşi

Pe baza relaţiilor cunoscute din teoria fiabilităţii, se urmăreşte stabilirea rezervei optime în două variante importante pentru practică :
a) pentru probabilitatea maximă de funcţionare impecabilă, greutatea sistemului împreună cu rezervele, să nu depăşească o anumită valoare ;
b) probabilitatea funcţionării impecabile a sistemului cu greutate minimă, să fie superioară unei anumite valori.
Se dă programul cu care s-a lucrat pe calculatorul numeric, ilustrat în două exemple numerice.

1. PRELIMINARIILE FIABILITĂŢII

Prin fiabilitate se înţelege ansamblul proprietăţilor capabile să precizeze posibilitatea avariei unui sistem în cursul exploatării. Aceste proprietăţi sînt : a) funcţionarea impecabilă, b) durata de serviciu şi c) speranţa de restaurare.

a) Funcţionarea impecabilă reprezintă proprietatea sistemului de a-şi menţine capacitatea de lucru (parametrii determinanţi păstrează valorile scontate) în intervalul de timp considerat.

Nesatisfacerea exigenţelor faţă de un parametru esenţial se numeşte „refuz" ; refuzul conduce la pierderea parţială sau integrală a capacităţii de lucru.

b) Durata de serviciu poate fi caracterizată prin : timp de exploatare, număr de cicluri sau prin volumul lucrului efectuat.

c) Speranţa de restaurare arată capacitatea sistemului de a-şi relua funcţiunile sale după un refuz. După această proprietate sistemele pot fi : nerestaurabile ($\sigma_\rho = 0$) şi restaurabile ($\sigma_0 > 0$).

Obiectivele teoriei fiabilităţii sînt : 1) Stabilirea legilor de apariţie a refuzurilor şi a celor de restaurare a capacităţii de lucru. Asemenea legi, exprimate prin relaţii matematice, stau la baza calculului fiabilităţii ; 2) precizarea procedeelor de mărire a fiabilităţii ; atît la proiectarea şi executarea reperelor, cît şi în cursul exploatării sistemului. Unul dintre procedeele de mărire a fiabilităţii este prevederea unor elemente de rezervă destinate să substituie piesele de bază în caz de refuz ; ele constituie „rezerva" sistemului.

Rezerva permanentă poate intra în funcţiune într-un timp egal cu timpul de pornire a sistemului. Rezerva rece, constituită din piese din

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36. NR. 6, 1977. P. 803—809

afara sistemului, necesită pentru substituire un timp mult mai mare ca timpul de pornire. 3) Determinarea unei fiabilităţi optime din punct de vedere tehnico-economic.

2. STABILIREA REZERVEI OPTIME

Una din problemele frecvente ce trebuie rezolvată, este aceea de a stabili mărimea rezervei sistemului, în anumite condiţii restrictive. O asemenea problemă are două aspecte, după cum urmează.

a). Stabilirea rezervei optime cînd probabilitatea de funcţionare impecabilă este maximă, cu condiţia ca greutatea sistemului, inclusiv rezervele, să nu depăşească o anumită valoare admisibilă.

Probabilitatea funcţionării impecabile a unui sistem considerat fără rezerve se poate calcula cu relaţia*

$$P_s = \prod_{i=1}^{n} (1 - Q_i). \tag{1}$$

În cazul cînd pentru un element de ordin i este prevăzut un număr m de elemente de rezervă, probabilitatea funcţionării impecabile a sistemului cu rezerve va fi

$$P_r = \prod_{i=1}^{n} (1 - Q_i^{m_i}) \qquad (m_i \geqslant 1,\ m_i \in N). \tag{2}$$

Funcţiile restrictive, în cazul de faţă, sînt

$$G_r = \sum_{i=1}^{n} m_i G_i \leqslant G_{ra}. \tag{3}$$

Soluţia problemei constă din a obţine valoarea maximă pentru P_r, cu respectarea condiţiei (3).

Numărul elementelor de ordinul i se stabileşte din relaţia

$$m_i = \frac{\ln a_i - \ln(y_0 + a_i)}{\ln Q_i}, \tag{4}$$

în care y_0 este soluţia ecuaţiei.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln (y + a_i) = G_{ra} + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i, \tag{5}$$

* Pentru a evita repetiţia, notaţiile sînt acelea din paragraful următor, cu programul de calcul.

în care

$$a_i = -\frac{G_i}{\ln Q_i}. \tag{6}$$

În primă aproximaţie, soluţia ecuaţiei (5) este

$$y_0 = \exp\left(\frac{G_{ra} + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right). \tag{7}$$

Valoarea mai precisă a lui y_0 se poate determina prin metode numerice uzuale (metoda tangentei, metoda coardei etc.). Valorile m_i se rotunjesc la $m_i' \in N$.

Valoarea probabilităţii de funcţionare impecabilă a sistemului se va determina cu relaţia (2); ea trebuie să fie apropiată de valoarea maximă a probabilităţii de funcţionare impecabilă teoretică, dată de relaţia

$$P_{r\max} = \frac{y_0^n}{\prod_{i=1}^{n} (y_0 + a_i)}. \tag{8}$$

b). Stabilirea rezervei optime cu condiţia obţinerii unei greutăţi minime a sistemului cînd probabilitatea funcţionării impecabile a sistemului cu rezerve trebuie să fie superioară valorii P_{ra}.

În această situaţie, y_0 este soluţie a ecuaţiei

$$y^n - P_{ra} \prod_{i=1}^{n} (y + a_i) = 0. \tag{9}$$

În primă aproximaţie, soluţia acestei ecuaţii este

$$y_0 = \frac{P_{ra}}{1 - P_{ra}} \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{10}$$

Pentru alcătuirea programului de calcul se pot aplica formulele (2), (4) şi (6).

3. PROGRAM DE CALCUL

Rezolvarea problemelor din a) şi b) a fost realizată la calculatorul numeric „FELIX 256" de la C.T.C. Iaşi.

Programul de calcul se bazează pe schema logică din figura 1, în, care simbolurile prezintă semnificaţia şi transcrierea în limbaj FORTRAN redate mai jos.

Q_i — probabilitatea de defectare a elementelor de ordin i [Q(I), I = 1,2,..., N];

G_i — greutatea elementului de ordin i (prin greutate se poate înţelege şi preţul elementului)

[G(I), I = 1,2,...,N];

n — numărul elementelor sistemului funcţionînd în serie [N];

G_{ra} — greutatea admisibilă a sistemului cu rezerve [GRA]; valoarea ce măsoară precizia cerută calculului [EPS];

k_{az} — constantă întreagă ce discretează problema concretă de soluţionare ($k_{az} = 1$ corespunde problemei din a); $k_{az} = a$ corespunde problemei din b)) [KAZ];

G_r — greutatea efectivă a sistemului cu rezerve [GR];

P_r — probabilitatea efectivă de funcţionare impecabilă a sistemului cu rezerve [PR];

a_i — mărime prezentînd semnificaţia dată de relaţia (6)

[[A(I) I = 1,2,..., N];

y_0 — rădăcina ecuaţiilor (5), (9). [YO];

$P_{r\max}$ — probabilitatea maximă de funcţionare impecabilă, teoretică [PRM];

m_i — numărul elementelor de ordin i cuplate în paralel

[M(I), I = 1,2,...N].

Pentru testarea programului s-au rezolvat două exemple de calcul.

Exemplul 1, pentru $k_{az} = 1$:

Date iniţiale: $n = 5$, $Q = \{0{,}2\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}4\ ;\ 0{,}5\ ;\ 0{,}6\}$,

$$G = \{5,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1\},\quad G_{ra} = 60.$$

Date calculate: $G_r = 51$, $P_{r\max} = 0{,}908$; $P_r = 0{,}883$,

$$y_0 = 158{,}5\ ;\ M = \{2, 3, 4, 4{,}8\}.$$

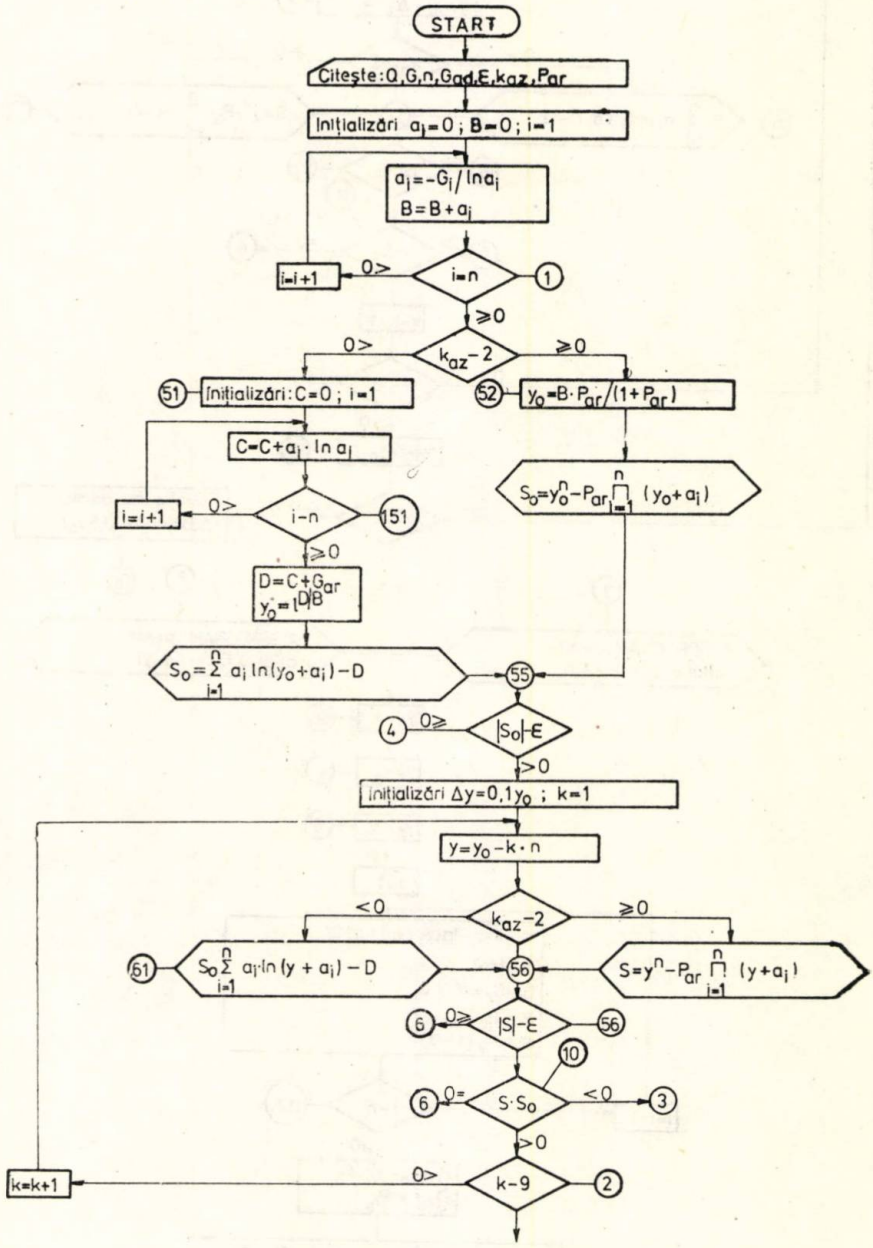

START
Citește: 0, G, n, Gad, E, kaz, Par
Inițializări $a_i = 0$; $B = 0$; $i = 1$
$a_i = -G_i / \ln a_i$
$B = B + a_i$
$i = i + 1$
$i = n$
$k_{az} - 2$
Inițializări: $C = 0$; $i = 1$
$C = C + a_i \cdot \ln a_i$
$i = i + 1$
$i - n$
$D = C + G_{ar}$
$y_o = D/B$
$y_o = B \cdot P_{ar} / (1 + P_{ar})$
$S_o = y_o^n - P_{ar} \prod_{i=1}^{n} (y_o + a_i)$
$S_o = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(y_o + a_i) - D$
$|S_o| - E$
Inițializări $\Delta y = 0{,}1 y_o$; $k = 1$
$y = y_o - k \cdot n$
$k_{az} - 2$
$S_o \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(y + a_i) - D$
$S = y^n - P_{ar} \prod_{i=1}^{n} (y + a_i)$
$|S| - E$
$S \cdot S_o$
$k - 9$
$k = k + 1$

Fig. 1 *a*

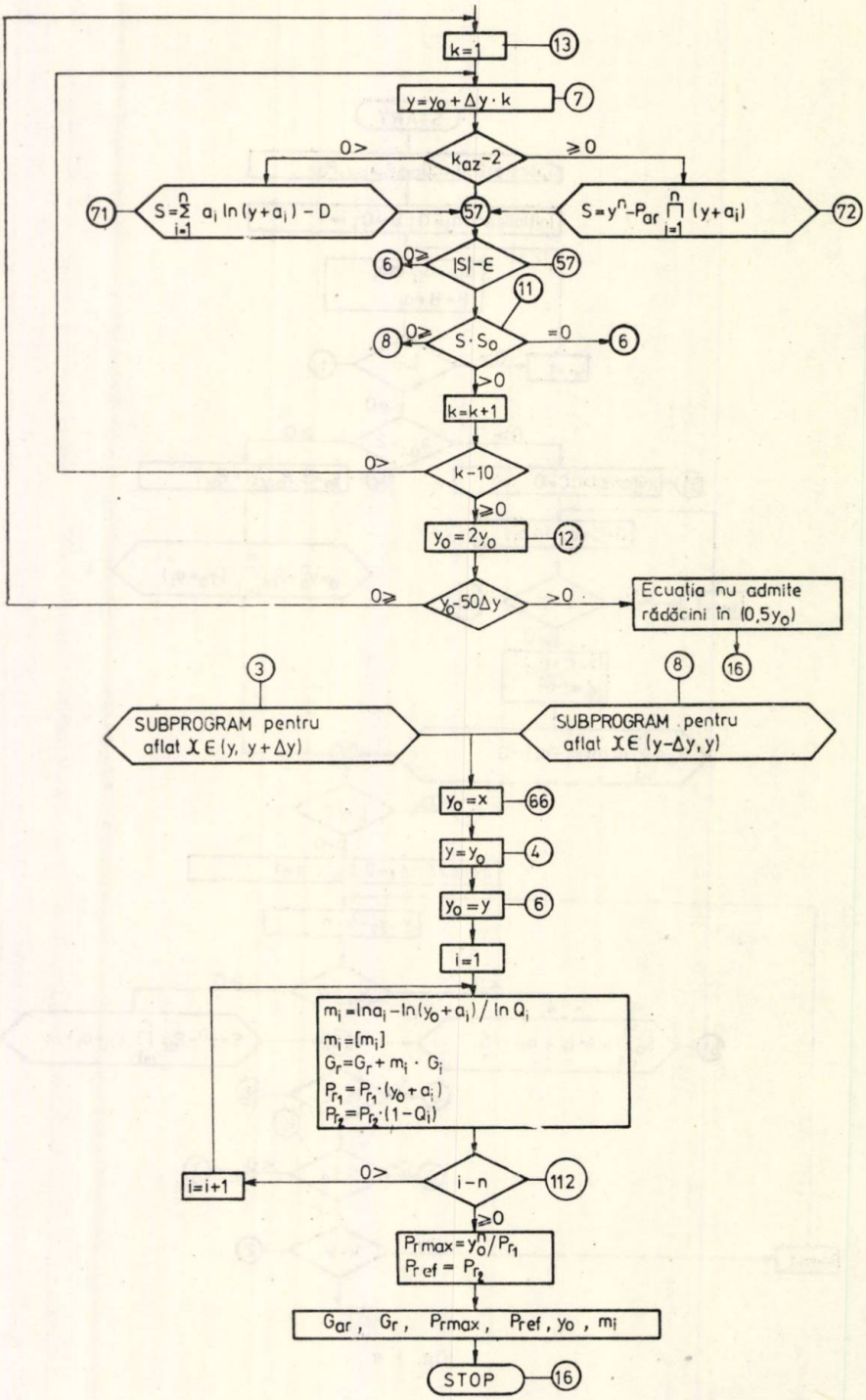

k=1
13
y=y0+Δy·k
7
kaz-2
0>
≥0
S=Σ ai ln(y+ai) - D
71
57
S=y^n-Par Π (y+ai)
72
|S|-E
6
0≥
57
11
S·S0
8
0≥
=0
6
>0
k=k+1
k-10
0>
≥0
y0=2y0
12
y0-50Δy
0≥
>0
Ecuația nu admite rădăcini în (0,5y0)
3
8
16
SUBPROGRAM pentru aflat X∈(y, y+Δy)
SUBPROGRAM pentru aflat X∈(y-Δy, y)
y0=x
66
y=y0
4
y0=y
6
i=1
mi=lnai-ln(y0+ai)/lnQi
mi=[mi]
Gr=Gr+mi·Gi
Pr1=Pr1·(y0+ai)
Pr2=Pr2·(1-Qi)
i=i+1
0>
i-n
112
≥0
Prmax=y0^n/Pr1
Pref=Pr2
Gar, Gr, Prmax, Pref, y0, mi
STOP
16

Fig. 1 *b*

Exemplul 2, pentru $k_{az} = 2$:

Date inițiale : $n = 5$, $Q = \{0{,}5\,;\ 0{,}4\,;\ 0{,}3\,;\ 0{,}2\,;\ 0{,}1\}$,

$G = \{1,2,3,4,5\}$, $P_{ra} = 0{,}999$.

Date calculate : $P_r = 0{,}9991\,;\ G_r = 92\,;\ M = \{13,9,7,5,4\}$.

Primită la redacție la 27 februarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. H. L. Smólițki, P. A. Ciukreev, *K voprosu ob optimalnom rezervivovannie apparaturi*, Energetika i Avtomatika **79**, *4* (1959).
2. B. Kozlov, I. Uşakov, *Spravocinik po rascetu nadejnosti*, Izd. Maşinostroenie, Moskva, 1966.
3. F. Moskowitz, I. B. McLean, *Some reliability aspect of systems design* ; I.R.E. trans. P.G.R.Q.C. *5*, 27 (1962).
4. R. E. Bellman, S. E. Dreyfus, *Programarea dinamică aplicată*, Edit. tehnică, București, 1967.

TRANSFERUL TURBULENT DE CĂLDURĂ ŞI DE MASĂ ÎN CONDUCTE NETEDE

de VALERIU PANAITESCU
Institutul politehnic Bucureşti

Se studiază transferul turbulent de căldură şi de masă în conducte netede pe baza determinării legilor de distribuţie a vitezelor şi temperaturilor prin folosirea principiului superpoziţiei viscozităţii moleculare şi turbulente, a aditivităţii coeficienţilor de transfer molecular şi turbulent şi a concepţiei de substrat-limită laminar cu grosimea diferită pentru cazul hidrodinamic şi pentru cazul transferului de căldură şi de masă. Rezultatele metodei de studiu propuse sînt prezentate sub forma dependenţei numărului Stanton de numărul Prandtl.

1. INTRODUCERE

Studiul transferului de căldură şi de masă şi determinarea cîmpului de temperaturi în interiorul unui fluid în mişcare prezintă aspecte practice deosebit de importante, în special în cazul curgerii turbulente pe lîngă pereţi solizi a căror temperatură este diferită de aceea a fluidului. Rezolvarea teoretică a acestor probleme este dificilă, datorită complexităţii fizice a fenomenelor de transfer. În anumite ipoteze simplificatoare se pot construi teorii semiempirice, obţinîndu-se soluţii în concordanţă cu datele experimentale.

Problema transferului turbulent de căldură şi de masă a fost mult examinată în ultimele trei decenii, rezultatele fiind, în general, prezentate sub forma dependenţei fenomenelor de transfer de numărul lui Prandtl $\mathscr{P} = \nu/\chi$ (ν este coeficientul de viscozitate cinematică şi χ este coeficientul de transfer termic molecular). Astfel, din anul 1947, NACA iniţiază o serie de cercetări experimentale sistematice. Deissler [1] a efectuat o analiză a datelor experimentale pentru un diapazon larg de numere Prandtl, 0,5—3000, şi a construit o teorie semiempirică a transferului turbulent de căldură şi de masă; în domeniul deplin turbulent al curgerii admite un profil logaritmic al vitezelor şi printr-o alegere corespunzătoare a cîtorva constante obţine o bună concordanţă cu măsurătorile experimentale. Totuşi, din această teorie nu rezultă dependenţa generală a transferului de căldură şi de masă în funcţie de numărul $\mathscr{P}$, mai ales pentru numere $\mathscr{P}$ mici. Pentru numere $\mathscr{P}$ mari, transferul de căldură şi de masă este prezentat de Deissler sub forma proporţionalităţii numerelor Nusselt de numărul Prandtl la puterea 1/4.

Problema transferului de căldură şi de masă a fost examinată de Landau şi Levici dintr-un alt punct de vedere. Teoria lor corespunde ideii lui Kapitza despre existenţa în straturile de lîngă pereţi a unor miş-

cări fluide ondulatorii stabile [2], [3]. În esență, teoria este construită pe utilizarea a trei ipoteze: 1) componenta longitudinală a vitezei de pulsație u' variază la fel ca și viteza medie, adică proporțional cu distanța de la perete; 2) frecvența pulsațiilor nu depinde de distanța de la perete; 3) coeficientul de corelație între componenta transversală a vitezei și mărimea transferului nu depinde de distanța de la perete. În aceste ipoteze rezultă dependența dintre grosimea substratului laminar termic d' (distanța de la perete la care începe să apară transferul turbulent de căldură și masă) și grosimea substratului laminar hidrodinamic d (formula lui Levici)

$$d' = cd\mathscr{P}^{-1/4}. \tag{1}$$

Din această relație rezultă direct formula legii transferului termic turbulent pentru numere $\mathscr{P}$ mari, în concordanță cu rezultatele experimentale ale lui Deissler. Pentru numere $\mathscr{P}$ mici și mijlocii formula nu este însă aplicabilă.

2. DETERMINAREA LEGII UNIVERSALE DE DISTRIBUȚIE A VITEZELOR

În cazul curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid se deosebesc trei domenii de curgere și anume substratul laminar, domeniul de tranziție și domeniul deplin turbulent. Se face ipoteza că ecuația de mișcare în apropierea unui perete rigid neted

$$(\mu + \mu')\frac{du}{dy} = \tau_0, \tag{2}$$

în care μ este viscozitatea moleculară, μ' viscozitatea turbulentă și τ_0 tensiunea de frecare la perete, este valabilă pentru toate distanțele de la perete, cu mențiunea că în substratul laminar $\mu \gg \mu'$, în domeniul de tranziție $\mu \cong \mu'$, iar în domeniul turbulenței depline $\mu \ll \mu'$ (admiterea valabilității ecuației (2) în tot cîmpul curgerii de lîngă peretele rigid înseamnă de fapt acceptarea principiului superpoziției efectelor viscozității turbulente). Se propune pentru coeficientul de viscozitate turbulentă o expresie de tipul $\mu' = \rho l u_*$, [4], în care lungimea de amestec, pentru distanțe mai mari decît grosimea d a substratului laminar, este dată de relația $l = \varkappa(y - d)$, unde $\varkappa$ este constanta lui Kármán și $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ viteza de frecare. Rezultă

$$\mu' = \varkappa\rho(y - d)\, u_*, \tag{3}$$

cu precizarea că $\varkappa = 0$ pentru $y < d$ și $\varkappa \neq 0$ pentru $y \geqslant d$. Dacă se introduc mărimile adimensionale $\eta = yu_*/\nu$ și $\delta = du_*/\nu$, ecuația (2) se scrie sub forma adimensională

$$[1 + \varkappa(\eta - \delta)]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{u}{u_*}\right) = 1, \tag{4}$$

în care $\varkappa = 0$ pentru $\eta < \delta$, $\varkappa \neq 0$ pentru $\eta \geqslant \delta$. Se integrează ecuaţia (4) luînd în consideraţie valorile lui $\varkappa$ şi condiţia evidentă a aderenţei la perete, $u = 0$ pentru $\eta = 0$. Constanta de integrare se determină din condiţia trecerii de la profilul luminar la profilul turbulent, $\frac{u}{u_*} = \delta$, pentru $\eta = \delta$. Se obţine următoarea funcţie universală pentru profilul de viteze al mişcării turbulente din apropierea unui perete plan rigid neted

$$\frac{u}{u_*} = \begin{cases} \eta & \text{pentru } 0 \leqslant \eta \leqslant \delta, \\ \frac{1}{\varkappa} \ln [1 + \varkappa(\eta - \delta)] + \delta & \text{pentru } \eta \geqslant \delta. \end{cases} \tag{5}$$

Valorile numerice ale constantelor sînt $\varkappa = 0{,}4$ şi $\delta = 7{,}5$.

Comparearea profilului propus (5) cu datele experimentale ale unui număr mare de cercetători demonstrează o foarte bună concordanţă, [5], [6].

3. DETERMINAREA LEGII DE DISTRIBUŢIE A TEMPERATURILOR

Se consideră un curent fluid în lungul unui perete plan cu viteza $u(y)$. Fluxul de căldură în direcţia perpendiculară peretelui este

$$q = -(k + k') \frac{dT}{dy}, \quad k = \rho c_p \chi, \quad k' = \rho c_p \chi', \tag{6}$$

în care k este coeficientul de conductivitate termică moleculară, k' este coeficientul de conductivitate termică turbulentă, ρ este densitatea fluidului, c_p este căldura specifică la presiune constantă, χ' este coeficientul de transfer termic turbulent, iar $T = T(y)$ este temperatura absolută a fluidului. Conform ipotezei lui Reynolds, $\chi' = \nu'$, unde ν' este coeficientul cinematic de viscozitate turbulentă.

Se propune pentru χ' o expresie analoagă formulei (2),

$$\chi' = \varkappa'(y - d')\, u_*, \tag{7}$$

în care $\varkappa'$ se determină din condiţiile $\varkappa' = 0$ pentru $y < d'$ şi $\varkappa' = \varkappa \neq 0$ pentru $y \geqslant d'$. Integrînd ecuaţia (6) se obţine, pentru distanţele $y \geqslant d'$, formula pentru distribuţia temperaturii

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \frac{1}{\varkappa} \ln [1 + \varkappa(\eta - \delta')\, \mathscr{P}] + \delta' \mathscr{P}, \tag{8}$$

unde $\Theta = 1 - \frac{T}{T_0}$, $T_0 = T(0)$, $\alpha = \frac{q}{\rho c_p T_0 u_*}$, $\delta' = \frac{d' u_*}{\nu}$. Formula (8) este analoagă ca structură cu formula pentru distribuţia vitezelor (5); formulele (5) şi (8) coincid pentru $\mathscr{P} = 1$ şi $d' = d$, ceea ce se confirmă experimental [7], [8].

Admiţînd ipotezele lui Landau şi Levici, prezentate în paragraful 1, se ajunge la concluzia că între grosimea substratului laminar termic d' şi grosimea substratului laminar hidrodinamic d există relaţia (1). Pentru determinarea constantei c se ţine seama de faptul că pentru $\mathscr{P} = 1$, $d = d'$, deci $d' = d\mathscr{P}^{1/4}$ pentru $\mathscr{P} \geqslant 1$. Pentru $\mathscr{P} < 1$ atît tensiunile tangenţiale turbulente, cît şi transferul turbulent de căldură şi de masă sînt neglijabile, şi prin urmare $d' = d$ pentru $\mathscr{P} < 1$. În concluzie, formula lui Levici poate fi generalizată, propunîndu-se expresia

$$d' = \begin{cases} d & \text{pentru } \mathscr{P} < 1, \\ d\mathscr{P}^{-1/4} & \text{pentru } \mathscr{P} \geqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Se subliniază că această formulă este în deplină concordanţă cu măsurătorile termice [1], [8].

Folosind formula (9) se obţine din (8) distribuţia temperaturilor în funcţie de distanţa η de la perete şi numărul Prandtl:

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \frac{1}{\varkappa} \ln[1 + \varkappa(\eta - \delta\mathscr{P}^{-1/4})\,\mathscr{P}] + \delta\mathscr{P}^{3/4}. \tag{10}$$

Compararea profilelor de temperaturi calculate cu formula (10), pentru valorile $\varkappa = 0{,}4$ şi $\delta = 7{,}5$ [5], cu rezultatele experimentale din literatură [1], [8], [9] dovedeşte o bună concordanţă.

4. DETERMINAREA DEPENDENŢEI NUMĂRULUI STANTON DE NUMĂRUL PRANDTL

Problema transferului de căldură prin conductivitate în cazul curgerii turbulente prin conducte netede a fost studiată experimental de un număr mare de cercetători. Astfel, Deissler [1] execută măsurători în domeniul $0{,}5 < \mathscr{P} < 3000$ şi stabileşte legea experimentală a transferului de căldură sub forma dependenţei numerelor Stanton de numărul Prandtl. Numărul Stanton se determină cu formula

$$\mathscr{S} = \frac{q}{\rho c_p u_{\text{med}}(T_0 - T_{\text{med}})} \tag{11}$$

sau, ţinînd seama de notaţiile $\alpha = \dfrac{q}{\rho c_p T_0 u_*}$ şi $\Theta_{\text{med}} = 1 - \dfrac{T_{\text{med}}}{T_0}$,

$$\mathscr{S}^{-1} = \frac{u_{\text{med}}}{u_*} \frac{\Theta_{\text{med}}}{\alpha}. \tag{11'}$$

După cum se ştie, profilul general al vitezei curgerii turbulente în apropierea unui perete plan coincide practic cu profilul vitezei într-o conductă, între perete şi axă (există mici diferenţe în apropierea axei).

Introducînd distanța adimensională $\bar{y} = y/r$, r fiind raza conductei, rezultă din formula (5) pentru distanțe mai mari decît grosimea substratului laminar,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln[1 + \varkappa\eta_0(\bar{y} - \bar{\delta})] + \bar{\delta} + f(\eta), \tag{12}$$

unde $\eta_0 = ru_*/\nu$, $\delta = d/r$ și $f(\eta)$ este un factor de corecție (a cărui mărime este neglijabilă, așa cum rezultă din compararea cu datele experimentale) [10].

Valoarea medie a vitezei u în secțiunea unei conducte este

$$\frac{u_{\text{med}}}{u_*} = \frac{\int_0^1 \frac{u}{u_*}(1-\bar{y})\,d\bar{y}}{\int_0^1 (1-\bar{y})\,d\bar{y}} = 2\int_0^1 \frac{u}{u_*}(1-\bar{y})\,d\bar{y} = \frac{2}{\eta_0^2}\int_0^{\eta_0} \frac{u}{u_*}(\eta_0-\eta)\,d\eta. \tag{13}$$

Reținînd prima formulare adimensională (13), se desface integrala în două părți: de la 0 la $\bar{\delta}$, unde $\varkappa = 0$ și de la $\bar{\delta}$ la 1, unde $\varkappa = \text{const} = 0$ și se deduce, prin integrare, pentru viteza medie $\frac{u_{\text{med}}}{u_*} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\,\beta = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$ expresia

$$\frac{u_{\text{med}}}{u_*} = \frac{1}{\beta}\left(\bar{\delta}^2 - \bar{\delta}^3 + \frac{\bar{\delta}^4}{4}\right) + \frac{\beta^2}{\varkappa^3}\left[a^2\left(\ln a - \frac{3}{2}\right) + 2a - \frac{1}{2}\right] + \delta + \varepsilon, \tag{14}$$

în care $\beta = 1/\eta_0$, $a = [1 + \varkappa(1 - \bar{\delta})]/\beta$, $\bar{\delta} = d/r = \delta\beta$ și ε este corecția legată de factorul $f(\eta)$ care poate fi neglijată [10].

Pentru calculul mărimii Θ_{med} se utilizează o formulă de mediere analoagă formulei (13) de mediere a vitezei în secțiunea conductei,

$$\frac{\Theta_{\text{med}}}{\alpha} = \frac{2}{\eta_0^2}\int_0^{\eta_0} \frac{\Theta}{\alpha}(\eta_0-\eta)\,d\eta. \tag{15}$$

Se ține seama de distribuția temperaturilor dată în formula(10) și, după integrare, rezultă

$$\frac{\Theta_{\text{med}}}{\alpha\mathcal{P}} = \frac{1}{3}\frac{\delta_1^3}{\eta_0^2} - \frac{\delta_1^2}{\eta_0^2} + \delta_1 + \frac{1}{\varkappa_1^3\eta_0^2}\left[\frac{1}{2} + a_1^2\left(\ln a_1 - \frac{1}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2}{\varkappa_1^2\eta_0}\left(1 + \frac{\delta_1}{\eta_0} - \frac{1}{\varkappa_1\eta_0}\right)\cdot[1 + a_1(\ln a_1 - 1)], \tag{16}$$

unde $\varkappa_1 = \varkappa\mathcal{P}$, $\delta_1 = \delta\mathcal{P}^{-1/4}$, $a_1 = 1 + \varkappa_1(\eta_0 - \delta_1)$, [11].

În final, dependența numărului Stanton de numărul Prandtl, pentru o curgere dată (pentru un număr Reynolds dat) este dată de grupul de relații (11'), (14), (16).

Examinarea problemei transferului de masă se face absolut analog, singurele modificări intervenind formal în expresia numărului Stanton,

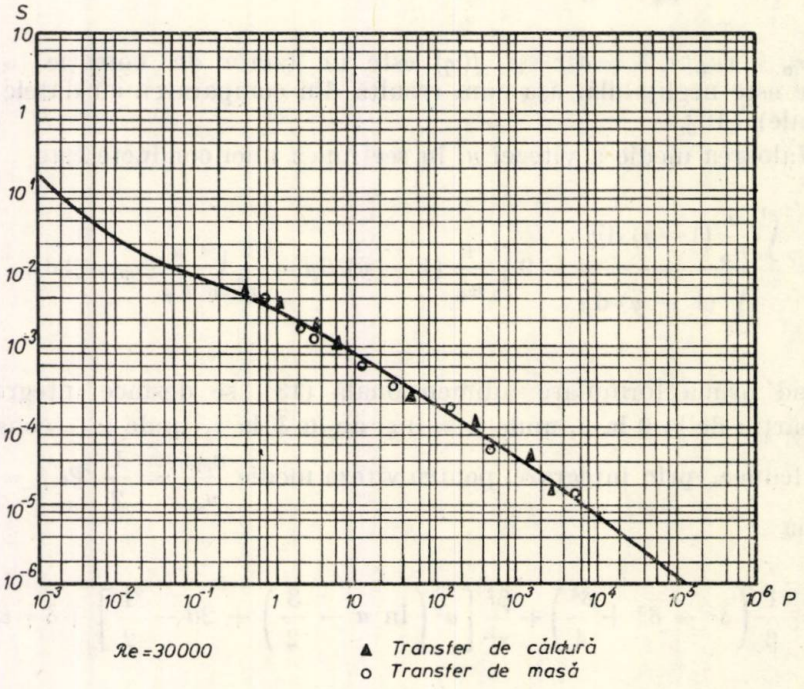


Fig. 1

în care se înlocuiește produsul Tc_p prin concentrația C (q reprezentînd fluxul de masă al substanței examinate) și în expresia numărului Prandtl, în care se înlocuiește χ prin coeficientul de difuzie D.

În figura 1 s-a trasat variația numărului Stanton în funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e = 30\,000$ (cu valorile $\varkappa = 0{,}4$ și $\delta = 7{,}5$, conform [5]). Pe același desen sînt prezentate datele experimentale ale lui Deissler, [1], [12], atît pentru transferul de masă cît și pentru transferul de căldură.

5. CONCLUZII

Pe baza folosirii principiului superpoziției viscozității moleculare și turbulente, a aditivității coeficienților de transfer molecular și turbulent și a concepției de substrat-limită laminar cu grosimea diferită pentru cazul hidrodinamic și pentru cazul transferului de căldură și de masă, se obțin profilul universal de distribuție a vitezelor, legea de distribuție a temperaturilor precum și o descriere a proceselor transferului turbulent de căl-

dură şi de masă în conducte netede sub forma variaţiei numărului Stanton în funcţie de numărul Prandtl. Se constată o bună concordanţă a rezultatelor teoriei semiempirice propuse cu rezultatele experimentale din literatură într-un larg diapazon de numere Prandtl.

Primită în redacţie la 16 decembrie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. R. G. Deissler, *Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes*, NACA Report 1210, 1954.
2. V. G. Levici, *Fizikohimiceskaia ghidromehanika*, Nauka, Moskva, 1962.
3. L. G. Loiţianski, *Poluempiriceskie teorii vzaimodeistvia profesov molekuliarnogo i moliarnogo obmena v turbulentnom dvijenii jidkosti*, Trudî vsesoiuzn. siezda teor. prikl. meh., 1960, Moskva-Leningrad, Izd. ANSSSR, p. 145—166, 1962.
4. V. Panaitescu, *Contribuţii la studiul mişcării fluidelor viscoase în domeniul numerelor Reynolds mici şi mijlocii cu referire la tranziţia de la mişcarea laminară la mişcarea turbulentă*, Teză de doctorat, Bucureşti, 1973.
5. — *Metodă de construire a profilului general al vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid*, St. cerc. mec. apl., **33**, *4*, 679—694 (1974).
6. J. Kestin , P. D. Richardson, *Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers*, Intern. J. Heat Mass Transf., **6**, *2*, 147—189 (1963).
7. M. D. Millionşcikov, *Turbulentnie teceniia v progranicinom sloe i v trubah*, Gosenergoizdat, Moskva-Leningrad, 1960.
8. B. Pinkel, *A summary of NACA research on heat transfer and friction for air flowing through tube with large temperature difference*, Trans. ASME, **76**, *2*, 305—317 (1954).
9. Ko-en Ţai, *Teploobmen v turbulentnom potoke jidkosti pri bolşih znaceniah cisel Prandtlia*, Inj.-fiz. jurn., *4*, *8*, 20.29 (1961).
10. V. Panaitescu, *Sur les lois du mouvement turbulent dans les conduites lisses et rugueuses*. Bul. Inst. polit. Buc., sub tipar (apare în 1977).
11. V. Panaitescu, *Asupra transferului turbulent de căldură şi masă*, A IV-a Conferinţă naţională de mecanică, Bucureşti, 1975.
12. R. G. Deissler, *Heat transfer and friction in flow of liquids*. Turbulent flow and heat transfer (Ed. by C. C. Lin) Princeton, Univ. Press, p. 288—338 (1959).

MUSZAKI 1948 BUDAPEST

CALCULUL HIDRAULIC LA REGIMURI TRANZITORII AL UZINELOR HIDROELECTRICE CONCEPUTE PE SCHEME COMPLEXE

de M. POPESCU, I. JELEV

Institutul de cercetări hidrotehnice

În lucrare se expune o metodă numerică generală pentru calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al sistemelor hidrotehnice complexe prevăzute cu castele de echilibru.
Se analizează următoarele scheme hidrotehnice:
A — sistem paralel de castele de echilibru;
B — sistem hidrotehnic complex cu două lacuri de acumulare și trei castele de echilibru;
C — sistem hidrotehnic complex prevăzut cu *N* castele de echilibru pe galeria de aducțiune;
D — sistem hidrotehnic complex prevăzut cu *N* lacuri de acumulare racordate la un castel de echilibru.
Se prezintă modelul și algoritmul de calcul, precum și rezultatele unor aplicații numerice pentru schemele analizate.

Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice prevăzute cu castele de echilibru are o importanță deosebită atît din punct de vedere teoretic, cît și practic.

Față de metodele clasice analitice sau grafice [2], metodele numerice care s-au dezvoltat în ultima perioadă de timp au mărit posibilitățile de cunoaștere și stăpînire a funcționării hidraulice la regimuri tranzitorii a acestor uzine.

Astfel, metodele numerice mai simple care au apărut în urmă cu două-trei decenii [1] au permis o dezvoltare ulterioară a lor, odată cu apariția și perfecționarea calculatoarelor electronice, prin tratarea ecuațiilor complete ale mișcării cît și prin adoptarea unor ipoteze de calcul mult mai apropiate de situațiile concrete întîlnite în practică [3]—[5].

În scopul folosirii raționale și integrale a potențialului hidraulic al rîurilor dintr-o anumită zonă, în practica de proiectare a uzinelor hidroelectrice moderne s-au adoptat scheme hidrotehnice dintre cele mai complexe, care cuprind în alcătuirea lor mai multe lacuri de acumulare, galerii de aducțiune, castele de echilibru și centrale.

Dar studiul funcționării hidraulice la regimuri tranzitorii a unor astfel de sisteme hidrotehnice, cu ajutorul metodelor analitice sau grafice, s-a dovedit că nu poate să ofere decît rezolvări aproximative.

De aceea, în ultimul timp, în activitatea de proiectare a acestor lucrări s-a introdus pe scară largă folosirea metodelor numerice, cu rezultate practice dintre cele mai bune [7], [8], [9].

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 6, 1977, P. 819—836

În lucrarea de față vom trata problema calculului hidraulic la regimuri tranzitorii a cîtorva scheme hidrotehnice complexe, întîlnite mai des în practica inginerească.

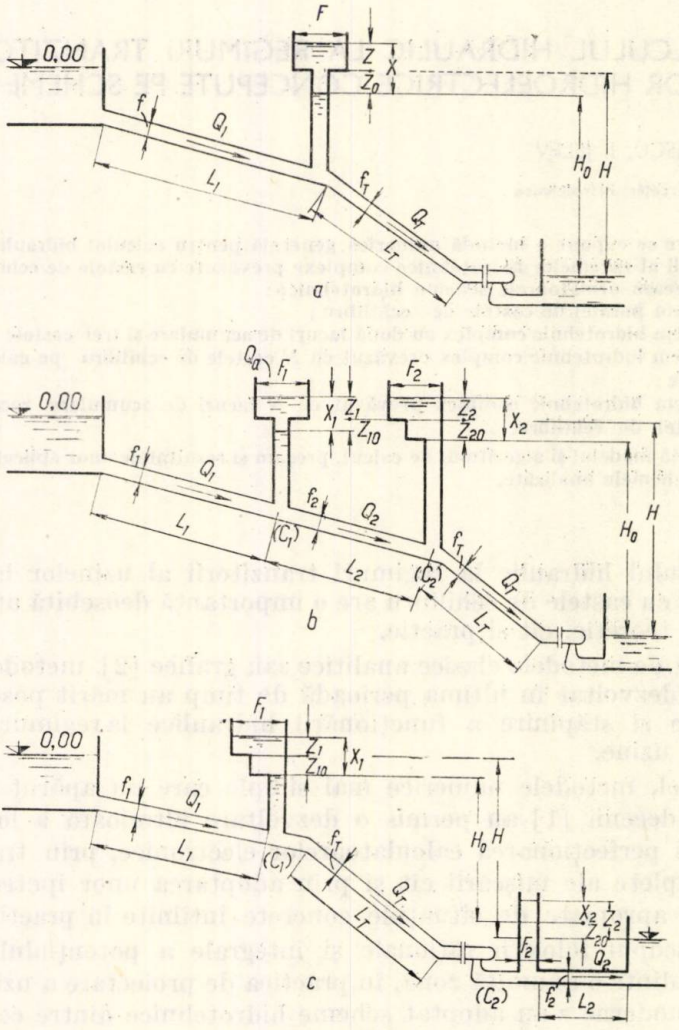


Fig. 1. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu : a) un castel de echilibru, b) două castele de echilibru situate pe galeria de aducțiune, c) două castele de echilibru situate de o parte și de alta a turbinelor.

Vom adopta un mod simplificat de notare a lor, cu literele A, B, C și D.

Vom prezenta o metodă numerică generală pentru calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al acestor scheme hidrotehnice, obținută prin extinderea metodelor noastre anterioare referitoare la uzinele hidroelectrice prevăzute cu unu și două castele de echilibru (fig. 1), [4], și o vom exemplifica pe cîteva cazuri concrete.

1. SCHEMA HIDROTEHNICĂ A

Se acceptă ipoteza funcționării automate a centralelor la putere constantă și în rețele energetice separate (fig. 2).

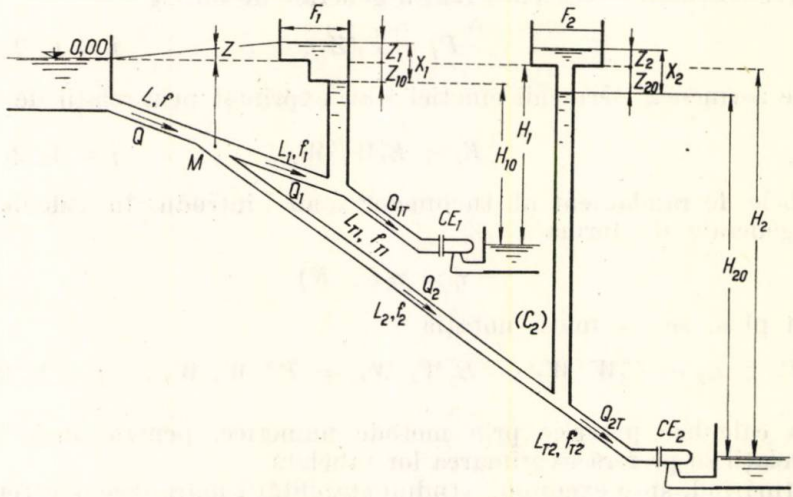


Fig. 2. — Schema hidrotehnică A.

Ecuațiile generale ale mișcării oscilatorii a apei în sistem, cu notațiile obișnuite, sînt următoarele :

$$\frac{L}{g}\frac{dW}{dt} + P + Z = 0,$$

$$\frac{L_1}{g}\frac{dW_1}{dt} + P_1 + E_1 + R_1 = Z - Z_1,$$

$$\frac{L_2}{g}\frac{dW}{dt} + P_2 + E_2 + R_2 = Z - Z_2, \qquad (1)$$

$$fW = f_1 W_1 + f_2 W_2,$$

$$f_1 W_1 = F_1 \frac{dZ_1}{dt} + Q_{T1},$$

$$f_2 W_2 = F_2 \frac{dZ_2}{dt} + Q_{T2},$$

și

$Q_{T1} = Q_{T1}(t)$, $Q_{T2} = Q_{T2}(t)$ — relațiile de debit, pentru calculul oscilațiilor extreme din castele,

$\eta_1 g Q_{T1}(H_1 + Z_1 + R_1 - K_{T1} Q_{T1}^2) = N_{12}$
$\eta_2 g Q_{T2}(H_2 + Z_2 + R_2 - K_{T2} Q_{T2}) = N_{22}$ — relațiile de reglaj, pentru studiul stabilității hidraulice a sistemului,

în care s-au acceptat, pentru pierderile de sarcină longitudinale și locale, relații de forma

$$P = P'W|W|, \quad P_j = P'_jW_j|W_j|, R_j = R'_jV_{sj}|V_{sj}|, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

iar pentru secțiunile castelelor, relații generale de forma

$$F_j = F_j(Z_j), \qquad j = 1, 2. \quad (3)$$

De asemenea, termenii cinetici s-au exprimat prin relații de forma

$$E_j = E'_jW_j|W_j|, \qquad j = 1, 2, \quad (4)$$

iar curbele de randament al turbinelor s-au introdus în calcule prin relații generale de forma

$$\eta = \eta(H, N). \quad (5)$$

În plus, se va folosi notația

$$P_j + E_j = P'_jW|W_j| + E'_jW_j|W_j| = P^*_j \cdot W_j|W_j|, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

În calculele practice prin metode numerice, pentru unele dintre aceste relații se preferă exprimarea lor tabelară.

Urmărind, spre exemplu, studiul stabilității hidraulice a sistemului, pentru rezolvarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale (1), se scriu ecuațiile în diferențe finite și se folosesc valorile medii ale variabilelor pe intervalul de timp Δt.

Eliminînd termenii Q_{T1} și Q_{T2} între ecuațiile sistemului, în urma efectuării calculelor și grupării convenabile a termenilor, sistemul de ecuații (1) ia forma

$$\frac{L}{g}\frac{\Delta W}{\Delta t} + P'\left(W_i + \frac{\Delta W}{2}\right)\left|W_i + \frac{\Delta W}{2}\right| + Z_i + \frac{\Delta Z}{2} = 0,$$

$$\frac{L_1}{g}\frac{\Delta W_1}{\Delta t} + P^*_1\left(W_{1i} + \frac{\Delta W_1}{2}\right)\left|W_{1i} + \frac{\Delta W_1}{2}\right| +$$

$$+ R'_1\left(\frac{F_{1m}}{F_{1s}}\cdot\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)\left|\frac{F_{1m}}{F_{1s}}\cdot\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right| = Z_i + \frac{\Delta Z}{2} - Z_{1i} - \frac{\Delta Z_1}{2}, \quad (7)$$

$$\frac{L_2}{g}\frac{\Delta W_2}{\Delta t} + P^*_2\left(W_{2i} + \frac{\Delta W_2}{2}\right)\left|W_{2i} + \frac{\Delta W_2}{2}\right| +$$

$$+ R'_2\left(\frac{F_{2m}}{F_{2s}}\cdot\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)\left|\frac{F_{2m}}{F_{2s}}\cdot\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right| = Z_i + \frac{\Delta Z}{2} - Z_{2i} - \frac{\Delta Z_2}{2},$$

$$\Delta W = \frac{f_1}{f}\Delta W_1 + \frac{f_2}{f}\Delta W_2,$$

$$(\Delta W_1)^3 + 6\left(W_{1i} - \frac{F_{1m}}{f_1}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)(\Delta W_1)^2 + 4\left\{3\left(W_{1i} - \frac{F_{1m}}{f_1}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{K_{T1}f_1^2}\left[H_1 + Z_{1i} + \frac{\Delta Z_1}{2} + R_1'\left(\frac{F_{1m}}{F_{1s}}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)\middle|\frac{F_{1m}}{F_{1s}}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\middle|\right]\right\}\Delta W_1 +$$

$$+ 8\left\{\left(W_{1i} - \frac{F_{1m}}{f_1}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)^3 + \frac{N_{12}}{\eta_1 g K_{T1} f_1^3} - \frac{1}{K_{T1}f_1^2}\left(W_{1i} - \frac{F_{1m}}{f_1}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(H_1 + Z_{1i} + \frac{\Delta Z_1}{2} + R_1'\left(\frac{F_{1m}}{F_{1s}}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\right)\middle|\frac{F_{1m}}{F_{1s}}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t}\middle|\right]\right\} = 0,$$

$$(\Delta W_2)^3 + 6\left(W_{2i} - \frac{F_{2m}}{f_2}\cdot\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)(\Delta W_2)^2 + 4\left\{3\left(W_{2i} - \frac{F_{2m}}{f_2}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{K_{T2}f_2^2}\left[H_2 + Z_{2i} + \frac{\Delta Z_2}{2} + R_2'\left(\frac{F_{2m}}{F_{2s}}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)\middle|\frac{F_{2m}}{F_{2s}}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\middle|\right]\right\}\Delta W_2 +$$

$$+ 8\left\{\left(W_{2i} - \frac{F_{2m}}{f_2}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)^3 + \frac{N_{22}}{\eta_2 g K_{T2} f_2^3} - \frac{1}{K_{T2}f_2^2}\left(W_{2i} - \frac{F_{2m}}{f_2}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[H_2 + Z_{2i} + \frac{\Delta Z_2}{2} + R_2'\left(\frac{F_{2m}}{F_{2s}}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\right)\middle|\frac{F_{2m}}{F_{2s}}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\middle|\right]\right\} = 0.$$

În prezentarea algoritmului de calcul al metodei propuse se va folosi următoarea scriere simbolică a sistemului de ecuații (7):

$$\begin{aligned}
\Delta W_1 &= \Phi_1(\Delta Z_1),\\
\Delta W_2 &= \Phi_2(\Delta Z_2),\\
\Delta Z_1 &= \Psi_1(\Delta W_1,\ \Delta Z),\\
\Delta Z_2 &= \Psi_2(\Delta W_2,\ \Delta Z),\\
\Delta W &= \Phi_0(\Delta W_1,\ \Delta W_2),\\
\Delta Z &= \Psi_0(\Delta W).
\end{aligned} \tag{8}$$

Algoritmul de calcul este conceput în etape, într-o desfășurare interativă, iar prezentarea lui simplificată apare astfel:

Etapa I

I_A $\quad \Delta Z^p = \Delta_{01},$

I_1 $\quad \Delta Z_1^p = \Delta_{11},\ \Delta Z_2^p = \Delta_{21},\ \Delta W_1 = \Phi_1(\Delta_{11});\ \Delta W_2 = \Phi_2(\Delta_{21}),$

$\Delta Z_1^c = \Psi_1(\Delta W_1,\ \Delta_{01}),\ \Delta Z_2^c = \Psi_2(\Delta W_2,\ \Delta_{01}),$

$|\Delta Z_j^p - \Delta Z_j^c| = |\varepsilon_{j1}| < \varepsilon;\ j = 1,2,$

I_2 $\Delta Z_1^p = \Delta_{12} = 2\Delta_{11}$, $\Delta Z_2^p = \Delta_{22} = 2\Delta_{21}$, $\Delta W_1 = \Phi_1(\Delta_{12})$,

$\Delta W_2 = \Phi_2(\Delta_{22})$, $\Delta Z_1^c = \Psi_1(\Delta W_1, \Delta_{01})$, $\Delta Z_2^c = \Psi_2(\Delta W_2, \Delta_{01})$,

$|\Delta Z_j^p - \Delta Z_j^c| = |\varepsilon_{j2}| < \varepsilon$; $j = 1,2$,

I_3 $$\Delta Z_j^p = \Delta_{j1} + \left(\frac{\Delta_{j2} - \Delta_{j1}}{\varepsilon_{j1} - \varepsilon_{j2}}\right)\varepsilon_{j1} = \Delta_{j3},$$

$\Delta W_1 = \Phi_1(\Delta_{13})$, $\Delta W_2 = \Phi_2(\Delta_{23})$, $\Delta Z_1^c = \Psi_1(\Delta W_1, \Delta_{01})$,

$\Delta Z_c^2 = \Psi_2(\Delta W_2, \Delta_{01})$, $|\Delta Z_j^p - \Delta Z_j^c| = |\varepsilon_{j3}| < \varepsilon$; $j = 1,2$,

I_B $\Delta W = \Phi_0(\Delta W_1, \Delta W_2)$, $\Delta Z^c = \Psi_0(\Delta W)$,

$|\Delta Z^p - \Delta Z^c| = |\varepsilon_{01}| < \varepsilon$.

Etapa a II-a

II_A $\Delta Z^p = 2\Delta_{01} = \Delta_{02}$,

II_1, II_2, II_3 Calculele se conduc după algoritmul de la etapa I, cu $\Delta Z^p = \Delta_{02}$,

II_B $\Delta W = \Phi_0(\Delta W_1, \Delta W_2)$; $\Delta Z^c = \Psi_0(\Delta W)$,

$|\Delta Z^p - \Delta Z^c| = |\varepsilon_{02}| < \varepsilon$.

Etapa a III-a

III_A $$\Delta Z^p = \Delta_{01} + \left(\frac{\Delta_{02} - \Delta_{01}}{\varepsilon_{01} \quad \varepsilon_{02}}\right)\varepsilon_{01} = \Delta_{03},$$

III_1, III_2, III_3 Calculele se conduc după algoritmul de la etapa, I, cu $\Delta Z^p = \Delta_{03}$,

II_B $\Delta W = \Phi_0(\Delta W_1, \Delta W_2)$; $\Delta Z^c = \Psi_0(\Delta W)$,

$|\Delta Z^p - \Delta Z^c| = |\varepsilon_{03}| < \varepsilon$,

unde s-au folosit notaţiile:

ΔZ^p — valoarea propusă pentru ΔZ;

ΔZ^c — valoarea calculată pentru ΔZ;

Δ_{ij} — notaţii prescurtate pentru ΔZ^p.

În procesul de iteraţie, pentru primele propuneri ale lui ΔZ, ΔZ_1 şi ΔZ_2 se iau valorile lor de la pasul de calcul anterior, iar pentru primul pas de calcul se poate lua un set de valori acceptabile, oarecare.

Dacă condiţiile de precizie :

$$|\Delta Z^p - \Delta Z^c| < \varepsilon\,; \quad |\Delta Z_j^p - \Delta Z_j^c| < \varepsilon\,; \qquad j = 1,\ 2 \qquad (9)$$

sînt satisfăcute simultan, calculul se consideră încheiat pentru pasul de timp respectiv şi se trece la pasul de calcul următor.

În caz contrar, calculul se reia de la etapa a III-a, considerînd ca etape I şi II, etapele parcurse II şi III.

Un proces iterativ similar are loc în cadrul fiecărei etape, pe subetapele 1, 2, 3.

Soluţia numerică a problemei s-a dovedit a fi stabilă şi rapid convergentă.

În cazul funcţionării centralelor în acelaşi sistem energetic se folosesc ecuaţiile de reglaj corespunzătoare [4], iar sistemul de ecuaţii ale mişcării se rezolvă într-un mod asemănător.

O rezolvare asemănătoare a sistemului de ecuaţii se face şi în cazul cînd se efectuează calculul oscilaţiilor extreme ale nivelurilor apei din castele, folosindu-se în locul relaţiilor de reglaj, relaţiile de debit.

Metoda poate fi uşor scrisă într-un limbaj algoritmic şi folosită cu ajutorul unui calculator electronic de capacitate medie.

Pentru ilustrarea metodei de calcul propuse, se prezintă o aplicaţie. S-a ales cazul unei uzine hidroelectrice cu următoarele caracteristici principale * :

$$L = 5000 \text{ m}\,; \quad d = 6{,}00 \text{ m}.$$

Centrala 1 :	*Centrala 2* :
$L_1 = 3000$ m ; $d_1 = 5{,}00$ m,	$L_2 = 2000$ m ; $d_2 = 5{,}00$ m,
$L_{T1} = 300$ m ; $d_{T1} = 4{,}00$ m,	$L_{T2} = 150$ m ; $d_{T2} = 4{,}00$ m, (10)
$H_1 = 400$ m ; $N_1 = 180$ MW,	$H_2 = 200$ m ; $N_2 = 100$ MW.

Rezultatele calculelor efectuate au scos în evidenţă complexitatea fenomenului oscilatoriu în sistem, precum şi domeniile de funcţionare hidraulică stabilă sau instabilă a uzinei (fig. 3 şi fig. 4).

Unele rezultate, de felul celor prezentate în figura 5, au permis găsirea situaţiilor favorabile sau defavorabile la pornirea decalată în timp a celor două centrale.

Menţionăm că în tratarea celorlalte scheme hidrotehnice, pe care le vom prezenta în continuare, vom admite aceleaşi ipoteze de calcul ca şi pînă acum.

---

* La efectuarea calculelor din lucrare, a participat V. Cristidis [6].

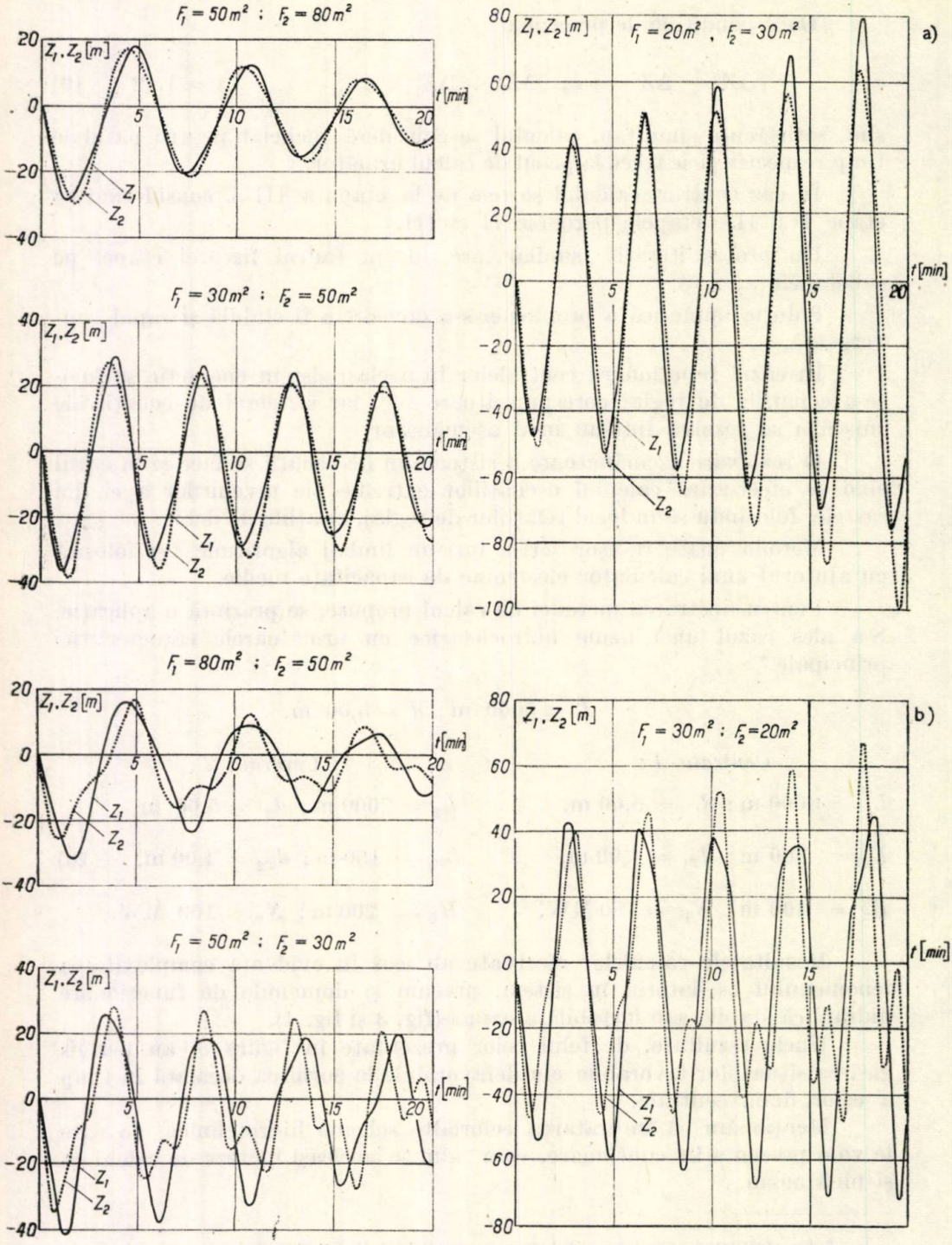


Fig. 3. — Curbe de variaţie a nivelului apei pentru diverse secţiuni ale castelelor de echilibru, a) $R = 0$; b) $R \neq 0$

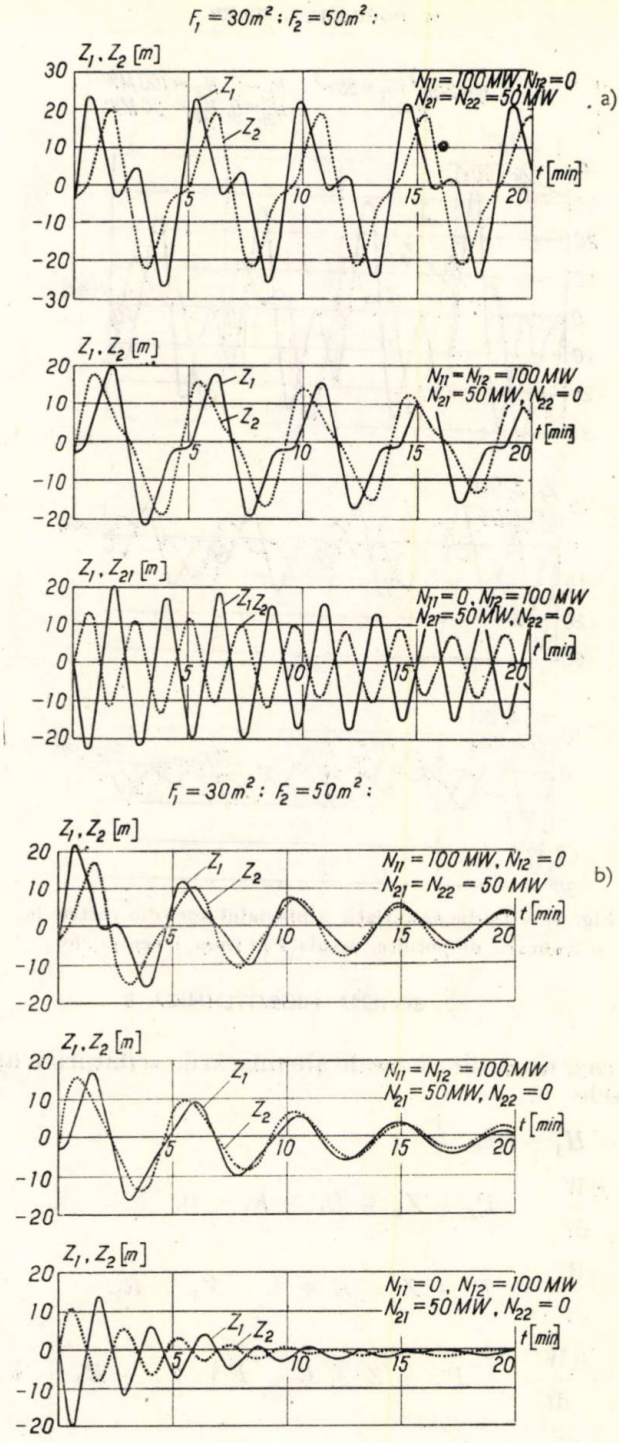


Fig. 4. — Curbe de variație a nivelului apei din castele pentru diverse manevre de putere la centrală a) $R=0$; b) $R \neq 0$.

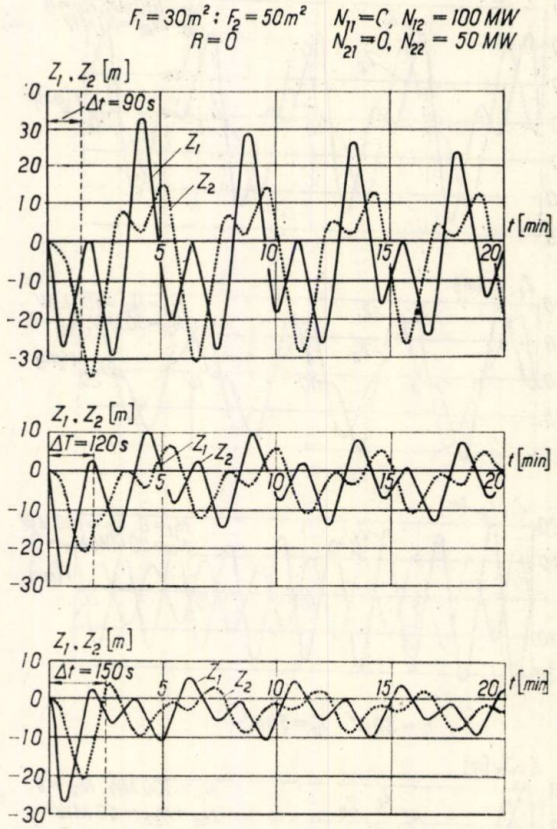


Fig. 5. — Curbe de variație a nivelului apei din castele la o manevră de pornire, decalată în timp, a centralelor.

2. SCHEMA HIDROTEHNICĂ B

În acest caz, ecuațiile generale ale mișcării oscilatorii a apei în sistem, sînt următoarele

$$
\begin{aligned}
&Y = H_1 - H_2,\\
&\frac{L_1}{g}\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t} + P_1 + Z_1 + R_1 + E_1 = 0,\\
&\frac{L'}{g}\frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}t} + P' + Z + R + E = Z_1 + R_1,\\
&\frac{L''}{g}\frac{\mathrm{d}W''}{\mathrm{d}t} + P'' + Z + R + E = Z_2 + R_2 - Y,\\
&\frac{L_2}{g}\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t} + P_2 + Z_2 + R_2 + E_2 = 0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$f_1 W_1 = F_1 \frac{dZ_1}{dt} + f'W',$$

$$f_2 W_2 = F_2 \frac{dZ_2}{dt} + f''W'',$$

$$f'W' + f''W'' = F\frac{dZ_2}{dt} + Q_T,$$

şi

$Q_T = Q_T(t)$ — relaţia de debit, pentru calculul oscilaţiilor extreme din castele,

$\eta g(H_1 + Z + R - K_T Q_T^2)\, Q_T = N_2$ — relaţia de reglaj, pentru studiul stabilităţii hidraulice a sistemului,

iar rezolvarea lor pe cale numerică, se poate face printr-o metodă analogă celei prezentate mai înainte (fig. 6).

În aplicaţia care se prezintă, s-a considerat cazul unei uzine hidroelectrice cu următoarele caracteristici principale :

$$H_1 = H_2 = 275\text{ m}\ (Y = 0);\ N = 100\text{ MW},$$
$$L_1 = 5600\text{ m},\ L' = 2900\text{ m},\ L_2 = 9200\text{ m},\ L'' = 2200\text{ m}, \qquad (12)$$
$$f = 12{,}5\text{ m}^2,\ L_T = 300\text{ m},\ f_T = 9{,}75\text{ m}^2.$$

S-au ales castele de echilibru de secţiune constantă, fără rezistenţe hidraulice la bază.

Prin simularea unor manevre de putere la centrală s-a pus în evidenţă fenomenul general de stabilitate sau instabilitate a mişcării apei în sistem (fig. 7).

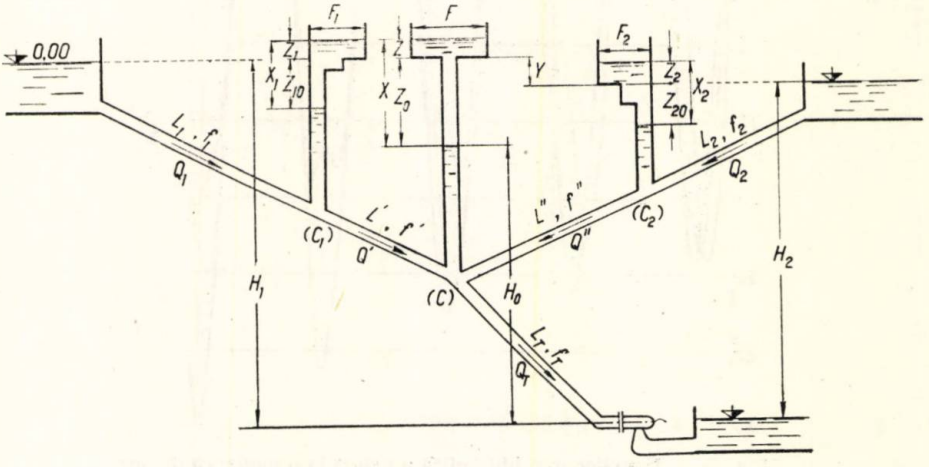


Fig. 6. — Schema hidrotehnică B.

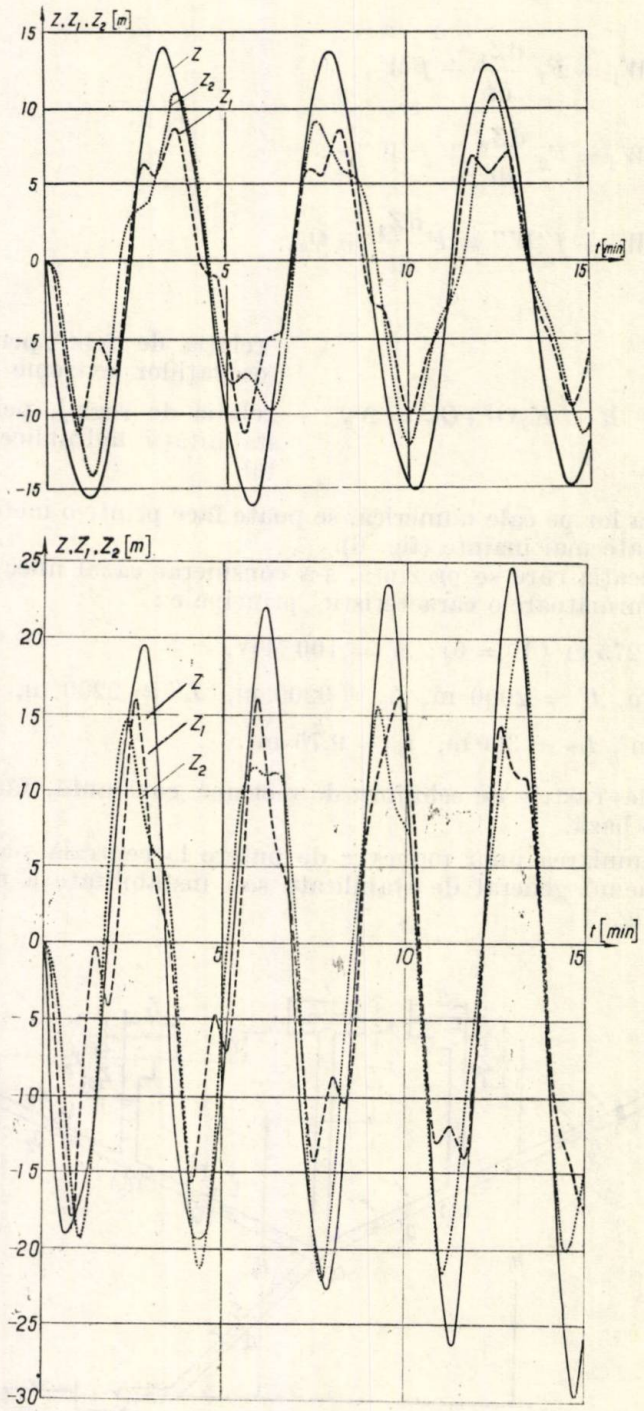


Fig. 7. — Funcţionarea hidraulică a uzinei la o manevră de pornire cu $N_2 = 50$ MW, a) funcţionare stabilă; b) funcţionare instabilă.

Calculele prezentate se referă la variantele cu următoarele caracteristici :

$$\begin{aligned} &\text{I} \qquad F_1 = 7\ \text{m}^2,\ F = 50\ \text{m}^2,\ \ F_2 = 12{,}5\ \text{m}^2, \\ &\text{II} \qquad F_2 = 7\ \text{m}^2,\ F = 28{,}5\ \text{m}^2,\ F_2 = 12{,}5\ \text{m}^2. \end{aligned} \tag{13}$$

3. SCHEMA HIDROTEHNICĂ C

Sistemul de ecuaţii ale mişcării este alcătuit din grupuri de ecuaţii de forma :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + P^*W\,|W|\right)_{i-1,i} + (Z+R)_i = (Z+R)_{i-1}, \\ &(fW)_{i-1,i} = \left(F\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right)_i + (fW)_{i,i+1} - Q_{ai}\,; \quad i = 1,2,\ldots,N, \end{aligned} \tag{14}$$

şi

$Q_T = Q_T(t)$ — relaţia de debit, pentru calculul oscilaţiilor extreme din castele,

$\eta g\, Q_T(H + Z + R - K_T Q_T^2) = N_2$ — relaţia de reglaj, pentru studiul stabilităţii hidraulice a sistemului (fig. 8).

Rezolvarea lui s-a făcut printr-o metodă numerică, care foloseşte în procesul iterativ de calcul un sistem de propuneri şi corecţii independente pe componentele variabilei :

$$Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_N). \tag{15}$$

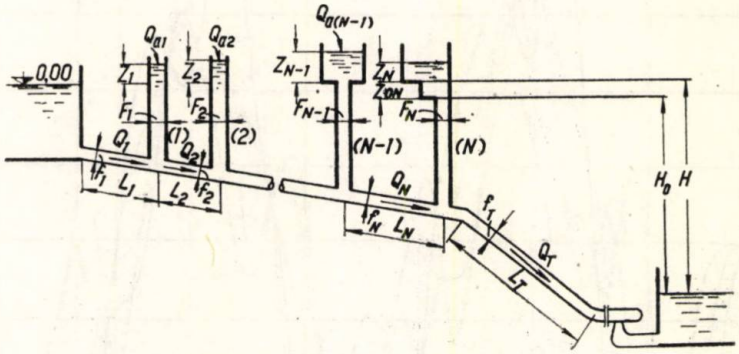


Fig. 8. — Schema hidrotehnică C.

Ca aplicaţie se prezintă cazul unei uzine hidroelectrice cu următoarele caracteristici principale :

$$\begin{aligned} &H = 500\ \text{m},\ N = 240\ \text{MW}, \\ &L_1 = 750\ \text{m},\ L_2 = L_3 = L_4 = 1500\ \text{m},\ L_5 = 500\ \text{m}, \\ &f = 15{,}5\ \text{m}^2,\ L_T = 350\ \text{m},\ f_T = 350\ \text{m}^2, \end{aligned} \tag{16}$$

la care s-a prevăzut un sistem de cinci castele de echilibru de secţiune constantă, fără rezistenţe hidraulice la bază.

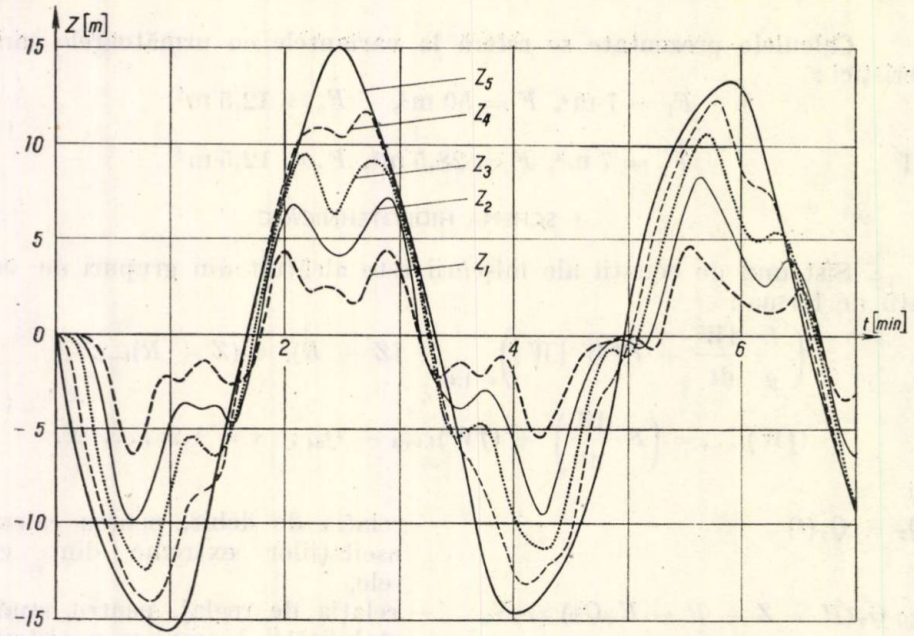

Z [m]
15
10
5
0
- 5
-10
-15
2
4
6
t [min]
Z_5
Z_4
Z_3
Z_2
Z_1

Fig. 9—a)

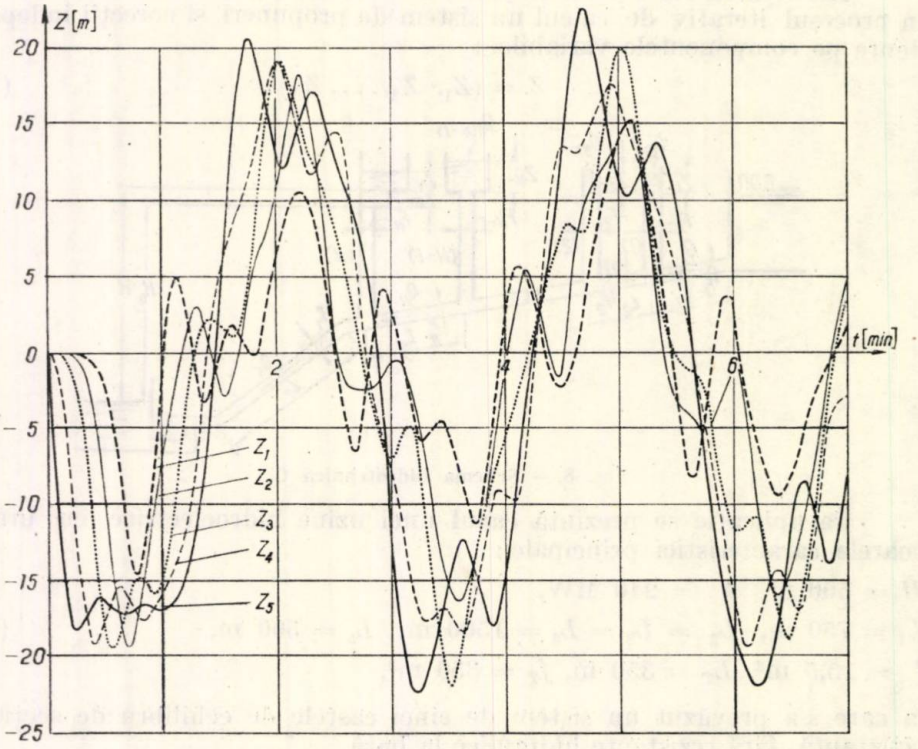

Z [m]
20
15
10
5
0
- 5
-10
-15
-20
-25
2
4
6
t [min]
Z_1
Z_2
Z_3
Z_4
Z_5

Fig. 9—b)

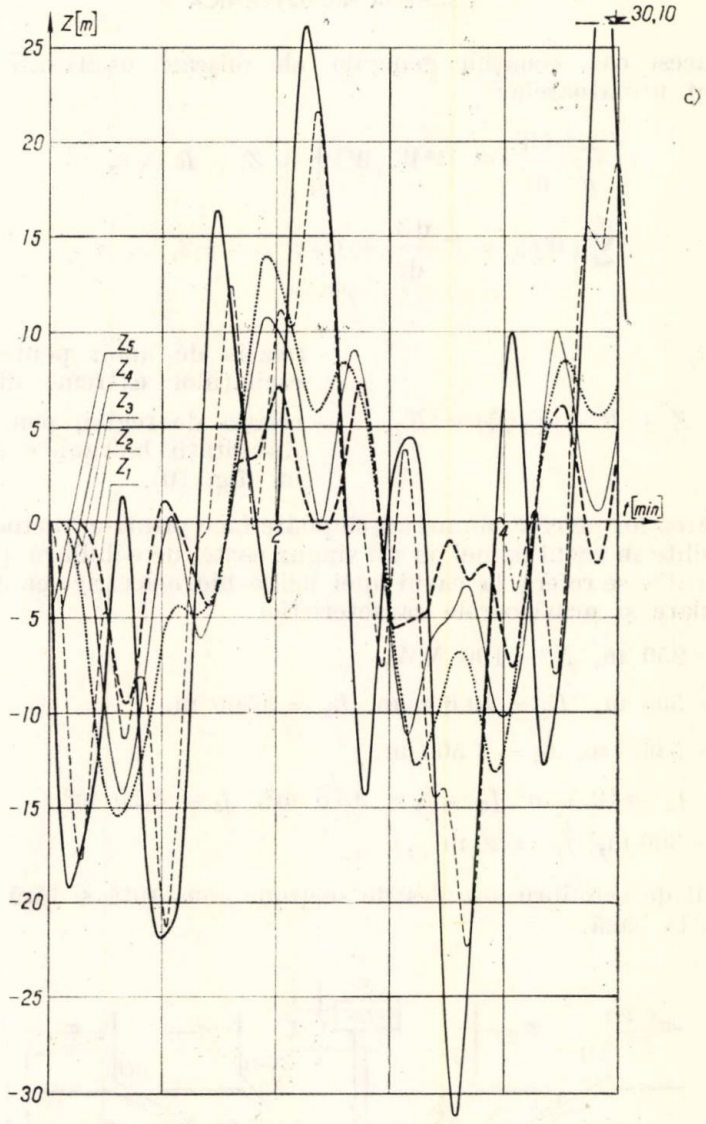


Fig. 9. — Funcționarea hidraulică a uzinei la o manevră de pornire cu $N_2 = 50$ MW, a) funcționare stabilă ; *b*, c) funcționare instabilă.

Ilustrarea fenomenului de stabilitate sau instabilitate a mișcării apei din sistem apare în graficele din fig. 9, care se referă la variantele cu următoarele caracteristici :

$$\begin{aligned} &\text{I} && F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 3{,}5\ \text{m}^3;\ F_5 = 16\ \text{m}^2, \\ &\text{II} && F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 6\ \text{m}^2, \\ &\text{III} && F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 3{,}5\ \text{m}^2;\ F_3 = 16\ \text{m}^2. \end{aligned} \tag{17}$$

4. SCHEMA HIDROTEHNICĂ D

În acest caz, ecuațiile generale ale mișcării oscilatorii a apei în sistem sînt următoarele :

$$\left(\frac{L}{g}\frac{dW}{dt} + P^* W|W|\right)_i + Z + R = 0,$$
$$\sum_1^N (Wf)_i = F\frac{dZ}{dt} + Q_T; \quad i = 1,2,\ldots N \tag{18}$$

și

$Q_T = Q_T(t)$ — relația de debit pentru calculul oscilațiilor extreme din castele,

$\eta g Q_T(H + Z + R - K_T Q_T^2) = N_2$ — relația de reglaj, pentru studiul stabilității hidraulice a sistemului (fig. 10),

iar rezolvarea lor pe cale numerică se poate face printr-o metodă analogă celei stabilite în cazul uzinei cu un singur castel de echilibru [4].

Aplicația se referă la cazul unei uzine hidroelectrice cu cinci lacuri de acumulare și următoarele caracteristici

$$H = 250 \text{ m}, \; N = 100 \text{ MW},$$
$$L_1 = 500 \text{ m}, \; L_2 = 10.000 \text{ m}, \; L_3 = 5\,300 \text{ m},$$
$$L_4 = 5\,000 \text{ m}, \; L_5 = 1\,500 \text{ m}, \tag{19}$$
$$f_1 = f_2 = 12{,}5 \text{ m}^2, f_3 = f_4 = 9{,}75 \text{ m}^2, \; f_5 = 3{,}15 \text{ m}^2,$$
$$L_T = 300 \text{ m}, \; f_T = 20 \text{ m}^2,$$

iar castelul de echilibru s-a ales de secțiune constantă și fără rezistență hidraulică la bază.

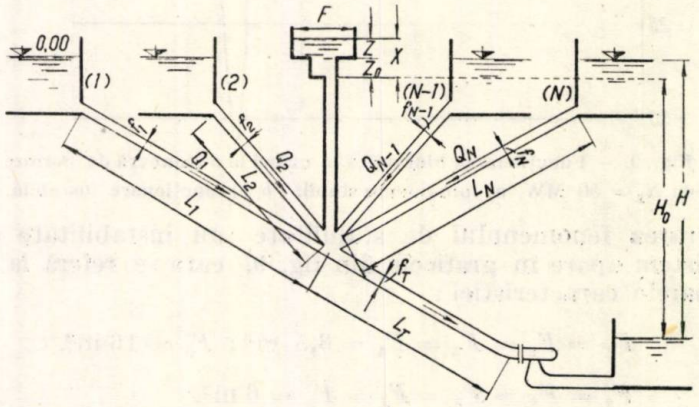


Fig. 10. — Schema hidrotehnică D.

S-au analizat variantele :

$$\text{I} \qquad F = 80\ \text{m}^2; \quad \text{II}\ F = 45\ \text{m}^2; \quad \text{III}\ F = 20\ \text{m}^2. \tag{20}$$

Simularea numerică a mişcării oscilatorii a apei în sistem a permis reproducerea unor fenomene foarte interesante de stabilitate şi de instabilitate a mişcării (fig. 11).

În încheiere, menţionăm că unele dintre metodele de calcul prezentate în această lucrare au fost aplicate la proiectarea unor uzine hidroelectrice din ţara noastră, ca, de exemplu, uzinele Lotru şi Tismana.

Primită la redacţie la 30 august 1976

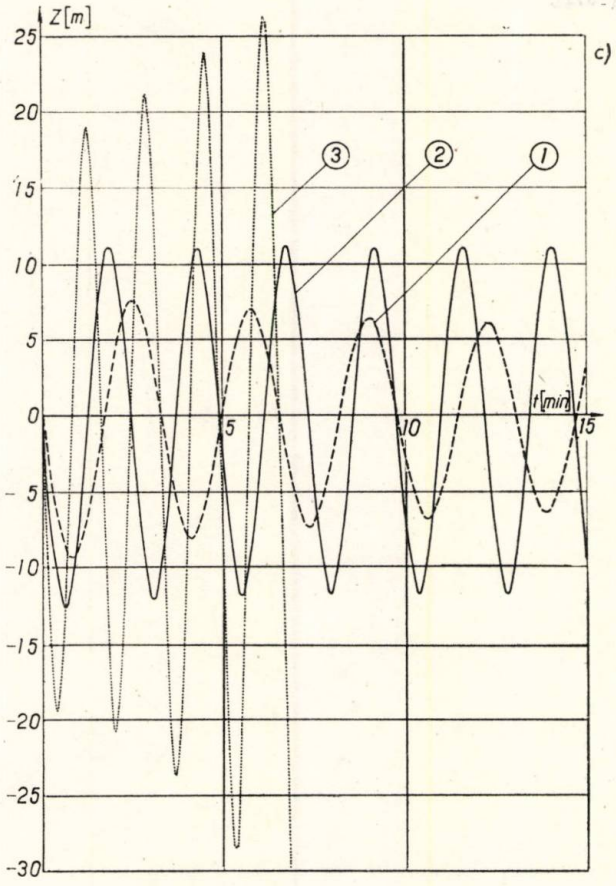


Fig. 11. — Funcţionarea hidraulică stabilă sau instabilă a uzinei la o manevră de pornire cu $N_2 = 50$ MW.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Escande, *Methodes nouvelles pour la calcul des cheminées d'équilibre*, Paris, Dunod, 1950.
2. Gh. Jaeger, *Hydraulique technique*, Paris, 1954.
3. M. Popescu, *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXI**, 1–226 (1969).
4. M. Popescu, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică **XXIII**, 1–172 (1970).
5. M. Popescu, *Modèle mathématique pour l'étude de la stabilité d'un système de deux chambres d'équilibre*, C. R. Acad. Sc. Paris, **273**, 129–132 (1971).
6 M. Popescu, I. Jelev, V. Cristidis, *Etude de la stabilité hydraulique de fonctionnement aux régimes transitoires des usines hydroélectrique conçues par des schémas complexes*, Simposion AIRH, Bucarest, 1976.
7. R. Sabljak, W. Doran, *Hydraulic analysis of a double surge shaft system by digital computer*, I.A.H.R. Congres, 1961.
8. P. Torell, *Surges in multiple tanks*, Water Power, *12* (1966).
9. T. Tekle, K., Vigander, *Siso Water Power plant. Mass oscillation in the head race system*, Bulletins of the tiver and harbour laboratory Technical University of Norway, *13* (1972).

CALCULUL DIAFRAGMELOR CU BUIANDRUGI SUBȚIRI PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

de GELU ONU
I.P.T.A.N.A.

Se prezintă forma închisă, în coordonate nodale, a matricei de rigiditate a unei familii de elemente finite rectangulare, cu opt grade de libertate pe contur. Este descris apoi un procedeu adecvat soluționării diafragmelor cu buiandrugi subțiri, procedeu bazat pe utilizarea substructurilor alcătuite din aceste elemente. De asemenea, se prezintă un model specializat pentru idealizarea buiandrugilor subțiri.

1. INTRODUCERE

Din rîndul metodelor recente, folosite pentru calculul diafragmelor cu goluri, o trecere în revistă a acestora găsindu-se în [8], metoda elementelor finite se distinge prin caracterul ei general. Un program de calcul automat întocmit pe baza acestei metode prezintă avantajul de a soluționa într-o manieră unitară și cu precizia dorită orice tip de diafragmă sau structură alcătuită din diafragme. În același timp metoda are și inconveniente, cel mai însemnat fiind dependența ei de configurația sistemului de prelucrare a datelor. Într-o măsură mai mare decît alte procedee de calcul, metoda elementelor finite solicită un calculator cu performanțe superioare atît ca viteză de lucru, cît și ca disponibil de memorie.

Eforturile consacrate diminuării dezavantajelor metodei urmăsesc, în principal, două obiective :

1) Găsirea unor tehnici de asamblare a matricei generale a structurii care să realizeze micșorarea numărului de operațiuni-mașină necesar obținerii soluției.

Aici se are în vedere faptul că nu există o metodă de rezolvare la fel de eficientă în toate împrejurările, fiecare clasă de structuri avînd o tehnică de ansamblare optimă proprie [23].

2) Realizarea unor elemente finite cu performanțe superioare, care să permită o discretizare mai grosieră a structurii fără a se afecta exactitatea soluției.

Dacă avem în vedere numai domeniul modelelor deplasare, îmbunătățirea elementelor finite se obține (după Ivar Holland [16]) prin creșterea numărului nodurilor elementului, prin sporirea numărului gradelor de libertate la nod și, în sfîrșit, prin utilizarea tehnicii izoparametrice. La acestea, mai trebuie adăugat procedeul propus de Pian [26], care constă în alegerea unor funcții-deplasare cu un număr de coordonate generalizate superior numărului deplasărilor nodale, valorile coordonatelor gene-

ralizate excedentare urmînd a fi determinate prin minimizarea energiei potențiale.

Utilizînd procedeul lui Pian, în referatul [34] Wilson prezintă o inovație a tehnicii izoparametrice folosită în mod curent pentru soluționarea problemelor de elasticitate plană ([12] sau [15]). Inovația constă în adăugarea, la polinoamele de interpolare liniară ale patrulaterelor cu opt grade de libertate, a patru funcții de corecție care facilitează reprezentarea corectă a stării de eforturi specifice încovoierii pure. Deplasările generalizate, corespunzătoare celor patru funcții de corecție introduse, se determină din condiții de minimizare a energiei potențiale totale a modelului.

O descriere a tehnicii folosite de Wilson se găsește în articolul [28].

În lucrarea [6], în care se analizează comparativ posibilitățile unor modele bidimensionale îmbunătățite, v. și [7], se arată că elementul $Q6$ din [34] dă rezultate superioare atît timp cît poate fi utilizat ca model rectangular. În forma sa generală, de patrulater oarecare, rezultatele date de acesta sînt mai puțin bune, acest lucru fiind pus pe seama activării modurilor de deformare necompatibile introduse prin funcțiile de corecție.

În programul din [34], matricea de rigiditate (8×8) a elementului $Q6$, se calculează prin integrare numerică, cu condensarea ulterioară a gradelor de libertate interioare. Această manieră de calcul, fără alternativă în cazul patrulaterelor de formă oarecare, este neeconomică din punctul de vedere al consumului de timp la calculator. După autorii articolului [11], operațiile de multiplicare, integrare și inversare, efectuate pentru a obține o matrice de rigiditate pe această cale, pot consuma pînă la de 20 de ori timpul necesar obținerii matricei determinate pe cale analitică în coordonate nodale. De aici necesitatea de a se folosi forma închisă a matricei de rigiditate ori de cîte ori tipul elementului finit permite acest lucru.

În acest articol se va prezenta forma închisă a matricei de rigiditate pentru o familie de elemente finite rectangulare, cu opt grade de libertate pe contur. Din aceasta, prin particularizare, se poate obține și matricea corespunzătoare formei dreptunghiulare a elementului finit descris în [34].

De asemenea, se vor prezenta două procedee de reducere a matricei de rigiditate generale, procedee adecvate soluționării diafragmelor cu buiandrugi subțiri.

2. MODELUL DE BAZĂ

În figura 1 este reprezentat un element finit rectangular cu patru noduri la colțuri și un al cincilea în originea axelor de coordonate. La fiecare nod sînt luate în considerație cîte două grade de libertate, translațiile după direcțiile axelor de coordonate.

Cîmpul deplasărilor poate fi exprimat matriceal astfel:

$$\begin{vmatrix} Ux \\ Vy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Fx \\ Fy \end{vmatrix} \cdot |C|. \tag{1}$$

În relaţia (1), C este vectorul coordonatelor generalizate, iar vectorii Fx şi Fy au drept elemente, coeficienţii funcţionali ai funcţiilor deplasare :

$$Fx = |1,\ 0,\ x,\ xy,\ 0,\ y,\ 0,\ f1(y),\ 0,\ f3(x),\ 0|,$$
$$Fy = |0,\ 1,\ 0,\ x,\ 0,\ xy,\ 0,\ y,\ 0,\ f2(x),\ 0,\ f4(y)|. \tag{2}$$

Faţă de modelul clasic $Q4$, cu opt grade de libertate [22], funcţiile deplasare utilizate conţin patru termeni suplimentari,

$$f1(y) = b^n - y^n,$$
$$f2(x) = a^n - x^n,$$
$$f3(x) = b^m - x^m, \tag{3}$$
$$f4(y) = a^m - y^m,$$

în care, n şi m sînt numere întregi, pare *).

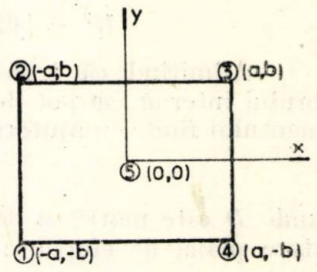


Fig. 1. — Model rectangular cu cinci noduri.

Transformarea coordonatelor generalizate în deplasări nodale se realizează cu ajutorul relaţiei

$$\Delta n = |An,\ Ai| \cdot \begin{vmatrix} Cn \\ Ci \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Deoarece funcţiile (3) se anulează la colţurile modelului, matricea An are inversă aşa că se poate scrie

$$Cn = A^{-1}n \cdot \Delta n - A^{-1}n \cdot Ai \cdot Ci. \tag{5}$$

În relaţiile (4) şi (5), matricea An, respectiv A_n^{-1}, pun în relaţie deplasările nodale cu coordonatele generalizate aferente.

Atribuind coordonatelor generalizate suplimentare (Ci), caracter de deplasări generalizate [29], se poate scrie :

$$\begin{vmatrix} Cn \\ Ci \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^{-1}n & A^{-1}n \cdot Ai \\ 0 & I(2\times 2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta n \\ \Delta i \end{vmatrix} \tag{6}$$

sau, mai concis,

$$C = A \cdot \Delta. \tag{6'}$$

Se notează cu ε vectorul deformaţiilor specifice :

$$\varepsilon^T = |\partial Ux/\partial x,\ \partial Vy/\partial y,\ \partial Ux/\partial y + \partial Vy/\partial x|. \tag{7}$$

*) Wilson [34] foloseşte funcţii de corecţie de acelaşi tip, în coordonate izoparametrice pentru cazul $n = m = 2$.

Diferențiind Ux și Vy în raport cu x și y și ținînd seama de relația (6'), se obține ε exprimat în funcție de Δ, prin intermediul matricei de influență a deplasărilor generalizate asupra deformațiilor specifice:

$$\varepsilon = B \cdot \Delta, \tag{8}$$

unde

$$B = H \cdot A, \tag{9}$$

$$H^T = |\partial Fx/\partial x,\ \partial Fy/\partial y,\ \partial Fx/\partial y + \partial Fy/\partial x|.$$

Admițînd că transformarea (8) se realizează cu păstrarea echilibrului interior, se pot determina eforturile unitare în orice punct al elementului finit, cu ajutorul relației

$$\sigma = D \cdot B \cdot \Delta, \tag{10}$$

unde D este matricea de elasticitate pentru o șaibă ortotropă, aflată în stare plană de eforturi:

$$D = \begin{vmatrix} Dx & D1 & 0 \\ D1 & Dy & 0 \\ 0 & 0 & Dxy \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Energia de deformație a elementului finit se calculează cu relația

$$Ui = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \cdot D \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{d}v. \tag{12}$$

Cu notația standard,

$$K = \int_V A^T \cdot H^T \cdot D \cdot H \cdot A \cdot \mathrm{d}v,$$

relația (12) se scrie sub forma

$$Ui = \frac{1}{2} \Delta^T \cdot K \cdot \Delta, \tag{12'}$$

K este matricea de rigiditate a modelului cu 12 grade de libertate.

3. CONDENSAREA MATRICELOR K ȘI B

Energia potențială totală a elementului finit, solicitat numai de sarcini care acționează pe contur, se calculează cu relația

$$\pi = Ui - \Delta^T c \cdot Qc. \tag{13}$$

Din condiția de minim a energiei potențiale totale ($\partial\pi/\partial\Delta = 0$) se obține

$$K \cdot \Delta - Qc = 0. \tag{14}$$

Relația (14) se rescrie sub forma

$$\begin{vmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta c \\ \Delta s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Qc \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{14'}$$

S-au folosit notațiile :

$K11$ (8×8) pentru rigiditățile aferente deplasărilor nodurilor de contur,

$K22$ (4×4) pentru rigiditățile aferente deplasărilor generalizate interioare *).

Menținînd că Δc reprezintă deplasările nodurilor de contur, iar Qc sarcinile corespunzătoare, semnificația celorlalte elemente din (14') rezultă prin particularizare.

Din (14') se obțin succesiv relațiile :

$$K21 \cdot \Delta c + K22 \cdot \Delta s = 0,$$

$$K11 \cdot \Delta c + K12(-K22^{-1} \cdot K21 \cdot \Delta c)\, Qc, \tag{15}$$

$$(K11 - K12 \cdot K22^{-1} \cdot K21) \cdot \Delta c = Qc.$$

Matricea de rigiditate redusă (8×8) obținută prin condensarea deplasărilor generalizate interioare, se calculează cu relația

$$Kr = K11 - K12 \cdot K22^{-1} \cdot K21. \tag{16}$$

Se rescrie relația (10) sub forma

$$\sigma = |D| \cdot |Bc,\ Bs| \cdot \begin{vmatrix} \Delta c \\ \Delta s \end{vmatrix}, \tag{10'}$$

unde Bc (3×8) este submatricea lui B, aferentă nodurilor de contur, iar Bs (3×4) submatricea aferentă deplasărilor generalizate interioare.

Ținînd seama că

$$\Delta s = - K22^{-1} \cdot K21 \cdot \Delta c \quad \text{(din 15)},$$

relația (10') devine :

$$\sigma = |D| \cdot |Bc \cdot \Delta c + Bs\,(- K22^{-1} \cdot K21 \cdot \Delta c)|$$

sau încă

$$\sigma = |D| \cdot |Bc - Bs \cdot K22^{-1} \cdot K21| \cdot \Delta c. \tag{10''}$$

Matricea redusă (3×8) de transformare a deplasărilor nodurilor de contur în deformații specifice se calculează cu relația

$$B_r = Bc - Bs \cdot K22^{-1} \cdot K21. \tag{17}$$

În anexa 1 sînt date expresiile analitice ale matricelor Kr și Br. În cele ce urmează se va folosi abrevierea $Q6NM$ ori de cîte ori se vor face referiri la familia de elemente finite descrisă în acest paragraf și precedentul.

*) În cazul în care elementul finit are conectate la nodul central legături elastice, rigiditățile acestora pot fi adunate direct la rigiditățile nodului central, pe diagonala principală a submatricei K22.

$B_T^1 =$

$\frac{-1+\eta}{4a}$	$-CY\ \frac{(m+1)}{bD1}\eta^{m-1}$	$\frac{-1+\xi+n.\eta^{n-1}}{4b} - HX\cdot\eta^{n-1} - GY\cdot\xi^{n-1}$
$-CX\cdot\frac{(m+1)}{aD1}\xi^{m-1}$	$\frac{-1+\xi}{4b}$	$\frac{-1+\eta+n\cdot\xi^{n-1}}{4a} - GX\cdot\eta^{n-1} - HY\cdot\xi^{n-1}$
$\frac{-1-\eta}{4a}$	$CY\cdot\frac{(m+1)}{bD1}\eta^{m-1}$	$\frac{1-\xi+n\cdot\eta^{n-1}}{4b} - HX\cdot\eta^{n-1} + GY\cdot\xi^{n-1}$
$CX\cdot\frac{(m+1)}{aD1}\xi^{m-1}$	$\frac{1-\xi}{4b}$	$\frac{-1-\eta+n\cdot\xi^{n-1}}{4a} + GX\cdot\eta^{n-1} - HY\xi^{n-1}$
$\frac{1+\eta}{4a}$	$-CY\cdot\frac{(m+1)}{bD1}\eta^{m-1}$	$\frac{1+\xi+n\cdot\eta^{n-1}}{4b} - HX\cdot\eta^{n-1} - GY\xi^{n-1}$
$-CX\cdot\frac{(m+1)}{aD1}\xi^{m-1}$	$\frac{1+\xi}{4b}$	$\frac{1+\eta+n\cdot\xi^{n-1}}{4a} - GX\cdot\eta^{n-1} - HY\xi^{n-1}$
$\frac{1-\eta}{4a}$	$CY\cdot\frac{(m+1)}{bD1}\eta^{m-1}$	$\frac{-1-\xi+n\cdot\eta^{n-1}}{4b} - HX\cdot\eta^{n-1} + GY\xi^{n-1}$
$CX\cdot\frac{(m+1)}{aD1}\xi^{m-1}$	$\frac{-1-\xi}{4b}$	$\frac{1-\eta+n\cdot\xi^{n-1}}{4a} + GX\cdot\eta^{n-1} - HY\xi^{n-1}$

$K_T =$

$\frac{Dx\cdot\beta}{3}+\frac{Dxy}{4\beta}\left(\frac{4}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C1X-CY$							
$\frac{D1}{4}+\frac{Dxy}{4}\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)-C2X$	$\frac{Dy}{3\beta}+\frac{Dxy\beta}{4}\left(\frac{4}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C1Y-CX$						
$\frac{Dx\cdot\beta}{6}+\frac{Dxy}{4\beta}\left(-\frac{4}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C3X+CY$	$\frac{D1}{4}-\frac{Dxy}{4}-C4Y$	K_{11}					
$-\frac{D1}{4}+\frac{Dxy}{4}-C4X$	$-\frac{Dy}{3\beta}+\frac{Dxy\beta}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C3Y+CX$	$-K_{21}$	K_{22}				
$-\frac{Dx\cdot\beta}{6}+\frac{Dxy}{4\beta}\left(-\frac{2}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C1X-CY$	$-\frac{D1}{4}+\frac{Dxy}{4}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-C2Y$	K_{71}	K_{81}	K_{11}			
$-\frac{D1}{4}+\frac{Dxy}{4}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-C2X$	$-\frac{Dy}{6\beta}+\frac{Dxy\beta}{4}\left(-\frac{2}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C1Y-CX$	$-K_{81}$	K_{82}	K_{21}	K_{22}		
$-\frac{Dx\cdot\beta}{3}+\frac{Dxy}{4\beta}\left(\frac{2}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C3X+CY$	$-\frac{D1}{4}+\frac{Dxy}{4}-C4Y$	K_{51}	$-K_{52}$	K_{31}	K_{32}	K_{11}	
$\frac{D1}{4}-\frac{Dxy}{4}-C4X$	$\frac{Dy}{6\beta}+\frac{Dxy\beta}{4}\left(-\frac{4}{3}+\frac{n^2}{2n-1}\right)-C3Y+CX$	$-K_{61}$	K_{62}	K_{41}	K_{42}	$-K_{21}$	K_{22}

simetric

$$C1X = \frac{Dxy}{4\beta}\left(UX\cdot\frac{n^2}{2n-1}+UY\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}\right)$$

$$C1Y = \frac{Dxy\cdot\beta}{4}\left(UY\cdot\frac{n^2}{2n-1}+UX\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}\right)$$

$$C2X = \frac{Dxy}{4}\left(UX+UY\right)\frac{n}{n+1} \qquad C2Y = C2X$$

$$C3X = \frac{Dxy}{4\beta}\left(UX\cdot\frac{n^2}{2n-1}-UY\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}\right)$$

$$C3Y = \frac{Dxy\cdot\beta}{4}\left(UY\cdot\frac{n^2}{2n-1}-UX\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}\right)$$

$$C4X = \frac{Dxy}{4}\left(UY-UX\right)\frac{n}{n+1} \qquad C4Y = -C4X$$

$$CX = \frac{D1^2}{Dx\cdot\beta}\cdot\frac{2m-1}{4(m+1)^2}$$

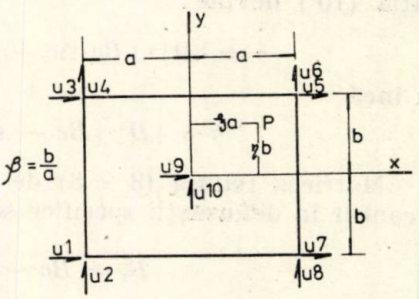
$$CY = \frac{D1^2\cdot\beta}{Dy}\cdot\frac{2m-1}{4(m+1)^2}$$

$$GX = \frac{2n-1}{4a(n+1)}$$

$$HX = \frac{n}{4b}$$

$$GY = \frac{Gx}{\beta}$$

$$HY = \beta\cdot Hx$$



$\beta = \frac{b}{a}$

OBSERVAȚII:

În relațiile alăturate se va lua UX=UY=1, cu excepțiile:

- dacă deplasarea U9=0, atunci UX=0.
- dacă deplasarea U10=0, atunci UY=0.

4. REDUCEREA MATRICEI DE RIGIDITATE A STRUCTURII

Se prezintă două procedee de reducere a numărului de parametri nedeterminați și a lățimii benzii matricei de rigiditate generale. Primul procedeu are la bază utilizarea substructurilor formate din elemente $Q6NM$, iar cel de-al doilea, un element finit specializat pentru idealizarea buiandrugilor subțiri.

4.1. UTILIZAREA SUBSTRUCTURILOR

În esență, procedeul constă în înlocuirea buiandrugilor, modelați din elemente finite, prin substructuri cu cîte patru noduri de conexiune cu spaleții adiacenți. În acest fel se elimină, din matricea de rigiditate generală, nodurile interioare ale buiandrugilor.

În figura 2 este reprezentat un buiandrug, considerat substructură, modelat din șase elemente finite identice. După cum se vede, numerotarea nodurilor a fost făcută astfel încît primele patru numere să fie atribuite nodurilor de legătură cu cei doi spaleți adiacenți. Numerotarea urmărește ordinea de parcurs a nodurilor de contur ale elementului din figura 1. Nodurile interioare ale substructurii primesc numere în continuare.

Legătura dintre sarcinile care acționează la noduri (Pbc, Pbi) și deplasările corespunzătoare (Zbc, Zbi), se realizează prin intermediul matricei de rigiditate a buiandrugului (Kb):

$$\begin{vmatrix} Kb11 & Kb^T21 \\ Kb21 & Kb22 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Zbc \\ Zbi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Pbc \\ Pbi \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$Kb11$ (8×8), conține rigiditățile aferente nodurilor 1—4 de conexiune cu spaleții; se obține din matricea Kr (anexa 1), anulînd elementele situate la intersecția coloanelor 1, 2, 3 și 4 cu liniile 5, 6, 7 și 8 și la intersecția coloanelor 5, 6, 7 și 8 cu liniile 1,2,3 și 4.

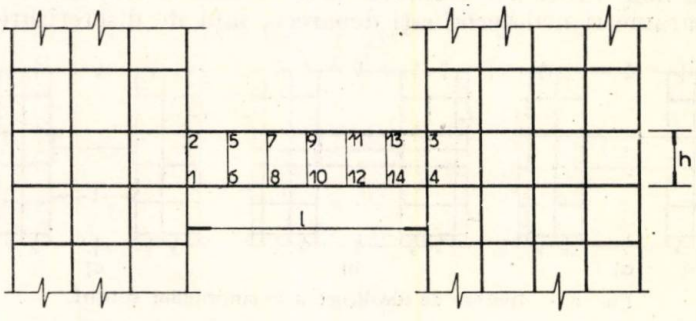


Fig. 2. — Buiandrug modelat cu ajutorul a șase elemente finite.

$Kb22$ este o matrice pătrată cu $(2p - 8) \cdot (2p - 8)$ elemente, p fiind numărul de noduri al substructurii (pentru cazul din fig. 2, $p = 14$); se prezintă sub formă de bandă simetrică și conține rigiditățile aferente nodurilor interioare ($5, 6, \ldots, p$). Elementele matricei se obțin din Kr (anexa 1) prin suprapunerea efectelor.

$Kb21$ are 8 coloane și $2p - 8$ linii, și conține rigiditățile care pun în relație nodurile marginale cu cele din interiorul substructurii. Singurele elemente diferite de zero ale submatricei $Kb12$ sînt cele care au fost anulate în Kr pentru a obține $Kb11$.

Zbc și Pbc reprezintă deplasările și, respectiv, forțele nodurilor de contur.

Zbi și Pbi au aceeași semnificație pentru nodurile interioare ale substructurii.

Procedînd la fel ca în cazul relațiilor (17), se obține matricea de rigiditate redusă a substructurii

$$Kbr = Kb11 - Kb12 \cdot Kb22^{-1} \cdot Kb21 \tag{19}$$

și vectorul redus al sarcinilor exterioare

$$Pbr = Pbc - Kb12 \cdot Kb22^{-1} \cdot Pbi. \tag{20}$$

Matricele $Kb11$, $Kb12$ și $Kb22$ sînt date în anexa 2.

4.2. MODEL PENTRU IDEALIZAREA BUIANDRUGILOR SUBȚIRI [24]

Buiandrugii subțiri pot fi idealizați cu ajutorul unor elemente liniare de tip grindă, dacă conexiunea lor cu elementele finite care modelează șpaleții poate transmite momente încovoietoare. Acest deziderat este satisfăcut în cazul în care sînt sporite deplasările generalizate ale nodurilor elementelor finite prin luarea în considerație a unor grade de libertate suplimentare de tip rotire [19], [27], [4], [30], [25].

Utilizarea elementelor cu mai mult de două grade de libertate la nod are însă dezavantajul de a spori numărul total de parametri nedeterminați, fără a se obține o îmbunătățire corespunzătoare a soluției.

Într-un articol recent [2] este prezentat un procedeu care, cu ajutorul multiplicatorilor lui Lágrange, face posibilă cuplarea elementelor liniare de tip grindă, cu elemente finite rectangulare cu două grade de libertate la nod. Procedeul conduce de asemenea la o sporire a numărului total de parametri nedeterminați deoarece, față de discretizarea normală

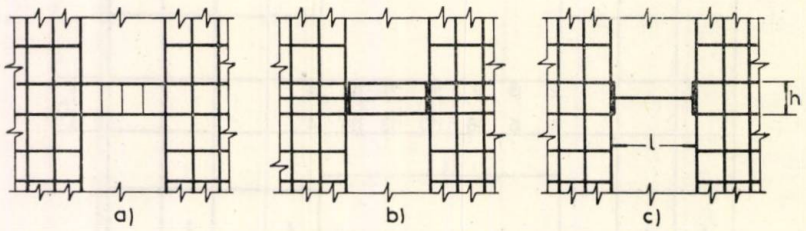


Fig. 3. — Ipoteze de idealizare a buiandrugilor subțiri.

(fig. 3 *a*), apare necesitatea introducerii unui șir suplimentar de elemente finite în dreptul fiecărui buiandrug (fig. 3b), pe toată lățimea diafragmei.

În cele ce urmează se va prezenta un element specializat pentru idealizarea buiandrugilor subțiri, în vederea cuplării acestora cu elemente finite rectangulare cu două grade de libertate la nod. Față de procedeele sumar prezentate anterior, se obține avantajul esențial de a se reduce la minimum numărul total al parametrilor nedeterminați.

ANEXA 2

$$Kb = \begin{bmatrix} Kb11 & Kb21^T \\ Kb21 & Kb22 \end{bmatrix}$$

$$Kb21 = \begin{bmatrix} R3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R4 \end{bmatrix} \qquad Kb11 = \begin{bmatrix} R1 & 0 \\ 0 & R2 \end{bmatrix}$$

$$Kb22 = \begin{bmatrix} R5 & R6^T & 0 & 0 & 0 \\ R6 & R5 & R6^T & 0 & 0 \\ 0 & R6 & R5 & R6^T & 0 \\ 0 & 0 & R6 & R5 & R6^T \\ 0 & 0 & 0 & R6 & R5 \end{bmatrix}$$

$(2p-8)$ linii

$(2p-8)$ coloane

Obs: p = numărul de noduri al substructurei

$$R1 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

$$R2 = \begin{bmatrix} K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix}$$

$$R3 = \begin{bmatrix} K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} \end{bmatrix}$$

$$R4 = \begin{bmatrix} K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \end{bmatrix}$$

$$R5 = \begin{bmatrix} 2K11 & 0 & 2K13 & 0 \\ 0 & 2K22 & 0 & 2K24 \\ 2K13 & 0 & 2K11 & 0 \\ 0 & 2K24 & 0 & 2K22 \end{bmatrix}$$

$$R6 = \begin{bmatrix} K_{35} & K_{45} & K_{15} & K_{25} \\ K_{36} & K_{46} & K_{16} & K_{26} \\ K_{37} & K_{47} & K_{17} & K_{27} \\ K_{38} & K_{48} & K_{18} & K_{28} \end{bmatrix}$$

Elementul este reprezentat schematic în figura 3*c*. Este constituit dintr-o grindă care are aceeași secțiune transversală cu buiandrugul real și două bare de cuplare, infinit rigide, amplasate la extremitățile grinzii. Fiecare bară de cuplare are la capete articulații de conexiune cu nodurile elementelor finite. Elementul astfel constituit este un model cu opt grade de libertate.

O matrice de rigiditate K (8×8) va guverna comportarea modelului, astfel încît

$$K \cdot U = Q. \tag{21}$$

În relația (21) U și Q sînt vectori cu opt elemente care reprezintă deplasările și forțele indicate în figurile 4*a* și 4*b*.

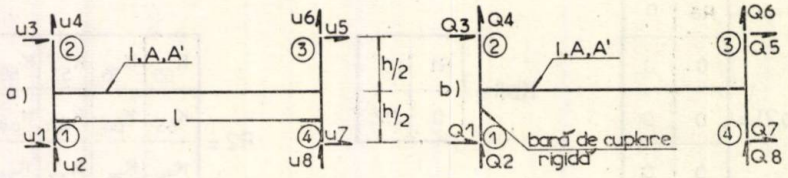


Fig. 4. — Model specializat cu opt grade de libertate.

Prima coloană a matricei de rigiditate K, conține forțele care apar la nodurile modelului cînd $U1=1$, celelalte deplasări fiind blocate (fig. 5*a*). A doua coloană din K reprezintă forțele de la noduri cînd $U2 = 1$, iar restul deplasărilor sînt nule (fig. 5*b*). Celelalte șase coloane ale matricei de rigiditate se pot obține din primele două coloane, prin rotirea modelului în jurul axei Z. Prin intermediul coeficientului Φ s-a ținut seama de influența forței tăietoare asupra deformațiilor (pentru detalii vezi [29], [20] sau [30]).

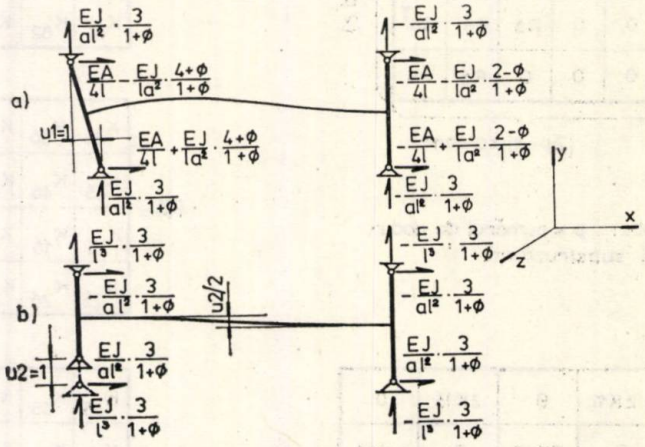


Fig. 5. — Reacțiuni la noduri din deplasări unitare.

Proprietățile de rigiditate ale barelor de cuplare nu sînt incluse în matricea de rigiditate a modelului.

În anexa 3 este reprodusă matricea de rigiditate K precum și matricea Sb care transformă deplasările nodale în solicitări ale grinzii modelului:

$$|N,\ T,\ M|^T = Sb \cdot U. \tag{22}$$

ANEXA 3

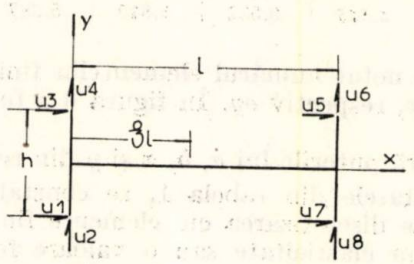
$$K=\frac{Et}{12}\cdot$$

$\frac{7+4\phi}{1+\phi}\beta$							
$\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	$\frac{3}{1+\phi}\beta^3$						
$-\frac{1-2\phi}{1+\phi}\beta$	$-\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	K_{11}					
$\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	$\frac{3}{1+\phi}\beta^3$	$-K_{21}$	K_{22}				
$-\frac{5+2\phi}{1+\phi}\beta$	$-\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	K_{71}	K_{81}	K_{11}			
$-\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	$-\frac{3}{1+\phi}\beta^3$	$-K_{81}$	K_{82}	K_{21}	K_{22}		
$-\frac{1+4\phi}{1+\phi}\beta$	$\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	K_{51}	$-K_{52}$	K_{31}	K_{32}	K_{11}	
$-\frac{3}{1+\phi}\beta^2$	$-\frac{3}{1+\phi}\beta^3$	$-K_{61}$	K_{62}	K_{41}	K_{42}	$-K_{21}$	K_{22}

simetric

$$S_b^T=\frac{Et}{12}\cdot$$

6β	$\frac{6}{1+\phi}\beta^2$	$\frac{-4-\phi+6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta$
0	$\frac{6}{1+\phi}\beta^3$	$\frac{-3+6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta^2$
6β	$-\frac{6}{1+\phi}\beta^2$	$\frac{4+\phi-6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta$
0	$\frac{6}{1+\phi}\beta^3$	$\frac{-3+6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta^2$
-6β	$-\frac{6}{1+\phi}\beta^2$	$\frac{2-\phi-6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta$
0	$-\frac{6}{1+\phi}\beta^3$	$\frac{3-6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta^2$
-6β	$\frac{6}{1+\phi}\beta^2$	$\frac{-2+\phi+6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta$
0	$-\frac{6}{1+\phi}\beta^3$	$\frac{3-6\vartheta}{1+\phi}\cdot h\beta^2$



Obs: Matricele K și S_b sînt date pentru buiandrugi cu secțiune dreptunghiulară la care: $A=ht$, $A'=\frac{6}{5}ht$,

$$J=\frac{th^3}{12},\quad \beta=\frac{h}{l},$$

$$\phi=\frac{5}{3}(1+\mu)\cdot\beta^2$$

5. APLICAȚII

În continuare vor fi prezentate cîteva exemple reprezentative, cu scopul de a evidenția posibilitățile de utilizare a modelelor descrise anterior.

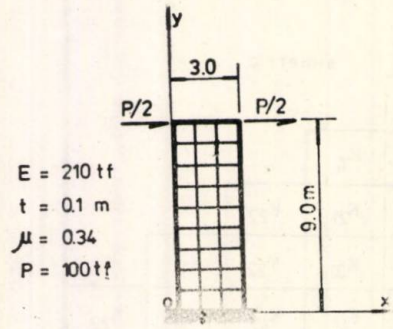


Fig. 6. — Consolă solicitată antisimetric.

5.1. Se consideră o consolă solicitată antisimetric (fig. 6), în cinci ipoteze de discretizare.

Urmărindu-se menținerea neschimbată a numărului gradelor de libertate, au fost luate în considerație modele mecanice cu 18, 24, 27, 30 și 32 elemente finite. O aplicație similară este discutată în [19] și în [25]. În exemplul prezentat aici sînt utilizate pe rînd cinci elemente diferite aparținînd familiei de elemente finite descrise în paragraful 2 și paragraful 3.

În tabela 1 sînt trecute săgețile, în centimetri, la vîrful consolei. Pentru comparație se ia cea mai mică valoare a săgeții obținută prin teoria elasticității (5,55 cm, [31]).

Tabela 1

n	m	$Nx = 1$ $Ny = 18$	$Nx = 2$ $Ny = 12$	$Nx = 3$ $Ny = 9$	$Nx = 5$ $Ny = 6$	$Nx = 8$ $Ny = 4$
2.0	2.0	5.770	5,612	5.603	*5.550*	5.481
2.0	8.0	5.500	*5.541*	5.569	5.524	5.522
2.0	10.0	5.410	5.529	5.564	5,534	*5.526*
4.0	2.0	5.713	5,588	5.565	5.476	5,343
6.0	4.0	*5.525*	5.522	5.510	5.387	5.132

Cu Nx și Ny s-a notat numărul elementelor finite, din modelul mecanic, după direcția ox, respectiv oy. În figura 6 a fost reprezentat cazul $Nx = 3$, $Ny = 9$.

n și m reprezintă puterile lui a, b, x și y din relația (3).

Parcurgînd rezultatele din tabela 1, se constată că, indiferent de modul în care se face discretizarea cu elemente finite, se poate obține întotdeauna soluția din elasticitate sau o valoare foarte apropiată de aceasta. Acest lucru nu se realizează de regulă pentru aceeași pereche de valori n, m.

5.2. În figura 7*a* este reprezentată o grindă simplu rezemată, cu două console scurte, solicitată de două grupe de sarcini concentrate: forțele $P1$ și $P2$. Au fost luate în considerație trei ipoteze de alcătuire a modelului mecanic echivalent grinzii reale, schemele din figurile 7*b*, *c* și *d*. Pentru schema din figura 7*b* au fost utilizate pe rînd trei tipuri de

elemente finite : modelul $Q4$ [22], cu opt grade de libertate (8 G.D.L.), modelul $U\theta XY$ [25] cu 16 G.D.L. și modelul $Q6$ cu G.D.L. pe contur. În schema din figura 7*c*, alcătuită din elemente $Q6NM$ avînd $n = 2$ și $m = 2$, au fost incluse la capetele grinzii două elemente cu rezemare la nodul central. Modelul mecanic din figura 7*d* este alcătuit din elemente de tipul celui descris anterior la punctul 4.2.

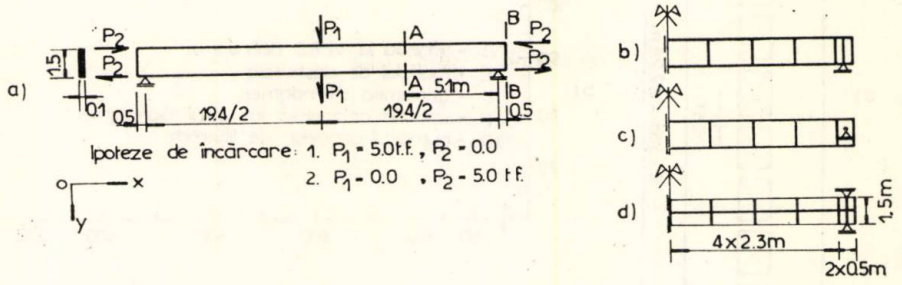


Fig. 7. — Grindă simplu rezemată cu console scurte.

În tabela 2 sînt date eforturile unitare și săgețile în secțiunile A și B (fig. 7*a*), pentru cele două ipoteze de încărcare.

Tabela 2

Schema din fig. 7	Configurația modelului mecanic (semistructură)	Săgeți (cm) și eforturi unitare σx (daN/cm²)							
		Ipoteza de încărcare nr. 1				Ipoteza de încărcare nr. 2			
		secț. A		secț. B		secț. A		secț. B	
		y	σ	y	σ	y	σ	y	σ
b	6 elemente Q4 (28 G.D.L.)	1.271	45.12	−0.149	0.09	0.321	1.31	−0.043	1.89
	6 elemente UθXY (56 G.D.L.)	1.932	67.67	−0.207	0.06	0.484	1.99	−0.067	3.36
	6 elemente Q6 (28 G.D.L.)	1.930	67.73	−0.206	0.17	0.484	1.99	−0.066	2.00
c	5 elemente Q6N.M. (24 G.D.L.)	1.927	67.72	−0.208	0.17	0.484	1.99	−0.066	2.00
d	6 elemente tip § 4.2 (28 G.D.L.)	1.939	68.00	−0.209	0	0.489	2.00	−0.066	2.00
Rezistența materialelor		1.936	68.00	−0.209	0	0.491	2.00	−0.066	2.00

Cu excepția modelului $Q4$, se obțin rezultate foarte apropiate de cele obținute în rezistența materialelor.

5.3. Figura 8*a* reprezintă peretele unei construcții cu opt niveluri, constituit dintr-o diafragmă simetrică cu un șir de goluri. Acest exemplu este folosit în [2] pentru a se arăta eficiența procedeului bazat pe utilizarea multiplicatorilor Lágrange.

În figura 8*b* este reprezentată flexibilitatea sistemului în funcție de numărul gradelor de libertate ale modelului mecanic echivalent diafragmei reale.

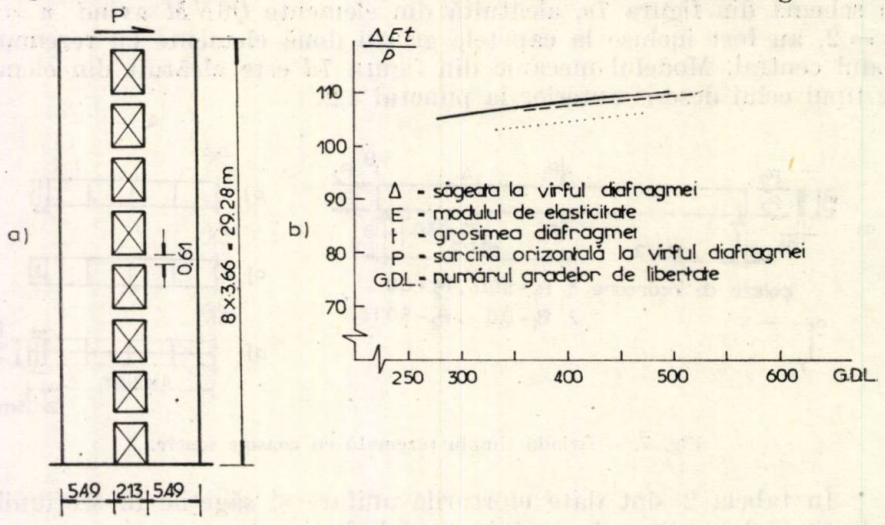


Fig. 8. — Diafragmă simetrică cu un șir de goluri.

Șpaleții sînt modelați cu un număr variabil de elemente $Q6$. Pentru modelarea buiandrugilor sînt luate în considerație patru ipoteze de idealizare. Corespunzător acestora sînt prezentate patru serii de rezultate, calculele fiind efectuate pe semistructură:

— rezultatele obținute utilizînd modelul descris la punctul 4.2, sînt reprezentate cu linie continuă;

— prin procedeul descris la punctul 4.1, luînd în considerație substructuri alcătuite din cîte șase elemente $Q6NM$ cu $n = m = 2$, se obțin practic aceleași rezultate ca în cazul precedent. Acestea sînt reprezentate prin aceeași linie continuă;

— cu linie întreruptă este figurată flexibilitatea diafragmei, obținută în [2] prin utilizarea multiplicatorilor Lágrange;

— cu linie punctată sînt reprezentate rezultatele calculului în ipoteza că buiandrugii sînt modelați din cîte șase elemente $Q6$, rezultate prezentate de asemenea în [2].

După cum se vede, decalajul dintre rezultatele obținute prin intermediul multiplicatorilor lui Lágrange și cele furnizate de procedeele prezentate la § 4.1. și § 4.2. este mic, de circa 1%.

Diferențe mai mari se constată în ipoteza modelării buiandrugilor cu elemente finite $Q6$. Acest lucru este greu de justificat deoarece elementul $Q6$ trebuie să conducă la aceleași rezultate ca și elementul $Q6NM$ în cazul $n = m = 2$. Nepotrivirea acestor rezultate ar putea fi pusă fie pe seama faptului că matricea de rigiditate a elementului folosit în [2], calculată mai puțin exact prin integrare numerică, diferă într-o oarecare măsură de matricea în coordonate nodale, fie pe seama modului în care au fost puse pe semistructură condițiile de antisimetrie. Astfel, dacă în axa de simetrie verticală a structurii se blochează la fiecare buiandrug ambele translații verticale, săgeata la vîrful diafragmei va fi cu două-trei procente mai mică decît în cazul în care se blochează o singură translație.

5.4. În figura 9*a* este reprezentată o diafragmă nesimetrică cu un șir de goluri. Încărcarea este constituită dintr-o sarcină unitară distribuită uniform pe înălțime.

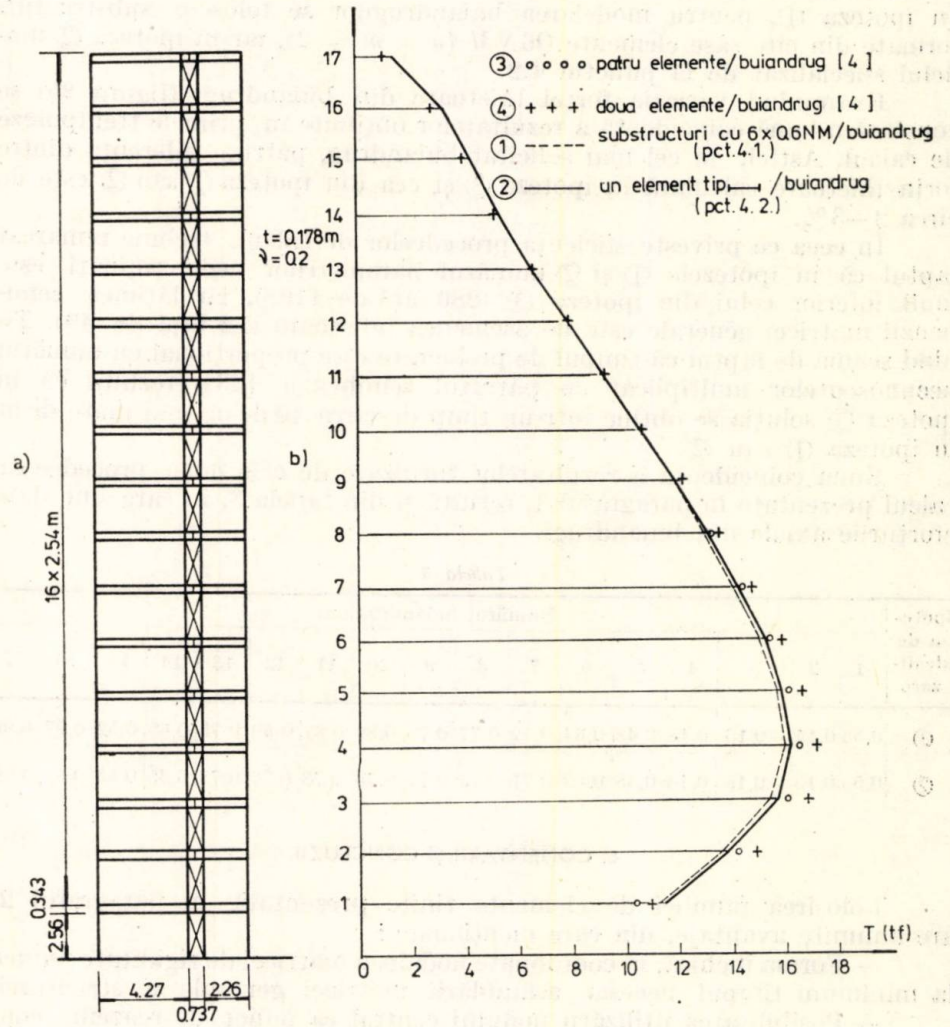


Fig. 9. — Diafragmă nesimetrică cu un șir de goluri.

Acest exemplu este folosit în articolul [4] pentru a arăta posibilitățile unui model rectangular cu 16 grade de libertate, opt translații plus opt rotații. Autorii articolului compară variația forței tăietoare din buiandrugi în trei ipoteze de discretizare a diafragmei. Rezultatele obținute în două din cele trei ipoteze de discretizare sînt reprezentate în figura 9*b*; cele notate cu ③ și ④, maniera de discretizare ④ fiind reprezentată în figura 9*a*. În ipoteza ③ spaletul din stînga este constituit pe lățime din două șiruri de elemente finite, iar buiandrugii sînt alcătuiți din cîte patru elemente.

În celelalte două ipoteze de discretizare considerate aici, sînt utilizate procedeele descrise în paragraful 4. În amîndouă ipotezele șpaleții sînt alcătuiți ca în figura 9*a*, din cîte 34 elemente tip $Q6NM$ ($n = m = 2$). În ipoteza ①, pentru modelarea buiandrugilor se folosesc substructuri formate din cîte șase elemente $Q6NM$ ($n = m = 2$), iar în ipoteza ② modelul specializat de la punctul 4.2.

Examinînd variația forței tăietoare din buiandrugi (figura 9*b*) se constată o bună coincidență a rezultatelor obținute în primele trei ipoteze de calcul. Astfel, în cel mai solicitat buiandrug, patru, diferența dintre forța tăietoare calculată în ipoteza ③ și cea din ipoteza ① sau ② este de circa 2—3%.

În ceea ce privește eficiența procedeelor de calcul, trebuie remarcat faptul că în ipotezele ① și ② numărul parametrilor nedeterminați este mult inferior celui din ipoteza ③ (280 față de 1108), iar lățimea semibenzii matricei generale este de asemenea inferioară (12 față de 40). Ținînd seama de faptul că timpul de prelucrare este proporțional cu numărul necunoscutelor multiplicat cu pătratul semibenzii [23], rezultă că în ipoteza ③ soluția se obține într-un timp de circa 40 de ori mai mare decît în ipoteza ① sau ②.

Buna coincidență a rezultatelor furnizate de cele două procedee de calcul prezentate în paragraful 4, rezultă și din tabela 3, în care sînt date eforturile axiale din buiandrugi.

Tabela 3

ipoteza de idealizare	Numărul buiandrugului																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
①	0,55	0.14	−0,15	0,18	0,48	0,64	0.72	0.77	0.79	0.80	0.81	0,80	0,75	0,65	0.52	0,97	0.96
②	0.55	0.13	−0,15	0.18	0.48	0.63	0.71	0.75	0.77	0.78	0.78	0.77	0.73	0.65	0.55	0.99	0.99

6. COMENTARII ȘI CONCLUZII

Folosirea familiei de elemente finite prezentată în paragraful 2, are anumite avantaje, din care menționăm :

— Forma închisă, în coordonate nodale, a matricei de rigiditate reduce la minimum timpul necesar asamblării matricei generale a structurei.

— Posibilitatea utilizării nodului central ca punct de reazem, conduce în anumite împrejurări la micșorarea numărului total de parametri nedeterminați ai structurii.

— Variația celor doi parametri n și m facilitează modificarea proprietăților de rigiditate ale elementelor, ceea ce oferă posibilități de îmbunătățire a soluției fără a se modifica finețea de discretizare a modelului mecanic. Acest lucru se poate dovedi deosebit de avantajos întrucît ameliorarea soluției s-ar putea obține printr-un proces de optimizare, asemănător cu cel descris în [5], fără a fi necesară modificarea datelor de intrare.

Cele două procedee de reducere a matricei generale, prezentate în paragraful 4, pot fi utilizate la calculul oricărui tip de diafragmă cu buiandrugi subțiri.

Restricția privitoare la dimensiunile buiandrugilor este impusă de maniera de idealizare adoptată pentru aceștia. După cum s-a văzut, a fost luat în considerație numai cazul în care este suficientă o discretizare unidirecțională, ceea ce înseamnă de fapt că modelarea buiandrugilor se realizează cu elemente ale căror caracteristici mecanice pot fi exprimate în funcție de o singură variabilă în sensul rezistenței materialelor. În consecință, valoarea inferioară a raportului λ dintre deschidere și înălțimea secțiunii buiandrugului, trebuie limitată, pentru aceasta recomandîndu-se în [10] valoarea $\lambda = 2$.

Cele două procedee de reducere a matricei generale conduc la rezultate foarte apropiate și, din acest punct de vedere, pot fi considerate echivalente.

Primul procedeu, bazat pe utilizarea substructurilor, are avantajul de a folosi același tip de element finit atît la modelarea spaleților, cît și la modelarea buiandrugilor, ceea ce simplifică într-o oarecare măsură procedura de calcul. Dar, în comparație cu al doilea procedeu (§ 4.2), are neajunsul, caracteristic de altfel metodei elementelor finite, de a nu putea întotdeauna aprecia apriori numărul optim de elemente al substructurilor. Din acest punct de vedere, modelul specializat prezentat la § 4.2. este superior, un singur element de acest tip fiind suficient pentru modelarea corectă a buiandrugilor. Acestui element i se întrevăd și alte utilizări, de exemplu, la calculul tablierelor de pod cu grinzi longitudinale și transversale, deoarece poate fi modificat cu ușurință în vederea luării în considerație a rigidității la încovoiere după direcția secundară și a rigidității la torsiune a grinzilor.

Primită la redacție la 21 aprilie 1976

NOTAȚII

Ux, Vy — funcții care definesc cîmpul deplasărilor în cuprinsul elementului finit;
C (12) — vectorul coordonatelor generalizate;
Cn(10) — vectorul coordonatelor generalizate aferente deplasărilor nodale;
Ci (2) — vectorul coordonatelor generalizate suplimentare;
Δ(12) — vectorul deplasărilor generalizate;
Δn(10) — vectorul deplasărilor nodale;
Δc(8) — vectorul deplasărilor nodurilor de contur;
$B(3\times12)$ — matricea de influență a deplasărilor generalizate asupra deformațiilor specifice;
$D(3\times3)$ — matricea de elasticitate pentru o șaibă de grosime t, cu ortotropie de material, în stare plană de eforturi;
K, Kr, Kbr — matrice de rigiditate.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Agent și colab. *Calculul rigidităților diafragmelor pline și cu goluri la călduri etajate*, I, St. cerc. mec. apl., **34**, *4*, 521–534 (1975).
2. R. S. Al-Mahaidi, A. H. Nilson, *Coupled Shear Wall Analysis by Langrange Multipliers*, Journal of the Structural Division, ASCE, 101, No ST11, 1975, p. 2359–2366.
3. C. Avram și colab., *Considerații asupra diafragmelor-cadre din beton armat*, Rev. construcțiilor, *1* (1967).

4. G. A. Butlin, C. M. McMillan, *An Improved Finite Element for Analysis of Plane Coupled Shear Wals*, Civil Engineering and Public Works Review, December, 1971, p. 13—17.
5. W. E. Carroll, R. M. Barker, *A theorem for optimum finite-element idealization*. Int J. Solids Struct., *9*, 883 (1973).
6. R.D. Cook, *Improved Two-Dimensional Finite Element*, Journal of the Structural Division, ASCE, 100, No ST9, 1974, p. 1851—1863.
7. R. D. Cook, *Avoidance of Parastic Shear in Plane Element*, Journal of the Structural Division, ASCE, 101, No ST6, 1975, p. 1239—1253.
8. A. Coull, B. Stafford Smith, *Structural Analysis of Tall Concrete Buildings*, Proc. Inst Civ. Engrs., 55, March, 1973, p. 151—166.
9. B. Demidovitch, I. Maron, *Éléments de calcul numerique*, Editions Mir-Moscou, 1973.
10. M. Diaconu, *Determinarea stării de eforturi în diafragmele cu goluri cînd se ia în considerație și influența forței tăietoare*, Construcții, **12**, 25—36 (1971).
11. W. S. Doyle, R. L. Harrison, *Explicit Triangular Bending Element Matrix*, Journal of the Structural Division, ASCE, 100, No ST7, 1974, p. 1459—1472.
12. J. G. Ergatoudis et al., *Curved, Isoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis*, Int. J. Solids Struct., *4*, 31—42 (1968).
13. Filonenko-Borodich, *Theory of Elasticity*, Mir Publishers, Moscow, 1968.
14. V. Florian, *Calculul diafragmelor cu goluri cu ajutorul calculatoarelor electronice cifrice*, Rev. construcțiilor, *10—11* (1967).
15. A. Gheorghiu, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București, 1975.
16. I. Holland, *Fundamentals of the Finite Element Method*, Computers & Structures, *4*, 3—15 (1974).
17. E. Keintzel, *Metode simplificate pentru calculul construcțiilor multietajate*, Edit. tehnică, București, 1969.
18. E. Lerner, V. Mager, *Programe pentru calculul la solicitări seismice a structurilor de beton armat alcătuite din diafragme pline și cu goluri, cadre, diafragme și cadre*, A V-a conferință de betoane, Timișoara, 1972, vol. II, p. 599—620.
19. I. A. Mac Leod, *New Rectangular Finite Element for Shear Wall Analysis*, Journal of the Structural Division, ASCE, 95, No ST3, 1969, p. 399—409.
20. Ch. Massonnet și colab., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Ed. Tehnică, București, 1974.
21. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, Edit. tehnică, București, 1959.
22. R. J. Melosh, *Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method*, J. Am. Inst. Aeron. Astron., **1**, 7, 1631—1637 (1963).
23. C. Meyer, *Solution of Linear Equations-State-of-the-Art*, Journal of the Structural Division, ASCE, 99, No ST7, 1973, p. 1507—1526.
24. G. Onu, discuție la ref. 2, Journal of the Structural Division, ASCE, 102, No ST10, 1976, p. 2089—2091.
25. G. Onu, *Modele rectangulare pentru starea plană de eforturi*, St. cerc. mec. apl., **35**, *2*, 243—263 (1976).
26. T. H. H. Pian, *Derivation of Elements Stiffness Matrices*, J. Am. Inst. Aeron. Astron, **2**, *3*, 576—577 (1964).
27. M. G. Pole, discuție la ref. 19, Journal of the Structural Division, ASCE, 96, No ST1, 1970, p. 140—143.
28. R. Prișcu și colab., *Alegerea secțiunii transversale a docului uscat de reparații Mangalia*, Hidrotehnica, **20**, *3* (1975).
29. J. S. Przemienieski, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
30. H. Sandi, *Metode matriceale în mecanica structurilor*, Edit. tehnică, București, 1976.
31. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I, Edit. Academiei R. S. România, București, 1961.
32. B. S. Uhov, *Rasciot soorujenii i osnovanii metodom konecinih elementov*, Fizmatgiz, Moskwa, 1973.
33. V. Visarion, R. Iovănescu, *Modelul elementului diferențial finit matrice de transfer în problemele bidimensionale ale Teoriei elasticității* Sr. cerc mec. apl., *6* (1973).
34. E. L. Wilson, *SOLID SAP — A Static Analysis Program for Three Dimensional Solid Structures*, Report to Denver Mining Research Center U.S. Departament of the Interior Bureau of Mines, September, 1971.
35. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London 1971.

SINTEZA MECANISMELOR PENTRU REALIZAREA POZIȚIILOR ASOCIATE CU AJUTORUL OPERATORILOR MATRICEALI *)

de ION SIMIONESCU și CEZAR DUCA
Institutul politehnic Iași

Se prezintă o metodă generală de sinteză a mecanismelor pentru realizarea pozițiilor asociate. Metoda este bazată pe algebra matriceală și este adaptată pentru a fi utilizată cu ajutorul unui calculator numeric.
Descrierea aplicării metodei de sinteză propusă este făcută asupra mecanismului spațial monocontur cu șapte elemente cu mișcare constrînsă, dar poate fi utilizată la sinteza oricăror tipuri de mecanisme simplu închise sau policontur.

1. Una din problemele importante ale sintezei mecanismelor cu bare articulate este realizarea pozițiilor asociate între două dintre elementele acestora, de regulă între elementul conducător și cel considerat condus.

Numărul maxim de poziții asociate ce pot fi realizate de un mecanism rezultă din condiția unicității și exactității soluției de sinteză și depinde evident de complexitatea mecanismului.

Această condiție este realizată atunci cînd numărul de ecuații din sistemul ale cărui soluții reprezintă parametrii necunoscuți ai mecanismului este egal cu numărul necunoscutelor. Cînd numărul de poziții asociate impus este mai mic decît cel maxim astfel calculat, unele dintre dimensiunile elementelor mecanismului se impun inițial în mod convenabil; dacă din contră, numărul pozițiilor impuse depășește maximum calculat, este posibil a se găsi o soluție a problemei care să corespundă numai aproximativ cerințelor.

Pozițiile asociate ale elementului considerat condus cu ale elementului conducător pot fi poziții relativ asociate sau poziții absolut asociate. Dacă baza de referință a pozițiilor este batiul mecanismului, atunci aceste poziții sînt numite absolut asociate, iar atunci cînd baza de referință este arbitrară, aceste poziții sînt considerate relativ asociate.

2. O transformare afină în spațiul tridimensional este definită analitic prin funcțiile x_2, y_2, z_2 de x_1, y_1, z_1. Exprimînd aceasta printr-o ecuație matriceală omogenă, avem

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

*) Lucrare prezentată la cea de-a IV-a Conferință de mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

sau

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Vmatrix} = \|A\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}. \tag{1'}$$

Fie două elemente consecutive aparținînd unui mecanism, asociate deci între ele printr-o cuplă cinematică. Solidare cu cele două elemente se aleg două sisteme de axe de coordonate. Între coordonatele unui punct ce aparține primului dintre elemente și coordonatele aceluiași punct considerat pe cel de-al doilea element se poate stabili o corespondență biunivocă, definită de ecuația (1). Matricea de transformare A conține șase parametri independenți, între care se mai stabilesc un număr de relații impuse de caracterul legăturii prin cupla cinematică și egal cu clasa cuplei.

Dacă ecuația de transformare se scrie repetat de-a lungul unui contur închis format din m elemente, sistemul de axe de coordonate $m+1$ fiind identic cu sistemul de coordonate (1), produsul tuturor matricelor de transformare este egal cu matricea unitate :

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots A_m = I. \tag{2}$$

Această ecuație este cunoscută sub numele de ecuația matriceală de închidere a conturului.

Alegerea convenabilă a poziției sistemelor de axe de coordonate solidare cu elementele mecanismului reduce numărul parametrilor independenți ai matricei de transformare de la șase la patru. Astfel dacă :

— axa z_i este axa caracteristică a cuplei i, iar

— axa x_i este perpendiculara comună de la axa z_{i-1} la z_i, atunci cei patru parametri sînt :

a_i — lungimea perpendicularei comune de la z_i la z_{i+1},

s_i — distanța de-a lungul axei z_i de la x_i la x_{i+1},

α_i — unghiul de încrucișare între axele z_i și z_{i+1},

θ_i — unghiul axelor x_i și x_{i+1} măsurat pozitiv în lungul axei z_i.

În această situație, operatorul matriceal de transformare A_i are forma

$$A_i = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i \cos\theta_i & \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i \\ a_i \sin\theta_i & \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i \\ s_i & 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Dacă acești patru parametri au fost stabiliți pentru fiecare cuplă cinematică a mecanismului, geometria acestuia este complet determi-

nată și poate fi reprezentată simbolic (R. S. Hartenberg, J. Denavit) printr-o ecuație de forma

$$R_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ \alpha_1 \\ \theta_1 \\ s_1 \end{vmatrix} P_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ \alpha_2 \\ \theta_2 \\ s_2 \end{vmatrix} \ldots R_i \begin{vmatrix} a_i \\ \alpha_i \\ \theta_i \\ s_i \end{vmatrix} \ldots R_m \begin{vmatrix} a_m \\ \alpha_m \\ \theta_m \\ s_m \end{vmatrix} = I, \tag{4}$$

unde R_1 indică cupla de rotație 1 cu parametrul variabil θ_1, P_2 indică cupla de translație 2 cu parametrul variabil s_2 etc.

Cupla cilindrică, cupla sferică sau alte cuple de clasă mai mică decît cinci pot fi reduse la combinații de cuple de rotație sau prismatice ce asociază elemente așezate convenabil.

3. Fie un mecanism spațial simplu închis format din șapte elemente cu mișcare constrînsă. Fiecare element este complet definit prin trei din cele patru mărimi mai sus precizate, și anume :

— a_i, s_i, α_i în cazul elementelor la care cupla i este o articulație,

— a_j, α_j, θ_j în cazul elementelor la care cupla j este prismatică.

Un astfel de mecanism este deci complet definit din punct de vedere al dimensiunilor elementelor sale prin $3 \times 7 = 21$ mărimi.

Avînd în vedere că se urmărește sinteza mecanismului, următoarea observație este necesar a fi făcută. Dacă cuplele conducătoare și de ieșire sînt articulații, există o infinitate de soluții ale problemei, adică o infinitate de mecanisme asemenea care realizează pozițiile asociate impuse elementelor conducător și condus. Găsirea unei soluții implică precizarea uneia dintre dimensiunile liniare ale unui element. Dacă una din cele două cuple, conducătoare sau de ieșire, este prismatică, atunci se poate admite fără particularizarea problemei că distanța a_7 (sau a_1), respectiv a_6 (sau a_7) este nulă. Acestea fiind precizate, numărul total al dimensiunilor ce trebuie calculate în vederea sintezei unui astfel de mecanism pentru realizarea de poziții asociate este de 20.

De asemenea, se observă că dacă prin datele inițiale nu se precizează cel puțin o lungime, fie o dimensiune a unui element, fie poziția elementului conducător sau condus (asociat batiului printr-o cuplă cinematică prismatică), sistemul de ecuații obținut — orice metodă ar fi folosită — este omogen și admite în general numai soluția banală. O soluție nebanală este găsită numai în anumite condiții, și în acest caz există evident o infinitate de soluții corespunzătoare unor mecanisme asemenea.

Pentru fiecare poziție a mecanismului se poate scrie o ecuație matriceală de închidere (2) echivalentă cu șase ecuații algebrice distincte. Această ecuație matriceală introduce suplimentar încă șapte mărimi — parametrii variabili ai cuplelor cinematice — θ_i sau s_j.

În cazul proiectării unui mecanism pentru realizarea pozițiilor absolut asociate, parametrii variabili ai cuplelor conducătoare și de ieșire

sînt impuși, deci pentru n poziții ale mecanismului pot fi scrise $6n$ ecuații care conțin $20 + 5n$ necunoscute.

Soluția ecuației $6n = 20 + 5n$ reprezintă numărul maxim de poziții absolut asociate, $n = 20$, ce pot fi impuse elementelor acestui tip de mecanism spațial.

La proiectarea unui mecanism pentru realizarea de poziții relativ asociate, la cele $6n$ ecuații algebrice ce derivă din ecuațiile de închidere se mai adaugă $2(n - 1)$ ecuații de legătură între variabilele cuplelor conducătoare și de ieșire. Soluția ecuației $2(n - 1) + 6n = 20 + 7n$ este $n = 22$, și reprezintă numărul maxim de poziții relativ asociate ale elementelor adiacente batiului unui mecanism spațial simplu închis format din șapte elemente cu mișcare constrînsă.

4. Rezolvarea sistemului de ecuații rezultat din scrierea repetată a ecuației de închidere pentru cele n poziții ale mecanismului se poate realiza utilizînd metoda Newton-Raphson. Este necesară în acest scop dezvoltarea în serie Taylor a matricei de transformare A_i pornind de la o estimație inițială a necunoscutelor $\bar{a}_i$, $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\theta}_i$, $\bar{s}_i$, cupla i fiind considerată o articulație,

$$A_i = \bar{A}_i + \left[\frac{\partial A_i}{\partial a_i}\bigg|_{a_i=\bar{a}_i}\right]\cdot \mathrm{d}a_i + \left[\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_i}\bigg|_{\alpha_i=\bar{\alpha}_i}\right]\mathrm{d}\alpha_i + \tag{5}$$

$$+\left[\frac{\partial A_i}{\partial \theta_{in}}\bigg|_{\theta_{in}=\bar{\theta}_{in}}\right]\mathrm{d}\theta_{in} + \left[\frac{\partial A_i}{\partial s_i}\bigg|_{s_i=\bar{s}_i}\right]\mathrm{d}s_i.$$

Notînd faptul că problema se rezolvă în vederea folosirii unui calculator numeric, introducerea unor operatori matriceali de derivare este deosebit de utilă pentru a realiza derivarea indicată prin următoarea definiție :

$$\frac{\partial A_i}{\partial a_i}\bigg|_{a_i=\bar{a}_i} = \bar{A}_i\, Q_a.$$

Sub această definiție, matricea Q_a este găsită a fi următoarea :

$$Q_a = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

De asemenea,

$$\left.\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha_i=\bar{\alpha}_i} = \bar{A}_i Q_\alpha, \text{ unde } Q_\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\left.\frac{\partial A_i}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_i=\bar{\theta}_i} = Q_\theta \bar{A}_i, \text{ unde } Q_\theta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\left.\frac{\partial A_i}{\partial s_i}\right|_{s_i=\bar{s}_i} = Q_s \bar{A}_i, \text{ unde } Q_s = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Cu aceste expresii, ecuația (5) devine :

$$A_i = \bar{A}_i + \bar{A}_i Q_a \, \mathrm{d}a_i + \bar{A}_i Q_\alpha \, \mathrm{d}\alpha_i + Q_\theta \bar{A}_i \, \mathrm{d}\theta_{in} + Q_s \bar{A}_i \, \mathrm{d}s_i. \qquad (5')$$

Pentru cuplele conducătoare și de ieșire, la care parametrii variabili sînt impuși, ecuația de mai sus se modifică în mod corespunzător. Înlocuind (5′) în (2) și efectuînd înmulțirile, se obține o ecuație foarte lungă și complicată. Oricum, în concordanță cu ideea procesului iterativ, toți termenii de ordin superior pot fi neglijați. Pentru simplificarea expunerii se presupune că toate cuplele cinematice ale mecanismului sînt articulații și că dimensiunea a_7 este impusă. Astfel, pentru poziția n a mecanismului ce se proiectează în vederea realizării pozițiilor absolut asociate, ecuația de închidere devine :

$$\sum_{i=1}^{6} C_{in} \, \mathrm{d}a_i + \sum_{i=1}^{7} D_{in} \, \mathrm{d}\alpha_i + \sum_{i=2}^{6} E_{in} \, \mathrm{d}\theta_{in} + \sum_{i=1}^{7} F_{in} \, \mathrm{d}s_i = I - B_n, \qquad (6)$$

unde

$$C_{in} = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \cdots \bar{A}_{in} \cdot Q_a \cdot \bar{A}_{i+1,n} \cdots \bar{A}_{7n},$$

$$D_{in} = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \cdots \bar{A}_{in} \cdot Q_\alpha \cdot \bar{A}_{i+1,n} \cdots \bar{A}_{7n},$$

$$E_{in} = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \cdots \bar{A}_{i-1,n} \, Q_\theta \cdot \bar{A}_{in} \cdots \bar{A}_{7n},$$

$$F_{in} = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \cdots \bar{A}_{i-1,n} \cdot Q_s \cdot \bar{A}_{in} \cdots \bar{A}_{7n},$$

$$B_n = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \cdots \bar{A}_{7n}$$

Scrierea desfășurată a ecuației (6) și egalarea matricei din partea stîngă cu cea din partea dreaptă a semnului egal, element cu element, conduce la un sistem format din 12 ecuații liniare dintre care șase trebuie să fie eliminate deoarece sînt fie identități, fie se reduc la celelalte șase. Înainte de a stabili care ecuații se elimină, o serie de observații sînt necesar a fi făcute cu privire la matricele de transformare, și anume :

— ultimele trei elemente din prima linie sînt nule,

— mărimile care caracterizează translația celor două sisteme de axe de coordonate, distanțele a_i și s_i, sînt conținute în prima coloană,

— submatricea rotațională 3×3 este ortogonală.

De asemenea, se observă că operatorii de derivare Q au elementele primei linii nule, iar submatricele 3×3 formate din elementele Q_{ij} $(i, j = 2, 4)$ sînt antisimetrice.

Este cunoscut faptul că dacă H este o matrice nesingulară, H^t este transpusa ei, iar Q este o matrice antisimetrică, atunci produsul

$$H_1 = H \cdot Q \cdot H^t.$$

este, de asemenea, o matrice antisimetrică.

Acestea fiind spuse, o serie de modificări pot fi făcute asupra matricelor produs C_{in}, D_{in}, E_{in}, F_{in}. Astfel :

$$C_{in} = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{in} \cdot Q_a \cdot \bar{A}_{i+1,n} \ldots \bar{A}_{7n} \cdot (\bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots A_{in})^{-1} \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{in}$$

sau

$$C_{in} = \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{in} \cdot Q_a \cdot (\bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{in})^{-1} \bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{7n}$$

Dar

$$(\bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{in})^{-1} = (\bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{in})^t$$

și

$$\bar{A}_{1n} \cdot \bar{A}_{2n} \ldots \bar{A}_{7n} \cong I$$

dacă estimațiile inițiale ale necunoscutelor sînt suficient de exacte, deci submatricea rotațională 3×3 din compunerea matricei produs C_{in} este antisimetrică. În mod analog se poate demonstra că și matricele D_{in}, E_{in}, F_{in} beneficiază de această remarabilă proprietate.

Avînd în vedere cele de mai sus, este evident faptul că din ecuația matriceală (6) este suficient a se reține numai cele șase ecuații care rezultă din egalarea termenilor situați sub diagonala principală. Dacă, așa cum s-a presupus, estimațiile inițiale sînt suficient de exacte, atunci erorile $\mathrm{d}a_i$, $\mathrm{d}\alpha_i$, $\mathrm{d}\theta_{in}$, $\mathrm{d}s_i$ tind către zero, iar toată partea stîngă a ecuației (6) tinde și ea către zero. Același lucru trebuie să se întîmple și cu partea dreaptă a ecuației. Diferența $I - B_n$ tinde către zero dacă și numai dacă matricea produs B_n converge către matricea unitate. Faptul ca elementele de sub diagonala principală să tindă către zero a fost deja impus. Pentru a forța ca și elementele diagonalei principale a matricei produs B_n să tindă către unitate este necesară adăugarea a încă trei ecuații suplimentare

la cele mai sus precizate, și anume cele care rezultă din egalitatea ultimelor trei elemente ale diagonalei principale a matricelor conținute în ecuația (6). Aceasta înseamnă că pentru cele n poziții absolut asociate vor rezulta de fapt $9n$ ecuații cu $20 + 5n$ necunoscute. Deoarece rădăcinile acestui sistem sînt erorile de estimare a parametrilor necunoscuți ai mecanismului și deoarece toți termenii de ordin superior au fost neglijați în calculele făcute pînă aici, o soluție unică — matematic exactă — pentru toate aceste ecuații, nu poate fi obținută. Totuși, aplicarea metodei celor mai mici pătrate permite găsirea unei soluții care conțin erori cu totul neimportante. Rădăcinile acestui sistem al erorilor îmbunătățesc estimațiile inițiale ale parametrilor necunoscuți ai mecanismului și operația se repetă pînă la obținerea preciziei dorite.

La sinteza unui mecanism de același tip pentru realizarea pozițiilor relativ asociate, ecuația de închidere pentru poziția n a mecanismului devine :

$$\sum_{i=1}^{6} C_{in}\,\mathrm{d}a_i + \sum_{i=1}^{7} D_{in}\,\mathrm{d}\alpha_i + \sum_{i=1}^{7} E_{in}\,\mathrm{d}\theta_{in} + \sum_{i=1}^{7} F_{in}\,\mathrm{d}s_i = I - B_n. \qquad (6a)$$

La aceasta se mai adaugă, evident,

$$\theta_{1n} - \theta_{1.n-1} = d_{1n},$$

$$\theta_{7n} - \theta_{7.n-1} = d_{7n} \qquad (n = 2,3,\ldots,7)$$

sau

$$\mathrm{d}\theta_{1n} - \mathrm{d}\theta_{1,n-1} = d_{1n} - \bar{\theta}_{1n} + \bar{\theta}_{1,n-1},$$

$$\mathrm{d}\theta_{7n} - \mathrm{d}\theta_{7,n-1} = d_{7n} - \bar{\theta}_{7n} + \bar{\theta}_{7,n-1},$$

unde diferențele d_{1n} și d_{7n} sînt impuse prin condițiile inițiale de proiectare.

5. *Exemple*

I. *Sinteza mecanismului patrulater articulat plan pentru realizarea pozițiilor absolut asociate* (fig. 1).

Din condiția unicității și exactității soluției rezultă că numărul maxim de poziții absolut asociate ce pot fi realizate cu ajutorul acestui tip de mecanism este trei.

Ecuația de închidere pentru poziția n a mecanismului, scrisă sub formă simbolică, este în acest caz următoarea :

$$R_1\begin{vmatrix} \bar{a}_1 + \mathrm{d}a_1 \\ 0 \\ \theta_{1n} \\ 0 \end{vmatrix} R_2\begin{vmatrix} \bar{a}_2 + \mathrm{d}a_2 \\ 0 \\ \bar{\theta}_{2n} + \mathrm{d}\theta_{2n} \\ 0 \end{vmatrix} R_3\begin{vmatrix} \bar{a}_3 + \mathrm{d}a_3 \\ 0 \\ \bar{\theta}_{3n} + \mathrm{d}\theta_{3n} \\ 0 \end{vmatrix} R_4\begin{vmatrix} a_4 \\ 0 \\ \theta_{4n} \\ 0 \end{vmatrix} = I.$$

Ecuaţia (6) devine în acest caz particular:

$$\sum_{i=1}^{3} C_{in}\,da_i + \sum_{i=2}^{3} E_{in}\,d\theta_{in} = I - B_n,$$

unde

$$C_{in} = \bar{A}_{1n}\cdot\bar{A}_{2n}\ldots\bar{A}_{in}\cdot Q_a\cdot\bar{A}_{i+1.n}\ldots\bar{A}_{4n},$$

$$E_{in} = \bar{A}_{1n}\cdot\bar{A}_{2n}\ldots\bar{A}_{i-1.n}\cdot Q_\theta\cdot\bar{A}_{in}\ldots\bar{A}_{4n},$$

$$B_n = \bar{A}_{1n}\cdot\bar{A}_{2n}\,\bar{A}_{3n}\,\bar{A}_{4n}.$$

Impunînd valorile:

$$\theta_{11} = 300°,\ \theta_{12} = 280°,\ \theta_{13} = 260°,$$

$$\theta_{41} = 270°,\ \theta_{42} = 280°,\ \theta_{43} = 290°,$$

şi lungimea batiului $a_4 = 100$ mm, au rezultat următoarele dimensiuni pentru elementele mecanismului:

$$a_1 = 49{,}341 \text{ mm},$$

$$a_2 = 145{,}259 \text{ mm},$$

$$a_3 = 171,\ 279 \text{ mm}.$$

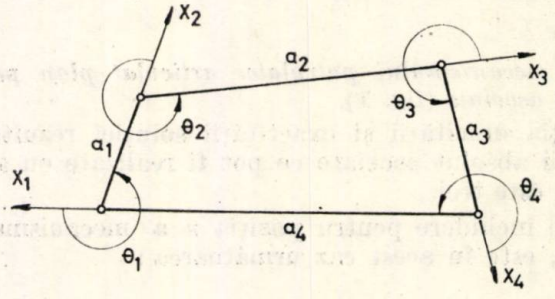


Fig. 1.

II. *Sinteza mecanismului patrulater articulat plan pentru realizarea poziţiilor relativ asociate.*

Din aceeaşi condiţie a unicităţii şi exactităţii soluţiei rezultă că numărul maxim de poziţii relativ asociate ce se pot realiza cu ajutorul

acestui tip de mecanism este cinci. Ecuația de închidere, scrisă sub formă simbolică, este următoarea :

$$R_1 \begin{vmatrix} \bar{a}_1 + \mathrm{d}a_1 \\ 0 \\ \bar{\theta}_{1n} + \mathrm{d}\theta_{1n} \\ 0 \end{vmatrix} R_2 \begin{vmatrix} \bar{a}_2 + \mathrm{d}a_2 \\ 0 \\ \bar{\theta}_{2n} + \mathrm{d}\theta_{2n} \\ 0 \end{vmatrix} R_3 \begin{vmatrix} \bar{a}_3 + \mathrm{d}a_3 \\ 0 \\ \bar{\theta}_{3n} + \mathrm{d}\theta_{3n} \\ 0 \end{vmatrix} R_4 \begin{vmatrix} a_4 \\ 0 \\ \bar{\theta}_{4n} + \mathrm{d}\theta_{4n} \\ 0 \end{vmatrix} = I,$$

la care se adaugă

$$\mathrm{d}\theta_{1n} - \mathrm{d}\theta_{1,n-1} = d_{1n} - \bar{\theta}_{1n} + \bar{\theta}_{1,n-1},$$

$$\mathrm{d}\theta_{4n} - \mathrm{d}\theta_{4,n-1}, = d_{4n} - \bar{\theta}_{4n} + \bar{\theta}_{4,n-1}.$$

Ecuația (6) este în acest caz :

$$\sum_{i=1}^{3} C_{in}\,\mathrm{d}a_i + \sum_{i=1}^{4} E_{in}\mathrm{d}\theta_{in} = I - B_n,$$

unde

C_{in} și E_{in} au semnificațiile de mai sus.

Impunînd valorile

$$d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{15} = -20°,$$

$$d_{42} = 5°, \quad d_{43} = 10°, \quad d_{44} = 15°, \quad d_{45} = 20°,$$

și lungimea batiului $a_4 = 100$ mm, au fost găsite următoarele dimensiuni ale elementelor mecanismului :

$$a_1 = 99{,}992 \text{ mm},$$

$$a_2 = 188{,}624 \text{ mm},$$

$$a_3 = 65{,}532 \text{ mm}.$$

Cele cinci poziții relativ asociate sînt realizate pentru următoarele valori ale variabilelor cuplelor conducătoare și de ieșire :

$$\theta_{11} = 30{,}003°, \quad \theta_{41} = 241{,}221°,$$

$$\theta_{12} = 10{,}003°, \quad \theta_{42} = 246{,}221°,$$

$$\theta_{13} = -9{,}997°, \quad \theta_{43} = 256{,}221°,$$

$$\theta_{14} = -29{,}997°, \quad \theta_{44} = 271{,}221°,$$

$$\theta_{15} = -49{,}997°, \quad \theta_{45} = 291{,}221°.$$

Erorile cu care aceste valori au fost calculate sînt mai mici decît 0,001 mm.

BIBLIOGRAFIE

1. R. S. HARTENBERG, J., DENAVIT, *Kinematic synthesis of linkages*, McGraw-Hill Book Company, 1964.
2. D. MANGERON, C., DRĂGAN, *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor*, Buletinul Inst. Polit. Iaşi, **III**(VII) 1975.
3. D. MANGERON, R. CHALEAT, C. DRĂGAN, *Teoria generală a aproximaţiilor succesive în studiul mecanismelor şi maşinilor prin noua metodă matriceală tensorială elaborată în vederea folosirii maşinilor electronice de calcul*, St. Cerc. Mec. Aplic., **20**, 5 (1965).
4. J. J. UICKER JR., J. DENAVIT. R. S. HARTENBERG, *An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms*, Trans. A.S.M.E., paper 63— WA — 45.
5. J. J. UICKER JR., *Displacement analysis of spatial mechanisms by an iterative method based on* 4×4 *matrices*, M. S. Thesis, Technological Institute, Evanston, Illinois, 1963.
6. J. J. UICKER JR., *Velocity and acceleration analysis of spatial mechanisms using* 4×4 *matrices*, Technological Institute, Evanston, Illinois, 1963.
7. CHR. PELECUDI, *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România, 1967.
8. CHR. PELECUDI, *Teoria mecanismelor spaţiale*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România, 1972.

CONTRIBUȚII LA ANALIZA CINEMATICĂ, PRIN METODE MATRICEALE, A MULTIPOLILOR TERMOCINEMATICI

de MIHAI BUCULEI
Universitatea din Craiova

În lucrare se indică o metodă de analiză matriceală a vitezelor și accelerațiilor multipolilor termocinematici. Exemplificarea metodei se face pentru diada RRR. Se consideră cazul general al unui cîmp plan nestaționar de temperaturi, indicîndu-se o metodă bazată pe transformări integrale, pentru determinarea cîmpurilor de temperaturi în bare. O exemplificare a condițiilor la limită se face pentru patrulaterul articulat.

1. INTRODUCERE

Problema analizei termocinematice este de o reală importanță pentru mecanismele care funcționează în medii fluide cu temperatură ridicată, ca și la mecanismele de mare precizie. În [9] se indică o metodă de analiză pozițională și se trag concluzii asupra cîmpurilor de viteze și accelerații pentru un cîmp termic exterior constant.

Lucrarea de față își propune să abordeze studiul matriceal al vitezelor și accelerațiilor în cazul cîmpurilor termice exterioare nestaționare, limitîndu-se la cazul mecanismelor plane de familia a III-a.

2. CALCULUL CÎMPURILOR DE TEMPERATURI ÎN ELEMENTELE MULTIPOLILOR

Se consideră problema generală a determinării cîmpurilor de temperaturi într-o bară în mișcare plană.

Fie $T = T(P, t)$ cîmpul nestaționar de temperaturi în care se mișcă bara $(P \in R^2)$.

Cazul 1. Bară cu secțiune circulară

Se consideră problema cu simetrie axială, $T = T(r, z, t)$.

Ecuația de transmisie a căldurii, scrisă în coordonate cilindrice, devine, după aplicarea transformatei Laplace, unilaterale în raport cu timpul :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(r, z, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{T}(r, z, p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}(r, z, p)}{\partial z^2} - \\ - \frac{1}{a} \cdot [p \cdot \bar{T}(r, z, p) - f(r, z)] = 0, \tag{1}$$

unde

(r, z) reprezintă coordonatele cilindrice: $r \in [0; R]$, $z \in [0; l]$, R fiind raza secţiunii transversale a barei, iar l lungimea ei;

a — difuzivitatea de temperatură;

$f(r, z) = T(r, z, o)$ — condiţia iniţială.

S-a notat:

$$\bar{T}(r, z, p) = \int_0^\infty T(r, z, t) \cdot e^{-pt} \cdot dt. \tag{1'}$$

Aplicînd ecuaţiei (1) transformata Hankel finită în raport cu r, se obţine

$$\frac{d^2\bar{T}^*}{dz^2} - \left(\frac{p}{a} + \alpha_n^2\right) \cdot \bar{T}^* = - R\alpha_n \cdot \bar{T}(R, p, z) \cdot J_0'(R\alpha_n) + \frac{f^*(\alpha_n, z)}{a}, \tag{2}$$

unde

α_n sînt rădăcinile ecuaţiei $J_0(R\alpha_n) = 0$, J_0 fiind funcţia Bessel de prima speţă şi de ordinul zero.

S-a notat:

$$\bar{T}^*(\alpha, z, p) = \int_0^R \bar{T}(r, z, p) \cdot J_0(r\alpha) \cdot dr\,; \quad f^*(\alpha_n, z) = \int_0^R f(r, z) \cdot J_0(r\alpha)\, dr. \tag{2'}$$

Soluţia ecuaţiei (2) este

$$\bar{T}^*(\alpha_n, p, z) = \left\{ \frac{1}{2a \cdot \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}} \cdot \left[- Ra\alpha_n \cdot J_0'(R\alpha_n) \times \right.\right.$$

$$\times \int \bar{T}(R, p, z) \cdot \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}\, z \right) dz + \int f^*(\alpha_n, z) \times$$

$$\left.\left. \times \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} \cdot z \right) dz \right] + C_1 \right\} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}\, z \right) -$$

$$- \left\{ \frac{1}{2a \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}} \cdot \left[- Ra\alpha_n \cdot J_0'(R\alpha_n) \cdot \int \bar{T}(R, p, z) \times \right.\right.$$

$$\times \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}\, z \right) dz + \int f^*(\alpha_n, z) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}\, z \right) dz \Big] +$$

$$\left. + C_2 \right\} \cdot \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}\, z \right). \tag{3}$$

Considerînd condiţia iniţială $f(r, z) = T_0$, frecvent întîlnită în aplicaţiile curente, şi inversînd transformata Hankel finită în (3), se obţine cîmpul de temperaturi în bară, în transformata sa Laplace unilaterală

$$\bar{T}(r, p, z) = \frac{2}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{1}{2a \cdot \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}} \cdot \left[-Ra\,\alpha_n \cdot J_0'(R\alpha_n) \cdot \int \bar{T}(R, p, z) \times \right. \right. \right.$$

$$\times \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} z \right) \cdot dz - \frac{RT_0\, J_1(R\alpha_n)}{\alpha_n \cdot \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}} \times$$

$$\left. \left. \times \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} z \right) \right] + C_1(p, \alpha_n) \right\} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} z \right) -$$

$$- \left\{ \frac{1}{2a \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}} \cdot \left[- Ra\alpha_n \cdot J_0'(R\alpha_n) \times \int \bar{T}(R, p, z) \times \right. \right.$$

$$\times \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} \cdot z \right) dz + \frac{RT_0}{\alpha_n} \cdot \frac{J_1(R\alpha_n)}{\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2}} \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} z \right) \Bigg] +$$

$$\left. + C_2(p, \alpha_n) \right\} \cdot \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{a} + \alpha_n^2} z \right) \Bigg\} \Bigg\} \cdot \frac{J_0(r\alpha_n)}{[J_0'(R\alpha_n)]^2}, \qquad (4)$$

unde J_1 este funcţia Bessel de prima speţă şi de ordinul I.

Calculul „constantelor" $C_1(p, \alpha_n)$ şi $C_2(p, \alpha_n)$ se face pe baza condiţiilor la limită aplicate întregului lanţ cinematic. Se consideră, spre exemplu, mecanismul patrulater articulat (fig. 1.).

Fie $T_i(r_i, z_i, t)$ cîmpurile de temperaturi în bare ($i = 1, 2, 3$) şi fie $T_b(t)$ cîmpul de temperaturi în baza mecanismului.

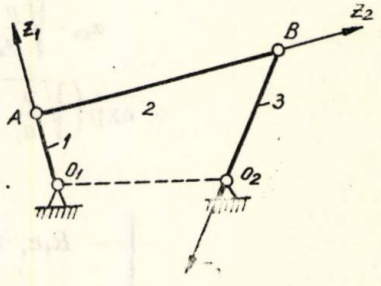


Fig. 1. — Mecanism patrulater articulat.

Se pot scrie condiţiile la limită :

$$T_1(r_1, l_1, t) = T_2(r_2, 0, t); \quad T_2(r_2, l_2, t) = T_3(r_3, 0, t),$$

$$T_3(r_3, l_3, t) = T_b(t); \; T_1(r_1, 0, t) = T_b(t),$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1(r_1, l_1, t)}{\partial z_1} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2(r_2, 0, t)}{\partial z_2},$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2(r_2, l_2, t)}{\partial z_2} = \lambda_3 \cdot \frac{\partial T_3(r_3, 0, t)}{\partial z_3}, \qquad (5)$$

unde

λ_1, λ_2 sînt coeficienţii de conductibilitate termică în barele *1* şi, respectiv, *2*;

$r_i \in [0\,;\ R_i]$, R_i fiind raza secţiunii transversale în bara $i (i = 1, 2, 3)$;

$z_i \in [0\,;\ l_i]$, l_i fiind lungimea barei i $(i = 1, 2, 3)$.

Folosind relaţia (3), se poate scrie

$$\bar{T}_i^*(\alpha_{in}, p, z_i) = C_{i1} \cdot f_i(\alpha_{in}, p, z_i) + C_{i2} \cdot g_i(\alpha_{in}, p, z_i) + h_i(\alpha_{in}, p, z_i) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

unde

α_{in} sînt rădăcinile ecuaţiei transcendente $J_0(R_i \alpha_{in}) = 0$,

J_0 fiind funcţia Bessel de prima speţă şi de ordinul zero;

$$f_i(\alpha_{in}, p, z_i) = \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right),$$

$$g_i(\alpha,\ p,\ z_i) = \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right),$$

$$h_i(\alpha_{in}, p, z_i) = \frac{1}{2a_i \cdot \sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2}} \cdot \left[- R_i a_i \cdot \alpha_{in} \cdot J_0'(R_i \alpha_{in}) \times \right.$$

$$\times \int \bar{T}_i(R_i, p, z_i) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right) \cdot \mathrm{d}z_i -$$

$$- \frac{R_i \cdot T_0 \cdot J_1(R_i \cdot \alpha_{in})}{\alpha_{in} \cdot \sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right) \Bigg] \times$$

$$\times \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right) - \frac{1}{2a_i \cdot \sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2}} \times$$

$$\times \left[- R_i a_i \cdot \alpha_{in} \cdot J_0'(R_i \alpha_{in}) \cdot \int \bar{T}_i(R_i, p, z_i) \times \right.$$

$$\times \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right) \cdot \mathrm{d}z_i + \frac{R_i T_0}{\alpha_{in}} \cdot \frac{J_1(R_i \alpha_{in})}{\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2}} \times$$

$$\left. \times \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right) \right] \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_i} + \alpha_{in}^2} \cdot z_i\right);$$

$a_i (i = 1, 2, 3)$ fiind difuzivitatea de temperatură în bara i

Aplicînd condițiilor la limită (5) succesiv transformata Laplace unilaterală și transformata Hankel finită, se obține următorul sistem pentru determinarea „constantelor" C_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$.

$$C_{11} \cdot f_1(\alpha_{1n}, p, l_1) + C_{12} \cdot g_1(\alpha_{1n}, p, l_1) + h_1(\alpha_{1n}, p, l_1) =$$

$$= C_{21} \cdot f_2(\alpha_{2n}, p, 0) + C_{22} \cdot g_2(\alpha_{2n}, p, 0) + h_2(\alpha_{2n}, p, 0),$$

$$C_{21} \cdot f_2(\alpha_{2n}, p, l_2) + C_{22} \cdot g_2(\alpha_{2n}, p, l_2) + h_2(\alpha_{2n}, p, l_2) =$$

$$= C_{31} \cdot f_3(\alpha_{3n}, p, 0) + C_{32} \cdot g_3(\alpha_{3n}, p, 0) + h_3(\alpha_{3n}, p, 0),$$

$$C_{31} \cdot f_3(\alpha_{3n}, p, l_3) + C_{32} \cdot g_3(\alpha_{3n}, p, l_3) + h_3(\alpha_{3n}, p, l_3) =$$

$$= \frac{R_3}{\alpha_{3n}} \cdot J_1(R_3\alpha_{3n}) \cdot \overline{T}_b(p),$$

$$C_{11} \cdot f_1(\alpha_{1n}, p, 0) + C_{12} \cdot g_1(\alpha_{1n}, p, 0) + h_1(\alpha_{1n}, p, 0) =$$

$$= \frac{R_1}{\alpha_{1n}} \cdot J_1(R_1\alpha_{1n}) \cdot \overline{T}_b(p), \tag{7}$$

$$\lambda_1 \cdot C_{11} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(\alpha_{1n}, p, l_1) + \lambda_1 \cdot C_{12} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z_1}(\alpha_{1n}, p, l_1) +$$

$$+ \lambda_1 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial z_1}(\alpha_{1n}, p\ l_1) = \lambda_2 \cdot C_{21} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(\alpha_{2n}, p, 0) +$$

$$+ \lambda_2 \cdot C_{22} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z_2}(\alpha_{2n}, p, 0) + \lambda_2 \cdot \frac{\partial h_2}{\partial z_2}(\alpha_{2n}, p, 0),$$

$$\lambda_2 \cdot C_{21} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(\alpha_{2n}, p, l_2) + \lambda_2 \cdot C_{22} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z_2}(\alpha_{2n}, p, l_2) +$$

$$+ \lambda_2 \cdot \frac{\partial h_2}{\partial z_2}(\alpha_{2n}, p, l_2) = \lambda_3 \cdot C_{31} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial z_3}(\alpha_{3n}, p, 0) +$$

$$+ \lambda_3 \cdot C_{32} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z_3}(\alpha_{3n}, p, 0) + \lambda_3 \cdot \frac{\partial h_3}{\partial z_3}(\alpha_{3n}, p, 0).$$

Determinarea cîmpurilor de temperaturi se face prin inversarea transformatei Laplace în (4), pentru condiții de frontieră date. Determinarea condițiilor pe frontieră, în temperaturi, necesită cunoașterea cîm-

pului termic plan nestaţionar de temperaturi şi mişcarea mecanismului. Asupra acestui aspect se va reveni ulterior.

Cazul 2. Bară cu secţiunea dreptunghiulară (fig. 2)

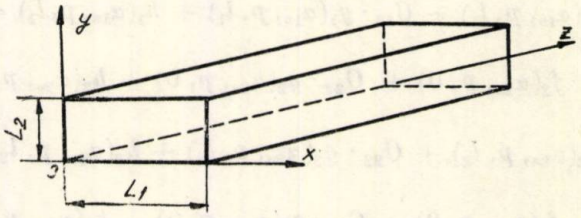


Fig. 2. — Bară cu secţiunea dreptunghiulară.

Ecuaţiei de transmisie a căldurii i se aplică succesiv transformata Laplace unilaterală în raport cu timpul şi transformata dublă Fourier finită în sinus în raport cu x şi y, obţinîndu-se ecuaţia ordinară :

$$\frac{d^2\bar{T}^{**}}{dz^2} - \left(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \frac{p}{a}\right) \cdot \bar{T}^{**} = \Phi(p,\ m,\ n,\ z), \tag{8}$$

unde

a este difuzivitatea de temperatură,

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L_1}\ ;\ \beta_m = \frac{m\pi}{L_2}\ ;\ x \in [0\ ;\ L_1]\ ;\ y \in [0\ ;\ L_2],$$

$$\bar{T}^{**}(m,\ n,\ p,\ z) = \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} \bar{T}(x, y, p, z) \cdot \sin\ \alpha_n x \cdot \sin\ \beta_m y\ dx\ dy,$$

$$\Phi(p,\ m,\ n,\ z) = -\ \alpha_n \cdot \int_0^{L_2} [\bar{T}(p,\ 0,\ y,\ z) - (-1)^n \cdot \bar{T}(p,\ L_1,\ y,\ z)] \times$$

$$\times \sin\ \beta_m y\ dy\ -\ \beta_m \cdot \int_0^{L_1} [\bar{T}(p,\ x,\ 0,\ z) - (-1)^n \cdot \bar{T}(p,\ x,\ L_2,\ z)] \times$$

$$\times\ \sin\ \alpha_n\ x dx - \frac{1}{a} \cdot f^{**}(m, n, z),$$

$f(x,\ y,\ z) = T(x, y, z, 0)$ — condiţia iniţială,

$$f^{**}(m, n, z) = \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x, y, z) \sin\ \alpha_n x \cdot \sin\ \beta_m y \cdot dx\ dy.$$

Calculul lui $\Phi(p,\ m,\ n,\ z)$ se reduce la cunoaşterea condiţiilor la limită în temperaturi.

Soluţia ecuaţiei (8) este

$$\bar{T}^{**}(m,n,p,z) = \left\{ \int \frac{\Phi(m,n,z,p)\cdot dz}{2\cdot\left[\exp\left(\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\frac{p}{a}}\cdot z\right)\right]\cdot\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\frac{p}{a}}} + C_1(p,m,n)\right\}\cdot\exp\left(\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\frac{p}{a}}\cdot z\right) +$$

$$+\left\{ -\int \frac{\Phi(z,p,m,n)\cdot dz}{2\cdot\left[\exp\left(-\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\frac{p}{a}}\cdot z\right)\right]\cdot\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\frac{p}{a}}} + C_2(p,m,n)\right\}\cdot\exp\left(-\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\frac{p}{a}}\cdot z\right). \quad (9)$$

Inversînd în (9) transformata dublă Fourier finită în sinus, se obţine cîmpul de temperaturi în transformata sa Laplace :

$$\bar{T}(x,y,z,p) = \frac{4}{L_1L_2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{T}^{*}(m,n,p,z)\cdot\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y. \quad (10)$$

Calculul „constantelor" $C_1(p,\alpha_n)$ şi $C_2(p,\alpha_n)$ se face similar ca la cazul 1. Considerînd cazul patrulaterului articulat, se pot scrie condiţiile la limită :

$$\begin{aligned}
&T_1(x_1,y_1,l_1,t) = T_2(0,x_2,y_2,t);\\
&T_2(x_2,y_2,l_2,t) = T_3(x_3,y_3,0,t),\\
&T_3(x_3,y_3,l_3,t) = T_b(t), \quad (11)\\
&T_1(x_1,y_1,0,t) = T_b(t),\\
&\lambda_1\cdot\frac{\partial T_1}{\partial z_1}(x_1,y_1,l_1,t) = \lambda_2\cdot\frac{\partial T_2}{\partial z_2}(x_2,y_2,0,t),\\
&\lambda_2\cdot\frac{\partial T_2}{\partial z_2}(x_2,y_2,l_2,t) = \lambda_3\cdot\frac{\partial T_3}{\partial z_3}(x_3,y_3,0,t),
\end{aligned}$$

unde

$T_i(x_i,y_i,z_i,t)$ reprezintă cîmpurile de temperaturi în bare ($i = 1, 2, 3$) ; $x_i \in [0 ; L_{1i}]$; $y_i \in [0 ; L_{2i}]$, L_{1i} şi L_{2i} fiind dimensiunile secţiunii transversale ale barei i($i = 1, 2, 3$) ; l_i — lungimea barei $i(i = 1, 2, 3)$.

Celelalte notaţii au semnificaţia de la cazul 1.

Se aplică condiţiilor la limită (11) succesiv transformata Laplace unilaterală şi transformata dublă Fourier finită în sinus, obţinîndu-se în final :

$$\begin{aligned}
&\bar{T}_1^{**}(m, n, p, l_1) = \bar{T}_2^{**}(m, n, 0, p),\\
&\bar{T}_2^{**}(m, n, p, l_2) = \bar{T}_3^{**}(m, n, 0, p),\\
&\bar{T}_3^{**}(m, n, l_3, p) = \bar{T}_b(p)\cdot \frac{\psi(m, n)}{\alpha_{3n}\cdot \beta_{3m}},\\
&\bar{T}_1^{**}(m, n, 0, p) = \bar{T}_b(p)\cdot \frac{\psi(m, n)}{\alpha_{1n}\cdot \beta_{1m}},\\
&\lambda_1\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_1}\bar{T}_1^{**}(m, n, l_1, p) = \lambda_2\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_2}\bar{T}_2^{**}(m, n, 0, p),\\
&\lambda_2\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_2}\bar{T}_2^{**}(m, n, l_2, p) = \lambda_3\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_3}\bar{T}_3^{**}(m, n, 0, p),
\end{aligned} \tag{12}$$

unde

$$\alpha_{in} = \frac{n\pi}{L_{1i}}\ ; \qquad \beta_{im} = \frac{m\pi}{L_{2i}},$$

$$\psi(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2p \text{ sau } m = 2p,\\ 4 & \text{pentru } n = 2p + 1 \text{ sau } m = 2p + 1. \end{cases}$$

$\bar{T}_i^{**}(m, n, z_i, p)$ exprimîndu-se liniar în raport cu C_{1i} şi C_{2i}, ca şi în cazul 1, relaţiile (12) permit calculul lui C_{1i} şi C_{2i} $(i = 1, 2, 3)$.

Determinarea cîmpurilor de temperaturi se face analog ca la cazul 1.

3. ANALIZA VITEZELOR MULTIPOLILOR TERMOCINEMATICI

Cîmpurile de temperaturi din elementele unui multipol produc o dilataţie a acestuia, care se repercutează asupra cîmpurilor de viteze şi de acceleraţii.

În cele ce urmează se consideră o conducţie unidimensională în barele rectilinii ale multipolului, în lungul axei longitudinale a acestora.

De aceea se face o mediere a cîmpului de temperaturi în secţiunea transversală a acestuia .

Fie $T(r, z, t)$ cîmpul de temperaturi într-un element cu secţiunea circulară, determinat anterior. $(r \in [0\ ;\ R])$.

Se va considera deci cîmpul de temperaturi mediat :

$$T_m(z, t) = \frac{2}{R^2}\int_0^R T(r, z, t)\cdot r\cdot \mathrm{d}r, \tag{13}$$

unde

R este raza secţiunii transversale în bară.

Fie $T(x, y, z, t)$ cîmpul de temperaturi într-un element cu secţiunea dreptunghiulară, determinat anterior.

Se va considera deci cîmpul de temperaturi mediat :

$$T_m(z, t) = \frac{\iint_{(\Sigma)} T(x, y, z, t)\, dx\, dy}{L_1 L_2}, \tag{14}$$

unde L_1 şi L_2 sînt dimensiunile secţiunii transversale ;

$$(\Sigma) = [0 ; L_1] \times [0 ; L_2] \subset R^2.$$

În cele ce urmează, pentru simplitate, se va nota : $T_m(z, t)$ cu $T(z, t)$ subînţelegînd medierea.

Se va considera cazul diadei *RRR*, cazul altor grupe structurale soluţionîndu-se analog.

Fie o bară dreaptă de lungime $l(t)$ situată într-un cîmp nestaţionar de temperaturi $T(z, t)$, $z \in [0 ; l]$.

Se poate scrie pentru „viteza de dilataţie" a barei

$$\dot{l}(t) = \alpha \cdot \int_0^{l_0} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \cdot dz, \tag{15}$$

unde α este valoarea medie a coeficientului de dilataţie ; $l_0 = l(t_0)$, t_0 fiind momentul iniţial.

Diada *RRR* dipol termocinematic (fig. 3)

Derivînd în raport cu timpul relaţiile

$$\begin{aligned} (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 &= l_1^2(t), \\ (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 &= l_2^2(t), \end{aligned} \tag{16}$$

se poate scrie

$$(V_1) = (M_1) \cdot (v_1) + (M_2)(\tilde{\alpha}) \cdot (\tilde{T}), \tag{17}$$

unde

$(V_1) = (\dot{X}, \dot{Y})^{(t)}$; $(v_1) = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2)^{(t)}$,

$(M_1) = -(M_4)^{-1} \cdot (M_3)$; $(M_2) = (M_4)^{-1}$,

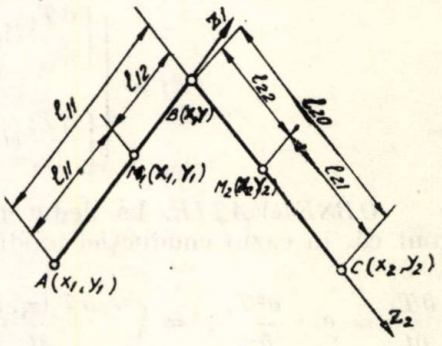


Fig. 3. Diadă *RRR*.

$$(M_3) = \begin{pmatrix} -(X - x_1) & -(Y - y_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X - x_2) & -(Y - y_2) \end{pmatrix},$$

$$(M_4) = \begin{pmatrix} X - x_1 & Y - y_1 \\ X - x_2 & Y - y_2 \end{pmatrix}; \qquad (\tilde{\alpha}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \left[\frac{dT_1}{dz_1}(l_{10}) - \frac{dT_1}{dz_1}(0) \right] \cdot l_1(t) \\ a_2 \cdot \left[\frac{dT_2}{dz_2}(l_{20}) - \frac{dT_2}{dz_2}(0) \right] \cdot l_2(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} l_1(t) = l_{10} + \alpha_1 \cdot \int_0^{l_{10}} [T_1(z_1, t) - \\ ; \; - T_1(z_1, 0)]\, dz_1, \\ l_2(t) = l_{20} + \alpha_2 \cdot \int_0^{l_{20}} [T_2(z_2, t) - \\ - T_2(z_2, 0)]\, dz_2, \end{array}$$

a_i, $i = 1,2$ reprezintă difuzivităţile de temperatură în elementele diadei;

α_i, $i = 1,2$ — valorile medii ale coeficienţilor de dilataţie pentru elementele diadei;

$T_i(z_i, t)$, $i = 1,2$ — cîmpurile de temperaturi în elementele diadei.

Dacă se introduce ca vector al mărimilor de intrare,

$$(v) = ((v_1)|(T))^{(t)}, \tag{18}$$

şi ca vector al mărimilor de ieşire,

$$(V) = [(V_1)|,\ 0,\ 0]^{(t)}, \tag{19}$$

se poate scrie relaţia intrare-ieşire a dipolului termocinematic

$$(V) = (M)\cdot(v), \tag{20}$$

unde

$$(M) = \left(\begin{array}{c|c} (M_1) & (O)_{2\times 2} \\ \hline (O)_{2\times 2} & (M_2)\cdot(\alpha) \end{array}\right),$$

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 a_2 \end{pmatrix},$$

$$(T) = \begin{pmatrix} \left[\dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}z_1}(l_{10}) - \dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}z_1}(0)\right] l_1(t) \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}z_2}(l_{20}) - \dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}z_2}(0)\right] l_2(t) \end{pmatrix}.$$

OBSERVAŢIE. La deducerea elementelor matricei $(\tilde{T})$ s-a ţinut cont că, în cazul conducţiei unidimensionale:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \cdot \frac{\partial^2 T_i}{\partial z_i^2}; \quad \Rightarrow \int_0^{l_{i_0}} \frac{\partial T_i(z_i, t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}z_i = a_i \cdot \left[\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}z_i}(l_{i0}) - \frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}z_i}(0)\right];$$

$$(i = 1,2).$$

Diada *RRR* cvadripol termocinematic (fig. 3).

Se introduce vectorul

$$(V_2) = (\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{X}_2, \dot{Y}_2)^{(t)}. \tag{21}$$

Derivînd în raport cu timpul relaţiile:

$$\begin{aligned} (X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 &= l_{11}^2(t), \\ (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 &= l_{21}^2(t), \\ (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 &= l_{12}^2(t); \\ (X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2)^2 &= l_{22}^2(t) \end{aligned} \tag{22}$$

se obţine relaţia matriceală

$$(V_2) = (M_8)\cdot(v_1) + (M_9)(\tilde{\alpha})(\tilde{T}) + (M_{10})\cdot(T_1), \tag{23}$$

unde

$$(M_8) = -(M_7)^{-1}\cdot[(M_5) + (M_6)(M_1)],$$
$$(M_9) = -(M_7)^{-1}\cdot(M_6)\cdot(M_2),$$
$$(M_{10}) = (M_7)^{-1},$$

$$(T_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1\cdot\left[\dfrac{dT_1(z_1,t)}{dz_1}(l_{11}^0) - \dfrac{dT_1(z_1,t)}{dz_1}(0)\right]\cdot l_{11}(t), \\ \alpha_1\cdot\left[\dfrac{dT_1(z_1,t)}{dz_1}(l_{10}) - \dfrac{dT_1(z_1,t)}{dz_1}(l_{11}^0)\right] l_{12}(t), \\ \alpha_2\cdot\left[\dfrac{dT_2(z_2,t)}{dz_2}(l_{22}^0) - \dfrac{dT_2(z_2,t)}{dz_2}(0)\right] l_{22}(t), \\ \alpha_2\cdot\left[\dfrac{dT_2(z_2,t)}{dz_2}(l_{20}) - \dfrac{dT_2(z_2,t)}{dz_2}(l_{22}^0)\right] l_{21}(t) \end{pmatrix}.$$

Relaţia (23) permite calculul cîmpului de viteze al cvadripolului termocinematic *RRR*.

4. ANALIZA ACCELERAŢIILOR MULTIPOLILOR TERMOCINEMATICI

Ne referim tot la diada *RRR*.
Introducînd vectorii mărimilor de ieşire :

$(A_1) = (\ddot{X}, \ddot{Y})^{(t)}$; $(A) = ((A_1)\,|\,0,0)^{(t)}$ pentru dipolul termocinematic,

$(A_2) = (\ddot{X}_1, \ddot{Y}_1, \ddot{X}_2, \ddot{Y})^{(t)}$ pentru cvadripolul termocinematic,

şi vectorii mărimilor de intrare :

$(a_1) = (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2)^{(t)}$;

$(a) = ((a_1)\,|\,(T_a))^{(t)}$;

$$(T_a) = \begin{pmatrix} \left[\dfrac{d\dot{T}_1}{dz_1}(l_{10}) - \dfrac{d\dot{T}_1}{dz_1}(0)\right] l_1(t) + \\ \qquad + \left[\dfrac{dT_1}{dz_1}(l_{10}) - \dfrac{dT_1}{dz_1}(0)\right]^2 \alpha_1 \\ \left[\dfrac{d\dot{T}_2}{dz_2}(l_{20}) - \dfrac{d\dot{T}_2}{dz_2}(0)\right]\cdot l_2(t) + \\ \qquad + \left[\dfrac{dT_2}{dz_2}(l_{20}) - \dfrac{dT_2}{dz_2}(0)\right]^2 \alpha_2 \end{pmatrix},$$

se pot scrie relaţii intrare-ieşire pentru analiza acceleraţiilor prin derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (17), (20), (23) :

$$(A_1) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_1)\right]\cdot(v_1) + (M_1)(a_1) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_2)\right]\cdot(\tilde{\alpha})\cdot(\tilde{T}) +$$

$$+ (M_2)\cdot(\tilde{\alpha})\cdot(\tilde{T}_a),$$

$$(A) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M)\right]\cdot(v) + (M)(a), \tag{24}$$

$$(A_2) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_8)\right](v_1) + (M_8)\cdot(a_1) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_9)\right]\cdot(\tilde{\alpha})\cdot(\tilde{T}) +$$

$$+ (M_9)\cdot(\tilde{\alpha})\cdot(\tilde{T}_a) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{10})\right](T_1) + (M_{10})\cdot(T_{1a}),$$

unde

$$(\tilde{T}_a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{T}); \quad (T_{1a}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_1).$$

Elementele matricelor din (24) sînt evident cunoscute după o prealabilă analiză a vitezelor multipolului termocinematic.

OBSERVAŢIE. Din punct de vedere practic, utilizarea relaţiilor (24) este mai dificilă, ele avînd însă o deosebită importanţă, în utilizarea unei descrieri a multipolului cu ajutorul teoriei generale a sistemelor [2], [3], însă asupra acestui aspect nu insistăm în articolul de faţă. Se indică mai jos o metodă mai directă pentru calculul acceleraţiilor.

Pentru diada *RRR* dipol termocinematic, derivînd de două ori în raport cu timpul relaţiile (16) se obţine

$$(A_1) = (M_1)(a_1) + (\tilde{V}) + (T_2), \tag{25}$$

unde

$$(\tilde{V}) = -(M_4)^{-1}\cdot(\tilde{V}_1),$$

$$(\tilde{V}_1) = \begin{pmatrix} (\dot{X}-\dot{x}_1)^2 + (\dot{Y}-\dot{y}_1)^2 \\ (\dot{X}-\dot{x}_2)^2 + (\dot{Y}-\dot{y}_2)^2 \end{pmatrix};$$

$$(T_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1\cdot l_1(t)\cdot\int_0^{l_{10}} \frac{\partial^2 T_1(z_1,t)}{\partial t^2}\cdot \mathrm{d}z_1 + \alpha_1^2\cdot\left[\frac{\mathrm{d}T_1(z_1,t)}{\mathrm{d}z_1}(l_{10}) - \frac{\mathrm{d}T_1(z_1,t)}{\mathrm{d}z_1}(0)\right]^2 \\ \alpha_2\cdot l_2(t)\cdot\int_0^{l_{20}} \frac{\partial^2 T_2(z_2,t)}{\partial t^2}\cdot \mathrm{d}z_2 + \alpha_2^2\cdot\left[\frac{\mathrm{d}T_2(z_2,t)}{\mathrm{d}z_2}(l_{20}) - \frac{\mathrm{d}T_2(z_2,t)}{\mathrm{d}z_2}(0)\right]^2 \end{pmatrix}.$$

Pentru diada *RRR* cvadripol termocinematic se obține

$$(A_2) = (M_8) \cdot (a_1) + (\tilde{V}_1) + (T_3), \tag{26}$$

unde

$$(\tilde{V}_1) = -(M_7)^{-1} \cdot (\tilde{V}_2),$$

$$(\tilde{V}_2) = \begin{pmatrix} (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{Y}_1 - \dot{y}_1)^2 \\ (\dot{X} - \dot{X}_1)^2 + (\dot{Y} - \dot{Y}_1)^2 \\ (\dot{X} - \dot{X}_2)^2 + (\dot{Y} - \dot{Y}_2)^2 \\ (\dot{X}_2 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{Y}_2 - \dot{y}_2)^2 \end{pmatrix};$$

$$(T_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 l_{11}(t) \cdot \int_0^{l_{11}^0} \frac{\partial^2 T_1(z_1,t)}{\partial t^2} \cdot \mathrm{d}z_1 + \alpha_1^2 \cdot \left[\frac{\mathrm{d}T_1(z_1,t)}{\mathrm{d}z_1}(l_{11}^0) - \frac{\mathrm{d}T_1(z_1,t)}{\mathrm{d}z_1}(0) \right]^2 \\ \alpha_1 \cdot l_{12}(t) \cdot \int_{l_{11}^0}^{l_{10}} \frac{\partial^2 T(z_1,t)}{\partial t^2} \mathrm{d}z_1 + \alpha_1^2 \cdot \left[\frac{\mathrm{d}T_1(z_1,t)}{\mathrm{d}z_1}(l_{10}) - \frac{\mathrm{d}T_1(z_1,t)}{\mathrm{d}z_1}(l_{11}^0) \right]^2 \\ \alpha_2 \cdot l_{22}(t) \cdot \int_0^{l_{22}^0} \frac{\partial^2 T_2(z_2,t)}{\partial t^2} \mathrm{d}z_2 + \alpha_2^2 \cdot \left[\frac{\mathrm{d}T_2(z_2,t)}{\mathrm{d}z_2}(l_{22}^0) - \frac{\mathrm{d}T_2(z_2,t)}{\mathrm{d}z_2}(0) \right]^2 \\ \alpha_2 \cdot l_{21}(t) \cdot \int_{l_{22}^0}^{l_{20}} \frac{\partial^2 T_2(z_2,t)}{\partial t^2} \mathrm{d}z_2 + \alpha_2^2 \cdot \left[\frac{\mathrm{d}T_2(z_2,t)}{\mathrm{d}z_2}(l_{20}) - \frac{\mathrm{d}T_2(z_2,t)}{\mathrm{d}z_2}(l_{22}^0) \right]^2 \end{pmatrix}.$$

Rezultatele expuse se aplică analog la orice alt multipol termocinematic.

Etapele de calcul sînt deci:

1. Determinarea cîmpurilor de temperaturi în bare, cu condiții la limită și inițiale precizate, în funcție de problema tehnică concretă.

Deoarece determinarea condițiilor la limită presupune cunoscută poziția instantanee a elementului considerat, se poate determina a priori aceasta făcînd abstracție de prezența cîmpului termic sau se poate folosi o metodă de aproximații succesive (care duce însă la un volum mare de calcule).

2. Analiza pozițională pe baza cîmpurilor termice în elemente [9].

3. Analiza vitezelor.

4. Analiza accelerațiilor.

Rezultatele prezentate sînt cu un grad mare de generalitate, ele urmînd a fi adaptate în funcție de forma cîmpului termic exterior.

Forma matriceală a relațiilor este destinată folosirii calculatorului electronic.

Primită la redacție la 1 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. M. Buculei, S. Miţis, I. Popescu, *Contribuţii la analiza cinematică şi cinetostatică a mecanismelor plane folosind calculul matriceal*, IFTOMM int. symp on linkages and computer design methods, Bucureşti, 1973, vol. A, A16.
2. M. Buculei, *Contribuţii la analiza matriceală cinematică şi dinamică a grupei Assur de cl a IV-a, ord. II*, St. cerc. mec. apl., *4*, (1975),
3. M. Buculei, *Analiza dinamică matriceală a mec. plane din familia a III-a, folosind operaţii asociaţi*, lucrare susţinută la a IV-a Conferinţă de mecanică, Bucureşti, decembrie. 1975.
4. — *Asupra termoelastodinamicii solidului cu masă variabilă*, St. cerc. mec. apl., *2.*, (1974)
5. A. Marinescu, D. Comănescu, *Contribuţii la analiza termocinematică a mec. spaţiale cu bare articulare*, IFTOMM int. symp. on linkages and computer design methods, Bucureşti, vol. B, 1973.
6. Chr. Pelecudi, *Kinematic multipols with Rigid Links*, Rév. Roum. Sci. Tech. — Méc. Appl., **13**, *5* (1968).
7. — *Interpretation of the Dyad as kinematic Dipole and Quadripole*, Rév. Roum. Sci-Tech-Méc Appl, **13**, *6*, (1968).
8. Chr. Pelecudi, A. Florenţiu, A. Marinescu, *Aplicaţiile lanţurilor cvasicinematice în sist. compensatoare ale reţelelor termice*, St. cerc. mec. apl., *2*, (1975).
9. Chr. Pelecudi, *Precizia mecanismelor*, Edit. Acad. R. S. România, Bucureşti, 1975.

CONSIDERAȚII ASUPRA CALCULULUI MOMENTULUI DE INERȚIE MECANIC AXIAL AL UNUI COT, PLUS ECHIPAJELE MOBILE AFERENTE ACESTUIA APARȚINÎND UNUI ARBORE COTIT

de ANDREI RIPIANU, VASILE MARCU
Institutul politehnic Cluj-Napoca

În studiul dinamic al arborilor cotiți, un rol important îl are momentul de inerție mecanic axial al unui cot plus echipajul mobil aferent acestuia format din bielă-cap de cruce-tije de piston-piston-segmenți sau din bielă-piston-segmenți. Întrucît biela execută o mișcare plan- paralelă, iar, blocul cap de cruce— tije de piston—segmenți o mișcare de translație rectilinie alternativă, momentul de inerție mecanic axial al echipajului mobil în raport cu axa de rotație al arborelui cotit variază continuu în cursul rotației arborelui cu unghiul de 360°.
Pentru ca ecuațiile diferențiale ale mișcărilor vibratorii de torsiune ale sistemului vibrant redus să aibă coeficienți constanți, se adoptă o valoare mijlocie constantă pentru momentul de inerție mecanic axial al echipajului mobil în raport cu axa de rotație a arborelui cotit corespunzătoare unei rotații complete a acestuia.
Pentru calculul acestei valori medii se utilizează relația Frahm. În lucrare se analizează abaterea față de valoarea medie exactă pe care o introduce în calcule relația Frahm.

Se consideră un motor omogen în linie și arborele cotit aferent. acestuia. Pentru obținerea sistemului vibrant redus trebuie calculat momentul de inerție mecanic axial, în raport cu axa de rotație a arborelui cotit, pentru fiecare cot plus echipajul mobil aferent acestuia compus din bielă, bolțul pistonului, corpul pistonului și segmenți.

Biela execută o mișcare plan paralelă, iar complexul bolț-piston-segmenți execută o mișcare de translație rectilinie și alternativă, ceea ce face ca valoarea momentului de inerție mecanic axial al cotului plus echipajul mobil aferent acestuia să varieze în funcție de unghiul de rotație al arborelui cotit.

În scopul simplificării calculelor se obișnuiește ca să se adopte o valoare mijlocie pentru acest moment de inerție.

În figura 1 s-a reprezentat sub formă schematică un cot al arborelui cotit și echipajul mobil aferent acestuia.

Se vor utiliza notațiile :

r — distanța dintre axa de simetrie a fusurilor și axa de simetrie a manetonului (raza cotului);

L — lungimea bielei;

L_1; L_2 — distanțele de la centrul maselor C al bielei pînă la axele de simetrie ale cuzineților acesteia;

$$\lambda = \frac{r}{L};$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 6, 1977, P. 879—887

J_C — momentul de inerţie mecanic axial al bielei în raport cu axul perpendicular pe planul mişcării acesteia şi care trece prin centrul maselor C al bielei;

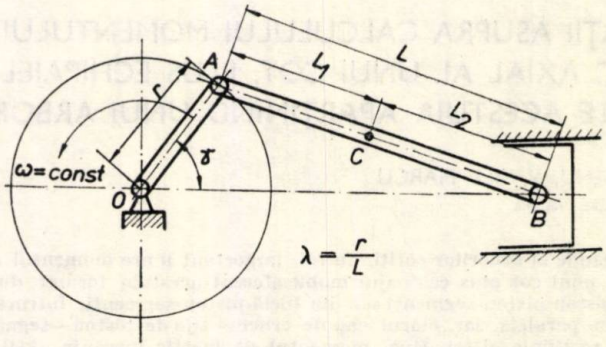


Fig. 1

m_B — masa bielei;
m_P — masa totală a sistemului bolţ-piston-segmenţi;
γ — unghiul de rotaţie al arborelui cotit;
ω — viteza unghiulară de rotaţie a arborelui cotit.

În plus, se vor mai utiliza notaţiile din figura 2:

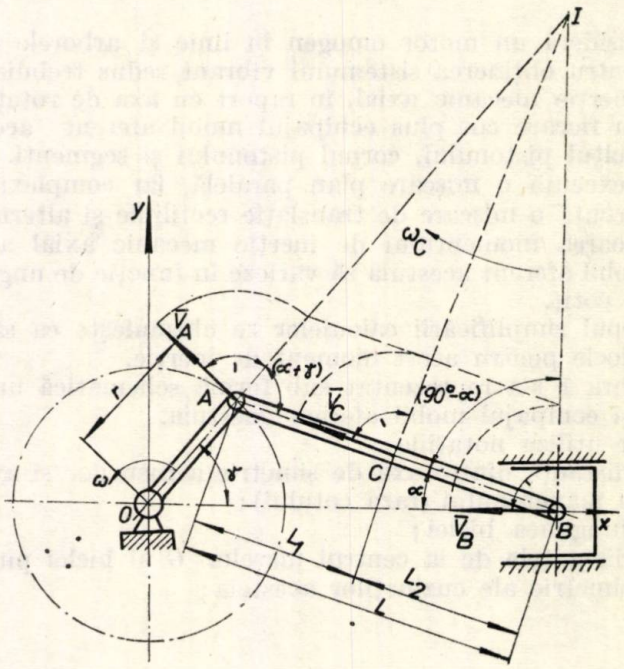


Fig. 2

α — unghiul de înclinație al bielei față de axa cilindrului motorului;

x_C; y_C — coordonatele carteziene ale centrului maselor bielei înregistrate față de reperul cartezian Oxy (fig. 2);

I — centrul instantaneu de rotație aferent mișcării plan paralele executată de bielă;

v_C — viteza centrului maselor vielei C;

ω_C — viteza unghiulară de rotație a bielei în jurul centrului maselor C identică cu viteza unghiulară aferentă componentei de rotație a mișcării plan paralele pe care o execută biela;

v_A — viteza centrului de simetrie ale manetonului;

$v_B = v_P$ — viteza pistonului.

Energia cinetică a bielei este dată de relația lui König,

$$T_B = \frac{1}{2} m_B v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2, \tag{1}$$

iar energia cinetică a complexului bolț-piston-segmenți este dată de relația

$$T_P = \frac{1}{2} m_P v_P^2 . \tag{2}$$

Energia cinetică a echipajului mobil format din bielă-bolț-piston-segmenți va avea expresia

$$T_{B+P} = \frac{1}{2} m_B v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2 + \frac{1}{2} m_P v_P^2. \tag{3}$$

Din figura 2 rezultă

$$x_C = r \cos \gamma + L_1 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}, \tag{4}$$

$$y_C = L_2 \lambda \sin \gamma,$$

$$x_B = r \cos \gamma + L \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}.$$

Prin derivare se obțin vitezele

$$\dot{x}_C = - \omega \sin \gamma \left(r + \lambda^2 L_1 \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}} \right), \tag{5}$$

$$\dot{y}_C = \omega L_2 \lambda \cos \gamma, \tag{6}$$

$$v_B = v_P = \dot{x}_B = - \omega r \sin\gamma \left(1 + \lambda \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}}\right). \tag{7}$$

În plus, $v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$. (8)

Viteza unghiulară ω_C este dată de expresia (fig. 2):

$$\omega_C = \omega \frac{r}{IA} = \omega \lambda \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}}. \tag{9}$$

Se introduc expresiile (5) — (9) în relaţia (3) şi se obţine

$$T_{B+P} = \frac{1}{2} m_B \omega^2 \left[\sin^2 \gamma \left(r + \lambda^2 L_1 \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + L_2^2 \lambda^2 \cos^2 \gamma \right] + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \frac{\lambda^2 \cos^2 \gamma}{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_P \omega^2 r^2 \sin^2 \gamma \left(1 + \lambda \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - s\lambda^2 \mathrm{in}^2 \gamma}} \right)^2. \tag{10}$$

Momentul de inerţie J_{red}, denumit moment de inerţie redus, rezultă pin relaţia

$$T_{B+P} = \frac{1}{2} J_{red} \omega^2. \tag{11}$$

Din (10) şi (11) se obţine

$$J_{red} = m_B \left[\sin^2 \gamma \left(r + \lambda^2 L_1 \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}} \right)^2 + L_2^2 \lambda^2 \cos^2 \gamma \right] +$$

$$+ J_C \frac{\lambda^2 \cos^2 \gamma}{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma} + m_P r^2 \sin^2 \gamma \left(1 + \frac{\lambda \cos \gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}} \right)^2. \tag{12}$$

Valoarea mijlocie a momentului de inerţie redus este dată de expresia

$$J_{red\ med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{red}(\gamma)\, d\gamma. \tag{13}$$

În proiectare este frecvent utilizată relaţia Frahm pentru calculul momentului de inerţie redus al echipajului mobil format din bielă-bolţ-piston-segmenţi corespunzător unui cot

$$J_{Frahm} = r^2 \left[m_{Brot} + \frac{1}{2} (m_{Bosc} + m_P) \right] \tag{14}$$

sau o formă mai exactă

$$J_{Frahm} = r^2 \left[m_{Brot} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) (m_{Bosc} + m_P) \right] \tag{15}$$

În aceste relații Frahm prin m_{Brot} și m_{Bosc} s-au notat masele discrete aparținînd complexului static echivalent în care a fost disociată masa m_B a bielei plasate în extremitățile A și B ale acesteia. Valorile acestora rezultă din expresiile :

$$m_{Brot} = \frac{L_2}{L} m_B ; m_{Bosc} = \frac{L_1}{L} m_B. \tag{16}$$

Se introduc expresiile (16) în relația (15) și se obține

$$J_{Frahm} = m_B r^2 \left[\frac{L_2}{L} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(\frac{L_1}{L} + \frac{m_P}{m_B} \right) \right]. \tag{17}$$

Se notează coeficientul global

$$q_g = \frac{J_{Fred\ med}}{J_{Frahm}} . \tag{18}$$

Se adoptă valorile numerice :

$$m_B = 17{,}035 \text{ kg} ; \; m_P = 10{,}880 \text{ kg} ; \; J_C = 0{,}5629 \text{ kg m}^2 ;$$

$$L = 0{,}39 \text{ m} ; L_1 = 0{,}12 \text{ m} ; L_2 = 0{,}27 \text{ m}, \tag{19}$$

$$r = 0{,}1025 \text{ m} ; \; \lambda = 0{,}2628.$$

Se introduc valorile numerice (19) în expresiile (13) și (17) și se obțin :

$$J_{red\ med} = 0{,}210489 \text{ kg m}^2,$$

$$J_{Frahm} = 0{,}210056 \text{ kg m}^2. \tag{20}$$

Se introduc valorile numerice (20) în relația (18) și se obține

$$q_g = 1{,}00206. \tag{21}$$

Se va trasa curba de variație a coeficientului global q_g notat q_{g1} în funcție de masa complexului bolț-piston-segmenți m_P dînd acesteia valori între 7,80 kg și 14,40 kg (fig. 3). Valorile coeficientului q_{g1} în funcție de valorile masei m_P, pe baza cărora a fost construită curba din figura 3, sînt cuprinse în tabela 1.

Pentru ca valoarea momentului cuplului de inerție creat de masele echipajului mobil în mișcare să fie minimă este necesar și suficient ca biela să fie astfel construită încît

$$J_C = m_B L_1 L_2. \tag{22}$$

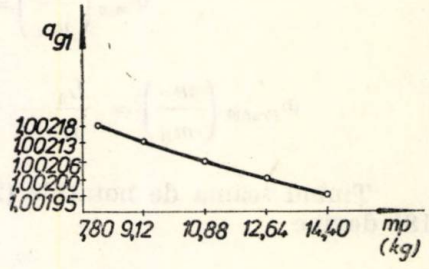


Fig. 3.

Tabela 1

m_P	q_{g1}	q_{g3}	q_{p1}	q_{p2}	q_{p3}	q_{p4}
7,80	1,00218	1,00834	1,00606	1,02343	1,00067	1,01795
8.24	1,00216	1,00846	1,00588	1,02325	1,00067	1,01795
8,68	1,00214	1,00857	1,00572	1,02308	1,00067	1,01795
9,12	1,00213	1,00868	1,00556	1,02293	1,00067	1,01794
9,56	1,00211	1,00878	1,00541	1.02277	1,00066	1,01794
10,00	1,00209	1,00889	1,00528	1,02264	1,00067	1,01794
10,44	1,00208	1,00899	1,00515	1,02250	1,00067	1,01795
10,88	1,00206	1,00909	1,00503	1,02238	1,00067	1,01794
11,32	1,00205	1,00918	1,00491	1,02226	1,00067	1,01794
11,76	1,00203	1,00928	1,00480	1,02215	1,00066	1,01794
12,20	1,00202	1,00937	1,00470	1,02204	1,00067	1,01795
12,64	1,00200	1,00946	1,00459	1,02194	1,00066	1,01794
13,08	1,00199	1,00955	1,00450	1,02185	1,00066	1,01794
13,52	1,00197	1,00964	1,00442	1,02176	1,00067	1.01795
13,96	1,00196	1,00972	1,00433	1,02167	1,00067	1,01795
14,40	1,00195	1,00981	1,00425	1,02159	1,00067	1,01795

Se va considera relaţia (22) îndeplinită.
Se notează

$$\eta(\gamma) = \sin^2\gamma\left(1+\lambda\frac{L_1}{L}\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\gamma}}\right)^2 + \frac{L_2^2}{L^2}\cos^2\gamma +$$

$$+\frac{L_1L_2}{L^2}\frac{\cos^2\gamma}{1-\lambda^2\sin^2\gamma} + \frac{m_P}{m_B}\sin^2\gamma\left(1+\lambda\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\gamma}}\right)^2. \quad (23)$$

Expresia momentului de inerţie redus din (12) devine

$$J_{red} = m_B\, r^2\, \eta\,(\gamma). \quad (24)$$

Similar, expresia momentului de inerţie redus mediu din (13) devine

$$J_{red\ med} = \frac{1}{2\pi} m_B r^2 \int_0^{2\pi} \eta(\gamma)\, d\gamma. \quad (25)$$

Se notează :

$$\Phi_{med}\left(\frac{m_P}{m_B}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta(\gamma)\, d\gamma, \quad (26)$$

$$\Phi_{Frahm}\left(\frac{m_P}{m_B}\right) = \frac{L_2}{L} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda^2}{4}\right)\left(\frac{L_1}{L}+\frac{m_P}{m_F}\right). \quad (27)$$

Ţinînd seama de notaţiile (26), (27), expresia coeficientului global (18) devine

$$q_g = \frac{\Phi_{med}}{\Phi_{Frahm}}. \quad (28)$$

Considerînd că r, L, L_1, L_2 rămîn constante și că variază numai masele m_B și m_P, în figura 4 a fost trasată curba de variație a valorii coeficientului q_g notat q_{g2} pentru valori ale raportului m_P/m_B variind între limitele 0,457 ~ 0,845.

Valorile coeficientului q_{g2} în funcție de valorile raportului m_P/m_B pe baza cărora a fost construită curba din figura 4 sînt cuprinse în tabela 2.

În cazul în care se adoptă relația Frahm scrisă sub forma (14), relația (17) devine

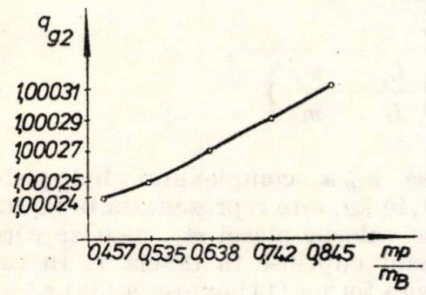


Fig. 4.

Tabela 2

$\frac{m_P}{m_B}$	q_{g2}	q_{g4}
0,457881	1,00024	1,00639
0,483710	1,00025	1,00653
0,509539	1,00025	1,00666
0,535368	1,00025	1,00679
0,561197	1,00026	1,00692
0,587026	1,00026	1,00704
0,612856	1,00027	1,00717
0,638685	1,00027	1,00729
0,664514	1,00028	1,00740
0,690343	1,00028	1,00751
0,716172	1,00029	1,00763
0,742001	1,00029	1,00774
0,767830	1,00029	1,00784
0,793660	1,00030	1,00795
0,819489	1,00030	1,00805
0,845318	1,00031	1,00815

$$J_{Frahm} = m_B\, r^2 \left[\frac{L_2}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{L} + \frac{m_P}{m_B} \right) \right], \tag{29}$$

iar relația (27) devine

$$\Phi_{Frahm}\left(\frac{m_P}{m_B} \right) = \frac{L_2}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{L} + \frac{m_P}{m_B} \right). \tag{30}$$

În acest caz, curba de variație a coeficientului global, notat cu q_{g3}, avînd expresia (18), este trasată în figura 5, iar cea corespunzătoare coeficientului global), notat cu q_{g4}, avînd expresia (28), în figura 6.

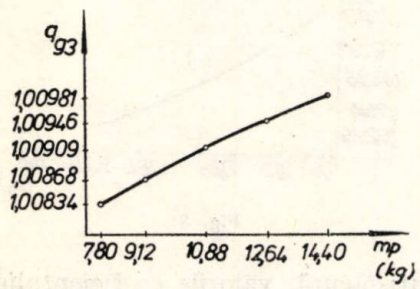


Fig. 6

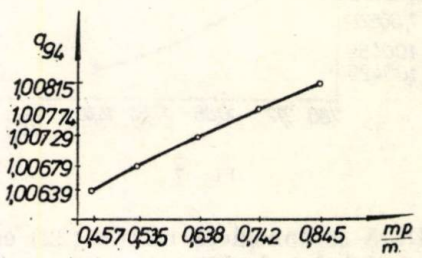


Fig. 5

Valorile coeficientului q_{p3} în funcţie de valorile masei m_P, pe baza cărora a fost construită curba din figura 5, sînt cuprinse în tabela 1. Valorile coeficientului q_{p4} în funcţie de valorile raportului m_P/m_B, pe baza cărora a fost construită curba din figura 6, sînt cuprinse în tabela 2.

Dacă se introduce în relaţia Frahm (17) un coeficient parţial q_{p1}, avem

$$J_{Frahm} = m_B r^2 \left[\frac{L_2}{L} + \frac{1}{2} q_{p1} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(\frac{L_1}{L} + \frac{m_P}{m_B} \right) \right], \tag{31}$$

egalînd expresiile (13) şi (31) se obţine expresia coeficientului parţial q_{p1}

$$q_{p1} = 8 \frac{\dfrac{J_{red\ med}}{m_B r^2} - \dfrac{L_2}{L}}{(4 + \lambda^2) \left(\dfrac{L_1}{L} + \dfrac{m_P}{m_B} \right)}, \tag{32}$$

a cărui variaţie în funcţie de masa m_P a complexului bolţ-piston-segmenţi, ce ia valori între 7,80 kg şi 14,40 kg, este reprezentată în figura 7. Valorile coeficientului q_{p1} în funcţie de valorile masei m_P, pe baza cărora a fost construită curba din figura 7, sînt cuprinse în tabela 1. În cazul în care se adoptă relaţia Frahm scrisă sub forma (14) expresia (32) a coeficientului parţial devine

$$q_{p2} = 2 \frac{\dfrac{J_{red\ med}}{m_B r^2} - \dfrac{L_2}{L}}{\dfrac{L_1}{L} + \dfrac{m_P}{m_B}}, \tag{33}$$

iar curba de variaţie în funcţie de masa m_P este trasată în figura 8.

Valorile coeficientului q_{p2} în funcţie de valorile masei m_P, pe baza cărora a fost construită curba din figura 8, sînt cuprinse în tabela 1.

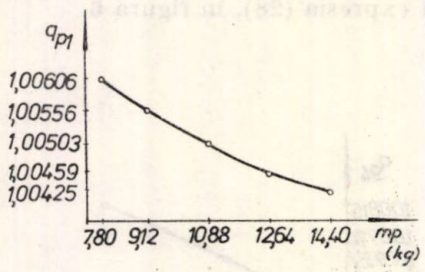


Fig. 7

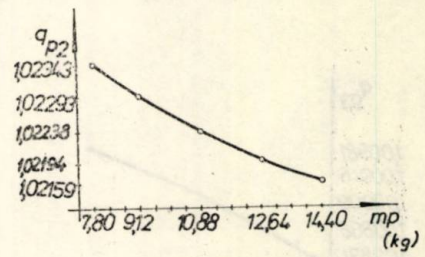


Fig. 8

Dacă se consideră relaţia (22) ca fiind satisfăcută, valorile coeficientului parţial dat de (32) şi notat q_{p3} în funcţie de m_P sînt înscrise în tabela 1,

iar curba de variație a acestuia în funcție de m_P este reprezentată în figura 9. În cadrul aceleiași ipoteze, valorile coeficientului parțial dat de (33) și notate cu q_{p4} în funcție de m_P sînt înscrise în tabela 1, iar curba de variație a acestuia în funcție de m_P este reprezentată în figura 10.

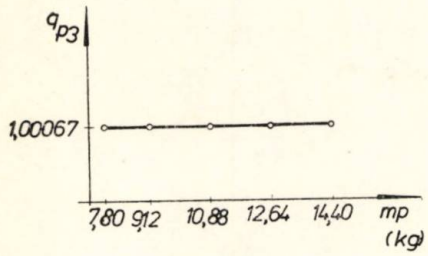


Fig. 9

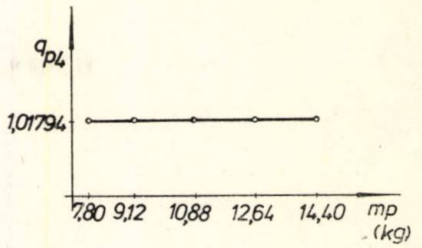


Fig. 10.

Din compararea valorilor numerice înscrise în tabelele 1 și 2, ca și din analiza curbelor trasate în figurile 3 — 10 pe baza datelor mai sus menționate rezultă că :

a) relația Frahm scrisă sub forma (15) este sensibil mai exactă decît relația Frahm scrisă sub forma (14);

b) în cazul în care biela este astfel construită încît este satisfăcută relația (22) atît forma (14), cît și forma (15) a relației Frahm dau rezultate sensibil mai exacte decît în cazul în care relația (22) nu este satisfăcută. Cele mai exacte rezultate le dă relația Frahm scrisă sub forma (15) atunci cînd este satisfăcută relația (22).

În acest caz valoarea mijlocie a momentului de inerție mecanic axial a echipajelor mobile aferente unui cot în raport cu axa de rotație a arborelui cotit diferă cel mai puțin de valoarea mijlocie exactă al acestui moment de inerție.

Concluzia finală care se desprinde din analiza valorilor numerice înscrise în tabelele 1 și 2 precum și din analiza curbelor trasate în figurile 3—10 pe baza datelor mai sus menționate este că relația Frahm scrisă sub forma (15) dă rezultate foarte exacte și poate fi utilizată în proiectarea motoarelor cu ardere internă și a compresoarelor cu piston.

Primită la redacție la 9 august 1976

BIBLIOGRAFIE

1. A. Ripianu, *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*, Editura Academiei R. S. România, București, 1969.
2. A. Ripianu, A., Albu, *Osii și arbori rectilinii*, Edit. tehnică, București, 1964. 1960.
3. B., Popa A., Somcuteanu A., Ripianu I., Trebonius *Arbori cotiți*, Edit, Tehnică, București, 1960.

POSIBILITĂȚI DE REPRODUCERE ÎN LABORATOR A SOLICITĂRILOR REALE DIN EXPLOATARE ÎN TRANSMISIA AUTOTURISMULUI DACIA 1300

M. MITRACHE
Institutul de Cercetări și Proiectări pentru Autoturisme Pitești

În prima parte a lucrării se prezintă metoda utilizată de Institutul de cercetări și proiectări autoturisme Pitești (I.C.P.A.P.) pentru înregistrarea și prelucrare statistică a eforturilor din transmisia autoturismului Dacia 1300. În partea a doua se modelează puntea față a autoturismului Dacia 1300 ca un sistem oscilant viscoelastic liniar cu un singur grad de libertate și se descrie standul de încercări destinat realizării ciclurilor de solicitări din exploatarea „tip client", proiectat și realizat de I.C.P.A.P.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Definirea, punerea la punct și menținerea la nivelul concurenței și cerințelor consumatorilor, a performanțelor tehnico-funcționale ale unui automobil, concomitent cu rentabilizarea fabricației, impune producătorului să urmărească comportarea produsului în condiții de exploatare normală.

Această necesitate este cu atît mai stringentă pentru industria de autoturisme, cu cît aceasta implică o tehnică de vîrf, costisitoare, iar produsul are valoare mare și se adresează cumpărătorilor particulari.

Condițiile de exploatare normală în clientelă sînt aleatorii, avînd în vedere condițiile de drum, climă, trafic, întreținere și calificarea conducătorului, ceea ce face ca eventualele rezultate ce se pot culege după ani de urmărire în clientelă, să aibe o împrăștiere mare :

— Parcursurile medii realizate anual de clienți sînt relativ reduse și pentru a trage concluzii asupra fiabilității și durabilității unui automobil trebuie să treacă 5 pînă la 10 ani, ceea ce este inacceptabil atît din punct de vedere al parcului auto, care se poate crea necorespunzător, cît și din punct de vedere al promovării progresului tehnic.

— Pentru eliminarea acestor inconveniente și pentru a urgenta punerea la punct a construcției unui automobil, producătorii de autovehicule și în special producătorii de autoturisme, au organizat încercarea intensivă a automobilelor în condiții de exploatare.

— Pentru a asigura pe de o parte confidențialitatea lucrărilor, iar pe de altă parte pentru a reduce împrăștierea rezultatelor, producătorii au fost nevoiți să recurgă la realizarea de poligoane speciale de încercare,

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 6, 1977, P. 889–904

unde sînt reproduse cît mai fidel caracteristici de drum întîlnite atît într-o exploatare normală, medie, cît şi într-o exploatare de extremă dificultate.

— Probele în poligoane sînt relativ costisitoare : este necesară rularea a zeci de autoturisme complete pentru a vedea dacă o modificare, sau o soluţie nouă la un ansamblu se comportă satisfăcător. Rezultatele obţinute constau în aprecierile mecanicului care a făcut proba.

— În faţa necesităţilor de încercare rapidă pe de o parte, a obţinerii unor rezulate cu o împrăştiere cît mai mică şi în condiţii cît mai economice, pe de altă parte, constructorii de automobile au dezvoltat tehnica încercărilor de laborator.

— Problemele deosebite ce se cer a fi rezolvate în condiţiile în care se dezvoltă încercările de laborator sînt :

a) ciclurile de încercare să reproducă condiţiile de exploatare pentru fiecare subansamblu sau piesă în parte ;

b) rezultatele obţinute în laborator să fie exprimate în kilometri de exploatare medie „tip client".

În prezent, pentru părţile de caroserie, suspensie şi elementele fixate pe caroserie, au fost realizate progrese deosebite, în sensul că se înregistrează regimurile de solicitări în exploatare, pe diverse categorii de drumuri, pe bandă magnetică şi apoi sînt reproduse în laborator cu ajutorul vibratorilor hidraulici sau maselor vibrante.

Pentru mecanismele transmisiei autovehiculelor, această tehnică este în faza incipientă (Schenk — R.F.G., M.T.S. — U.S.A).

Laboratorul de transmisii al Institutului de cercetări şi proiectări pentru autoturisme se preocupă să realizeze prin autodotare instalaţii experimentale destinate reproducerii solicitărilor reale din exploatare în piesele lanţului cinematic al transmisiei autoturismului Dacia 1300.

2. REGIMUL REAL DE EFORTURI DIN EXPLOATARE ÎN MECANISMUL DE TRANSMISIE

Măsurarea pe cale tensometrică a eforturilor unitare în axa homocinetică a autoturismului Dacia 1300 pune în evidenţă variaţia momentului în lanţul cinematic al transmisiei, la deplasarea automobilului pe drumuri cu învelişuri tari, denivelate, atît în regimuri de deplasare în linie dreaptă cu viteză stabilizată (fig. 1), cît şi în regimuri tranzitorii (demaraj, schimbări de viteză, curbe, frînări etc.) (fig. 2).

Prelucrarea în laborator a eforturilor înregistrate pe bandă magnetică, prin clasarea lor pe nivele prereglate, pentru regimurile de deplasare în linie dreaptă, cu viteză stabilizată pe diverse categorii de drumuri, se prezintă ca în figura 3 pentru drum bun, figura 4 pentru drum mediu şi figura 5 pentru drum rău.

Momentele medii, rezultate din prelucrarea înregistrărilor, sînt redate în figura 6. În figura 7 şi tabela 1 se prezintă momentul rezultat din ecuaţia de mişcare a autoturismului Dacia 1300 în condiţii de deplasare în regim constant, pe drum cu panta zero.

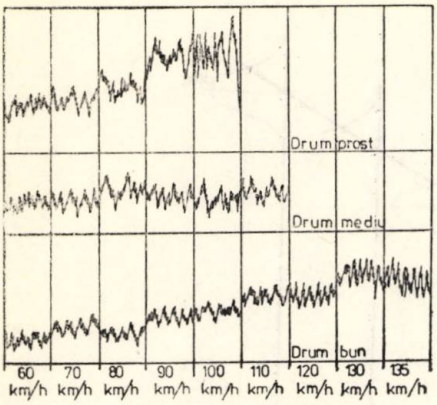


Fig. 1. — Momentul la roata autoturismului Dacia 1300 măsurat tensometric.

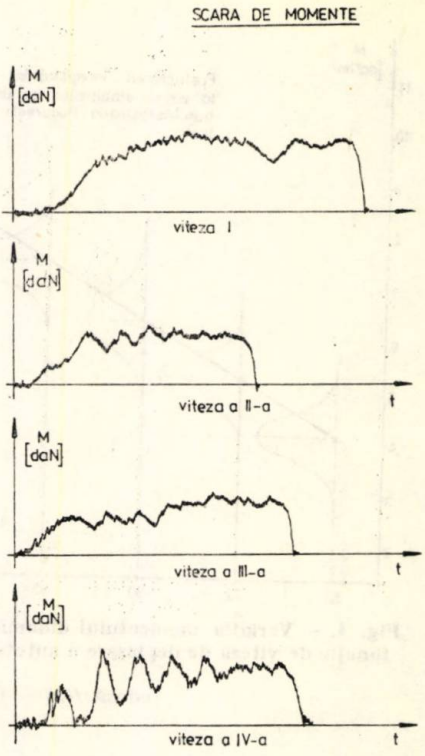


Fig. 2. — Variația momentului de torsiune în lanțul cinematic al transmisiei autoturismului Dacia 1300 la deplasarea pe drumuri cu înveliș uri tari denivelate în regimuri tranzitorii (schimbări de viteze).

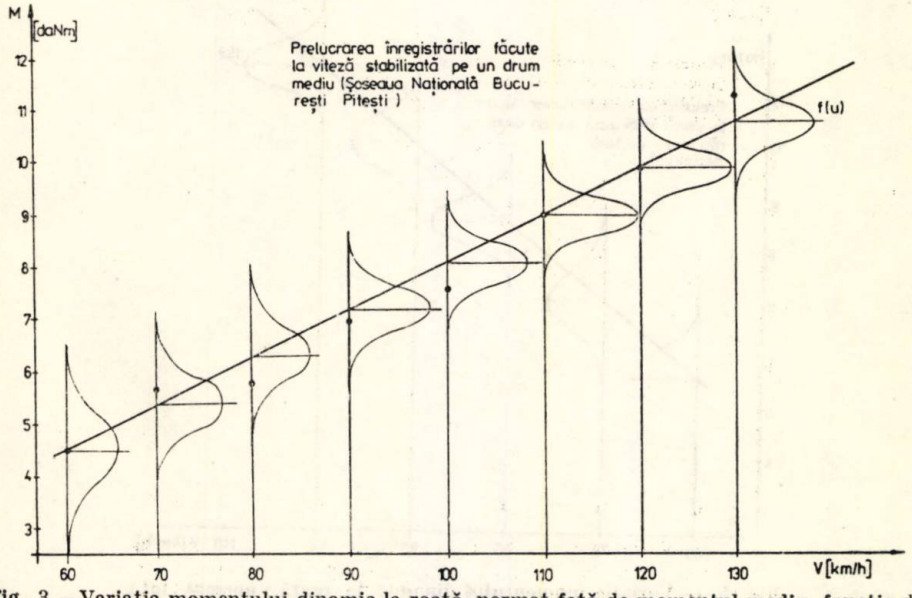


Fig. 3. — Variația momentului dinamic la roată, normat față de momentul mediu, funcție de viteza de deplasare a autoturismului, dată de legea de repartiție normală redusă: $f(u) = 0{,}3989 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$

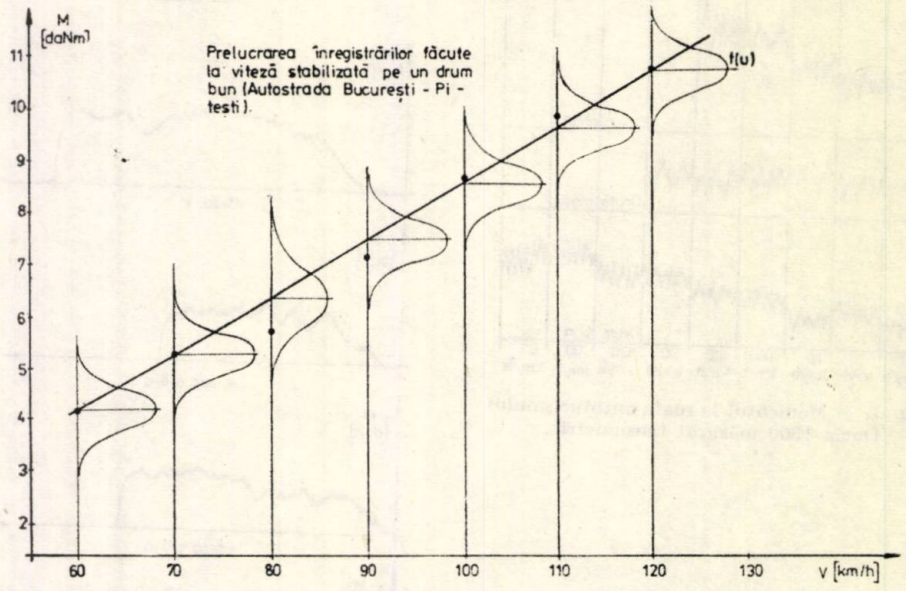


Fig. 4. — Variația momentului dinamic la roată, normat față de momentul mediu, funcție de viteza de deplasare a autoturismului, dată de legea de repartiție normală redusă: $f(u) = 0{,}3989 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$.

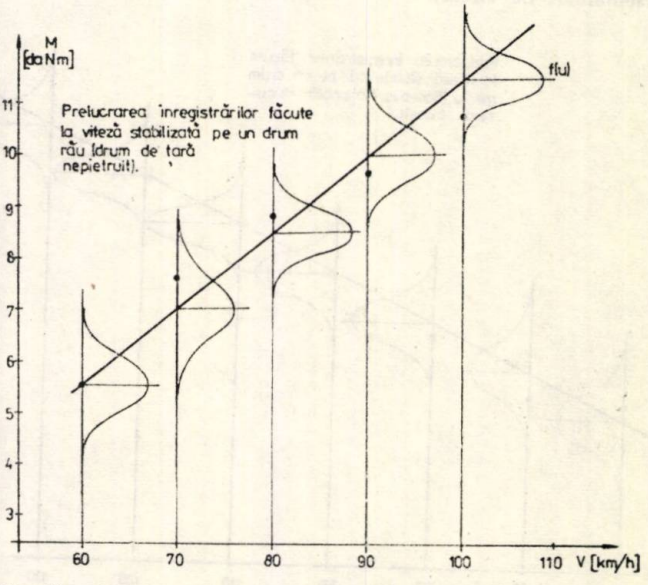


Fig. 5. — Variația momentului dinamic la roată, normat față de momentul mediu, funcție de viteza de deplasare a autoturismului, dată de legea de repartiție normală redusă: $f(u) = 0{,}3989 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$.

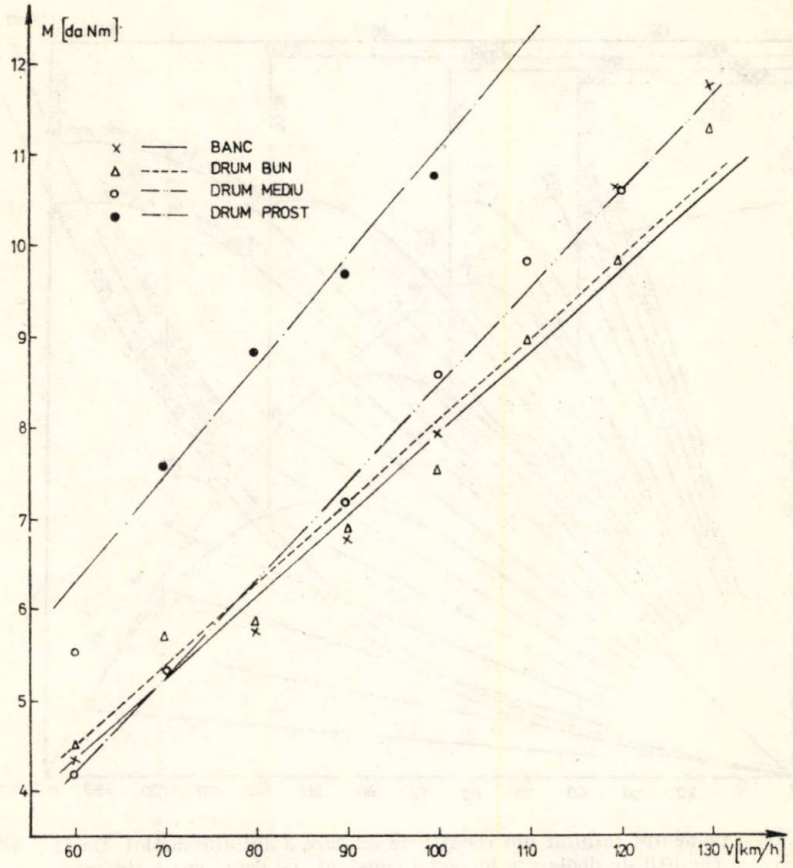


Fig. 6. — Momentul mediu pe diverse categorii de drumuri şi pe banc funcţie de viteza de deplasare, rezultat din prelucrarea datelor înregistrate pe drum şi măsurate pe banc.

Tabela 1

Momentul de torsiune dedus din puterea consumată la roată, măsurată pe stand

Viteza km/h	Turaţia coresp. la motor rot/min.	Puterea la roată C.P.	Momentul la roată daN.m
60	2.307	7,4	8,69
70	2.690	10,0	10,309
80	3.076	12,8	11,514
90	3.461	17,0	13,615
100	3.846	22,0	15,856
110	4.320	29,0	19,003
120	4.615	35,5	21,321
130	5.000	42,5	23,562
140	5.384	53,0	27,284

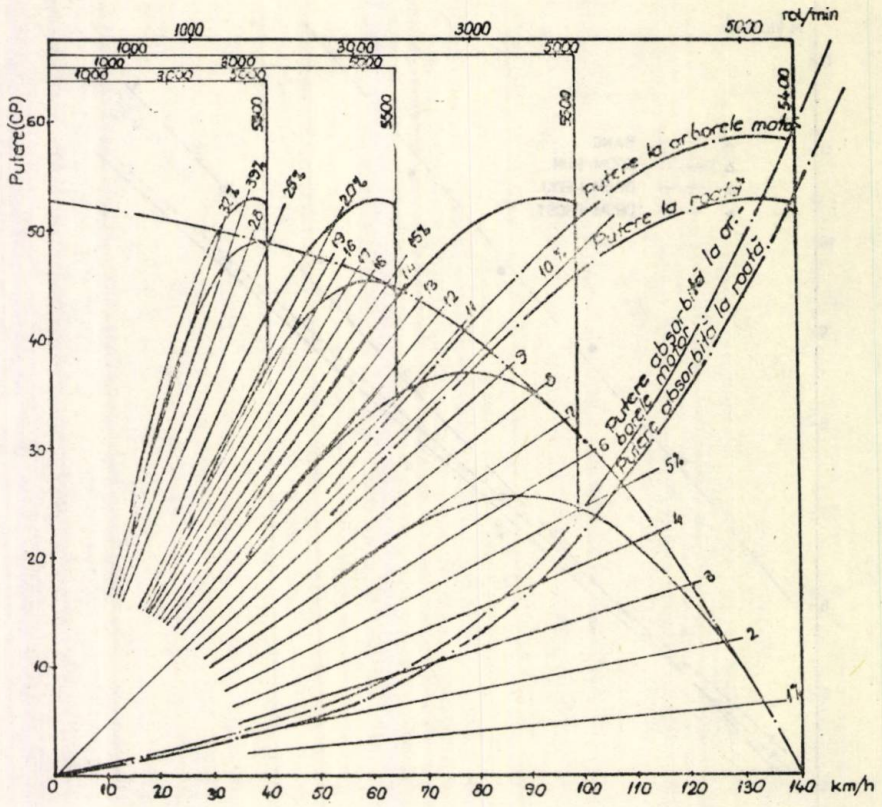


Fig. 7. — Momentul rezultat din ecuația de mișcare a autoturismului Dacia 1300 în condiții de deplasare în regim constant, pe drum cu panta zero.

Valorile din tabelul 1 au fost determinate pentru autoturismul Dacia 1300 parametrii următori: masa totală — 1320 kg; motor — 810—99; putere la banc — 58 CP (SAE); pneuri — 155; punte — 9 × 34; Cutie Viteze — 352; rapoarte: 13/47, 19/43, 25/37, 31/32; viteza pentru 1000 rot/min: 7,43; 11,85; 18,10; 26 km/h.

Din examinarea figurii 6, rezultă că momentul mediu la roată, la deplasarea autoturismului cu viteză stabilizată pe drumuri bune și medii, se apropie de momentul rezultat din ecuația de mișcare a autoturismului. Momentul mediu, la deplasarea autoturismului cu viteză stabilizată pe drumuri rele, diferă mult de momentul mediu determinat din ecuația de mișcare datorită coeficienților de rezistență la rulare, diferiți de la drum la drum. Abaterea mai mare, în sensul creșterii momentului mediu real la deplasarea autoturismului pe diverse categorii de drumuri cu panta zero, cu viteză stabilizată, se poate explica prin aceea că acțiunea denivelărilor poate fi privită ca pante de lungimi mici. Diagramele din figurile 4, 5 și 6 ne arată că este eronat a face dimensionarea și verificarea transmisiilor, în regim static, la momentul mediu rezultat din ecuația de mișcare, partea variabilă a momentului fiind destul de importantă.

Cunoscînd distribuţia momentului de torsiune în funcţie de viteza de deplasare şi de categoria drumului, cunoscînd şi rulajul mediu de funcţionare în aceste condiţii, în raport cu rulajul total de funcţionare al autoturismului, se pot determina caracteristicile şi duratele încercărilor de laborator.

Timpul, respectiv rulajul, în diverse condiţii de sarcină şi turaţii (viteze), pe diverse categorii de drumuri, se poate determina experimental cu ajutorul unui regimometru.

Pe baza înregistrărilor se poate trasa distribuţia regimurilor de sarcini şi turaţii pe diverse categorii de drumuri, implicit distribuţia momentelor medii care solicită transmisia (fig. 8, 9 şi 10).

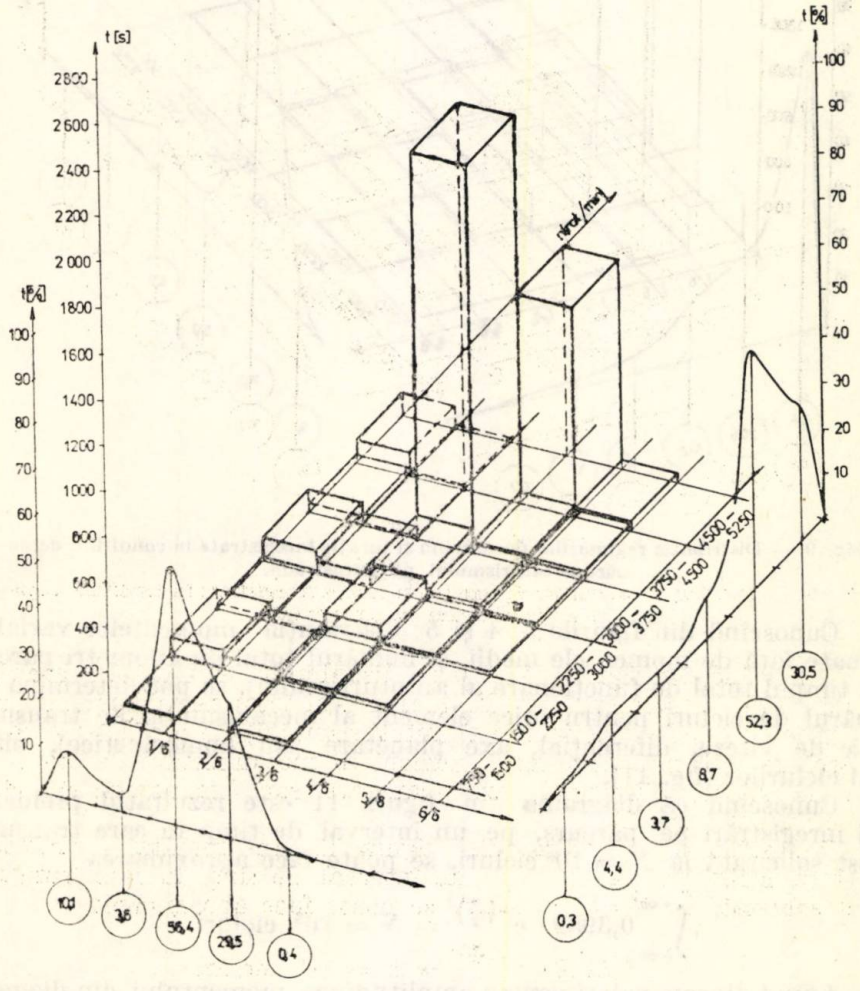


Fig. 8. — Distribuţia regimurilor de sarcină pe turaţie înregistrată în condiţiile deplasării autoturismului în oraş.

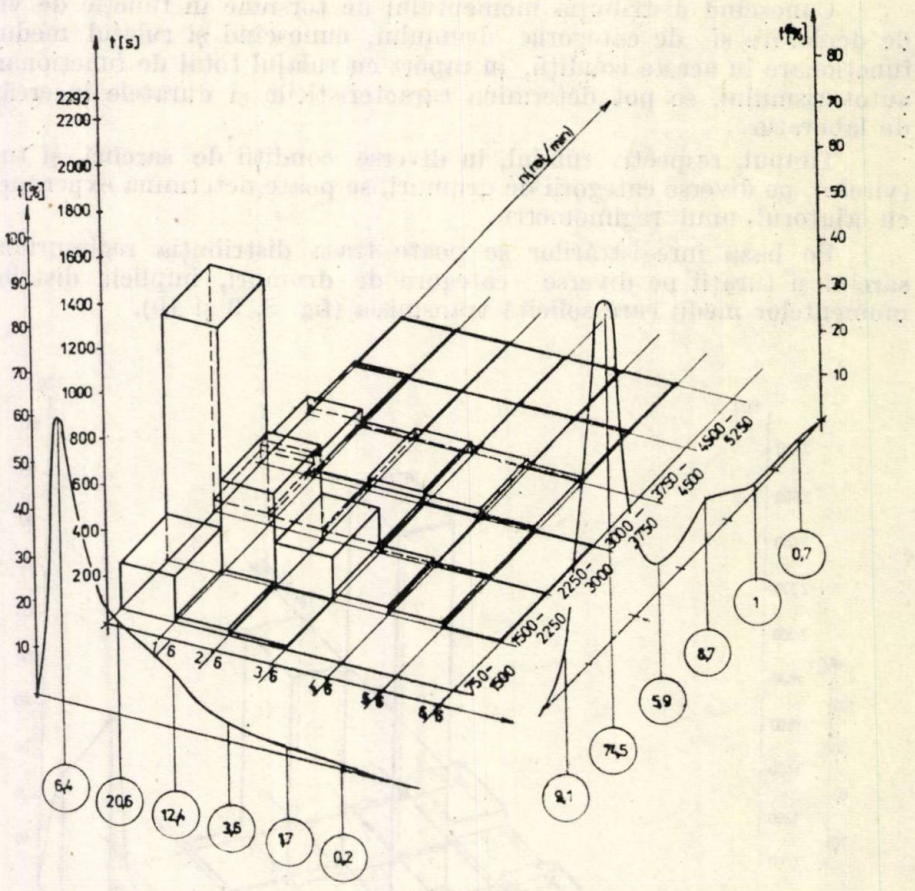


Fig. 9. — Distribuția regimurilor de sarcină și turație înregistrate în condițiile deplasării autoturismului pe autostradă.

Cunoscînd din figurile 3, 4 și 5 distribuția momentelor variabile, normate față de momentele medii, și numărul total de kilometri parcurși (sau timpul total de funcționare al autoturismului), se pot determina atît numărul de cicluri pentru orice element al mecanismului de transmisie (cutie de viteze, diferențial, axe planetare sau homocinetice), cît și tipul ciclurilor (fig. 11).

Cunoscînd că diagrama din figura 11 este rezultatul prelucrării unei înregistrări pe parcurs, pe un interval de timp în care transmisia a fost solicitată la $N = 10^6$ cicluri, se poate face aproximarea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0{,}3989 \cdot e^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2} = N = 10^6 \text{ cicluri.} \qquad (1)$$

Luînd diverse valori pentru amplitudinea momentului din diagrama 11 și calculînd numărul de cicluri care depășesc anumite valori, se pot trasa curbele din figura 12.

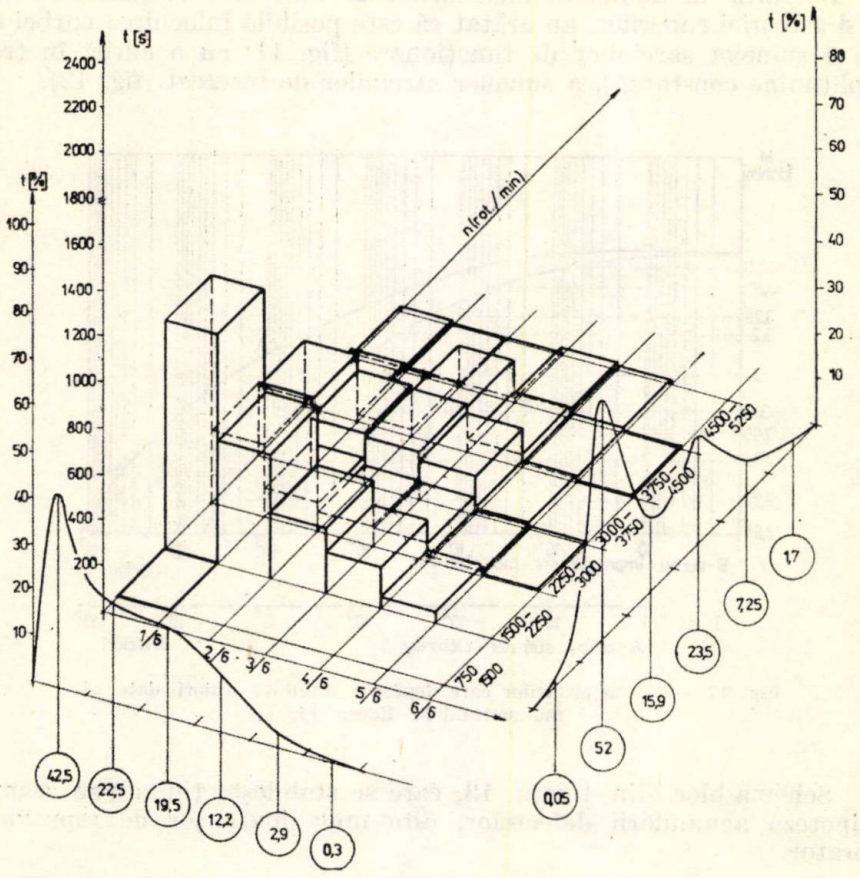


Fig. 10. — **Distribuția regimurilor de sarcină și turație înregistrate în condițiile deplasării autoturismului pe un drum mediu.**

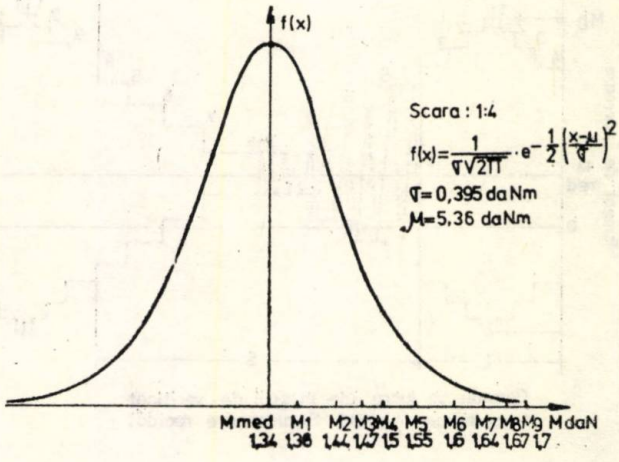


Fig. 11. — **Distribuția momentului în axa homocinetică a autoturismului Dacia 1300 rezultată din prelucrarea datelor înregistrate pentru un parcurs dat.**

Lucrările în domeniul încercărilor de laborator la solicitări variabile şi a teoriei ruperilor, au arătat că este posibilă înlocuirea curbei continui a sumelor sarcinilor de funcţionare (fig. 11) cu o curbă în trepte (amplitudine constantă), a sumelor sarcinilor de încercat (fig. 12).

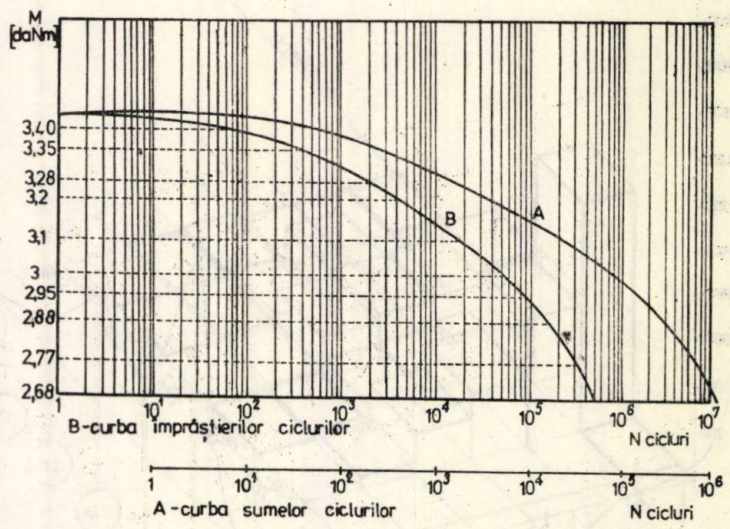


Fig. 12. — Curba ciclurilor care depăşesc anumite valori date ale momentului în figura 11.

Schema-bloc din figura 13, care se stabileşte ţinîndu-se seama şi de ipoteza acumulării defectelor, este mult mai uşor de reprodus în laborator.

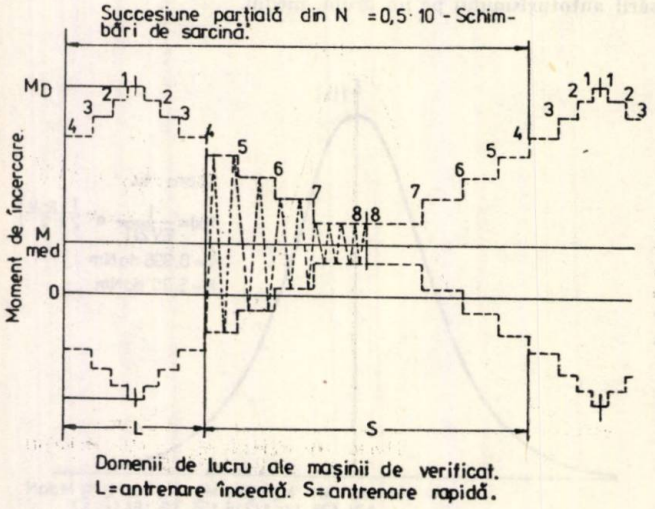


Fig. 13. — Schema-bloc de reproducere a ciclurilor de anumite valori date ale momentului din figura 12.

3. REPRODUCEREA ÎN LABORATOR A SOLICITĂRILOR REALE ÎNREGISTRATE ÎN EXPLOATARE

Instalaţia proiectată, realizată şi pusă în funcţiune la Institutul de cercetări şi proiectări autoturisme Piteşti, este o instalaţie complexă, care are posibilitatea să încerce concomitent sau succesiv următoarele subansamble :

mecanismul de transmisie : ambreiaj, cutie de viteze, diferenţial, axe homocinetice, pneuri ;

mecanism de suspensie : braţe inferioare, braţe superioare, flexiblocuri, arcuri, amortizoare, rotule superioare şi inferioare ;

mecanism de suspensie : cremalieră, pinioane, braţe, rotule de direcţie, cuplaje de direcţie.

Instalaţia permite încărcări statice variabile, corespunzătoare diverselor situaţii de încărcare a autoturismului şi reproducerea de drumuri cu amplitudini diferite ale denivelărilor cu aceeaşi lungime de undă dar cu pulsaţii circulare variabile (fig. 14 şi fig. 15).

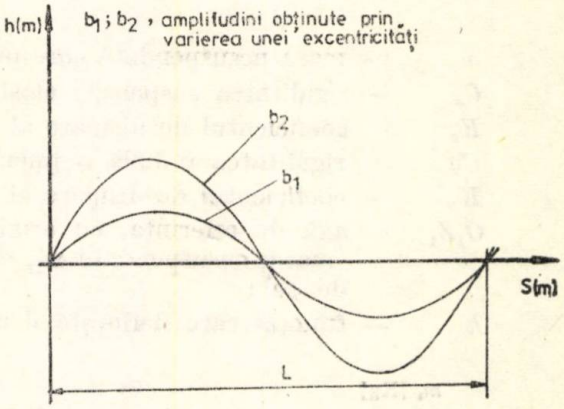


Fig. 14. — Reproducerea drumurilor cu amplitudini diferite ale denivelărilor cu ajutorul instalaţiei experimentale.

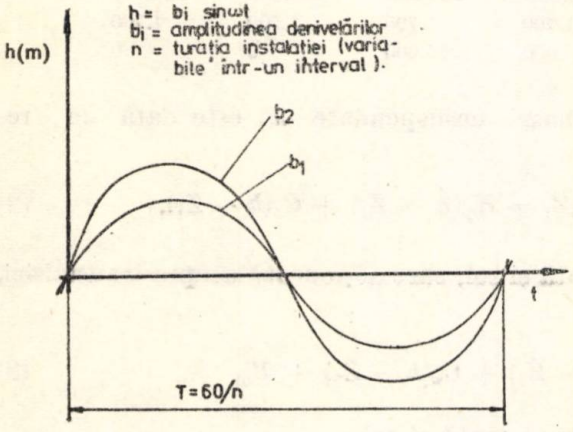


Fig. 15. — Reproducerea drumurilor cu frecvenţe diferite ale denivelărilor cu ajutorul instalaţiei experimentale.

Modelul mecanic al punţii faţă al autoturismului Dacia 1300, pe instalaţia experimentală, arată ca în figura 16, notaţiile avînd următoarele semnificaţii şi valori :

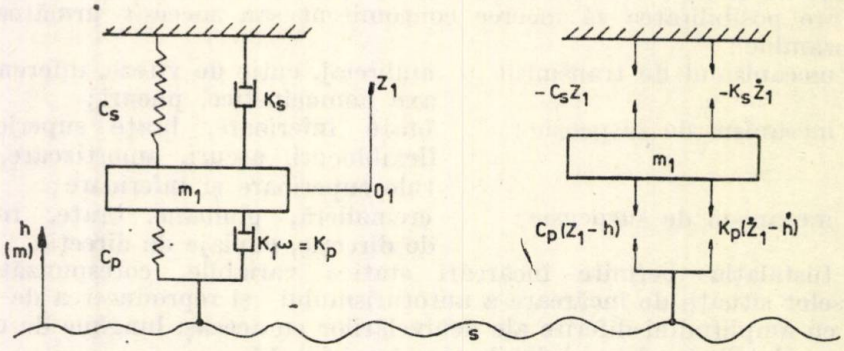


Fig. 16. — Modelul mecanic al punţii faţă a autoturismului Dacia 1300 pe instalaţia experimentală.

m_1 — masa nesuspendată corespunzătoare punţii faţă ;
C_s — rigiditatea suspensiei elastice a punţii faţă ;
K_s — coeficientul de disipare al amortizoarelor faţă ;
C_p — rigiditatea radială a pneului ;
K_p — coeficientul de disipare al pneului ;
O_1Z_1 — axă de referinţă, cu originea O_1 în centrul de masă al masei nesuspendate m_1, cînd aceasta este în repaos faţă de sol ;
h — funcţia care defineşte drumul,

m_1 [Kg]	68	68	68	68
C_s[N/m]	27.000	21.600	27.000	21.600
C_p[N/m]	250.000	250.000	250.000	250.000
K_s[Ns/m]	1.700	1.700	1.700	1.700
$K_p^* = K_p\omega$[N/m]	25.000	25.000	0	0

Ecuaţia de mişcare a masei nesuspendate m_1 este dată de relaţia

$$m_1\ddot{Z}_1 + K_s\dot{Z}_1 + C_sZ_1 = K_p(\dot{h} - \dot{Z}_1) + C_p(h - Z_1), \tag{2}$$

iar forţa de contact dintre roată şi sol, care acţionează asupra transmisiei, este dată de relaţia

$$P_{din} = K_p(\dot{h} - \dot{Z}_1) + C_p(h - Z_1) + P_0, \tag{3}$$

unde P_0 este forţa statică dintre roată şi sol.

Astfel, momentul dinamic care încarcă transmisia este

$$M_{din} = \gamma \cdot P_{din}, \tag{4}$$

în care

$$\gamma = r_d f_0,$$

r_d este raza de rulare a roții,
f_0 — coeficientul de rezistență la rulare.

4. FUNCȚIA DE RĂSPUNS ÎN FRECVENȚĂ A SISTEMULUI DIN FIGURA 16

Ecuația de mișcare a punții față, pe instalația experimentală, dată de relația (2), conduce la funcția de răspuns în frecvență (vezi [2], Cap. VI, § 3.1):

$$H_{Z_1}(i\omega) = \frac{C_p + K_p \cdot i \cdot \omega}{-m_1 \cdot \omega^2 + C_s + C_p + (K_s + K_p) \cdot i \cdot \omega}, \tag{5}$$

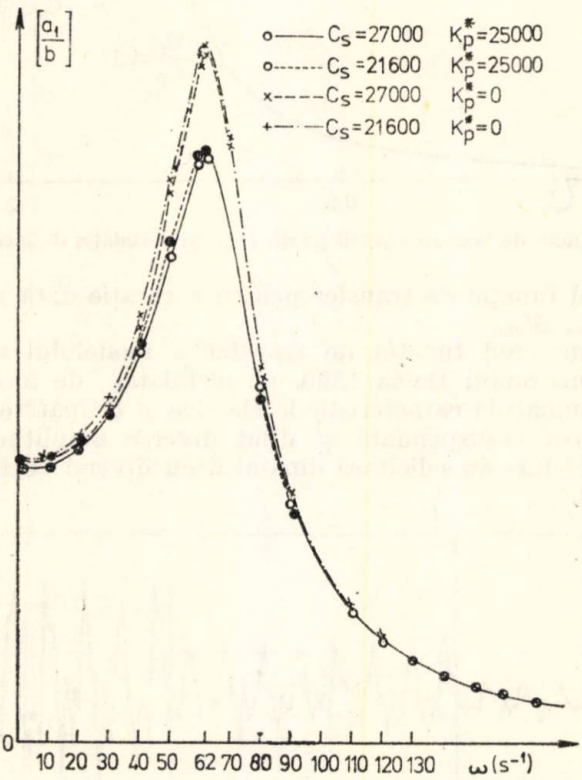


Fig. 17. — Funcția de transfer a punții față, pe instalația experimentală (fig. 16).

reprezentată în figura 17 cu defazajul dat de relaţia

$$\varphi_{z_1}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-m_1 K_p \omega^3 + K_p C_s \omega - K_s C_p \omega}{(-m_1 C_p + K_p^2 + K_p K_s)\,\omega^2 + C_p^2 + C_p C_s}, \qquad (6)$$

reprezentat în figura 18.

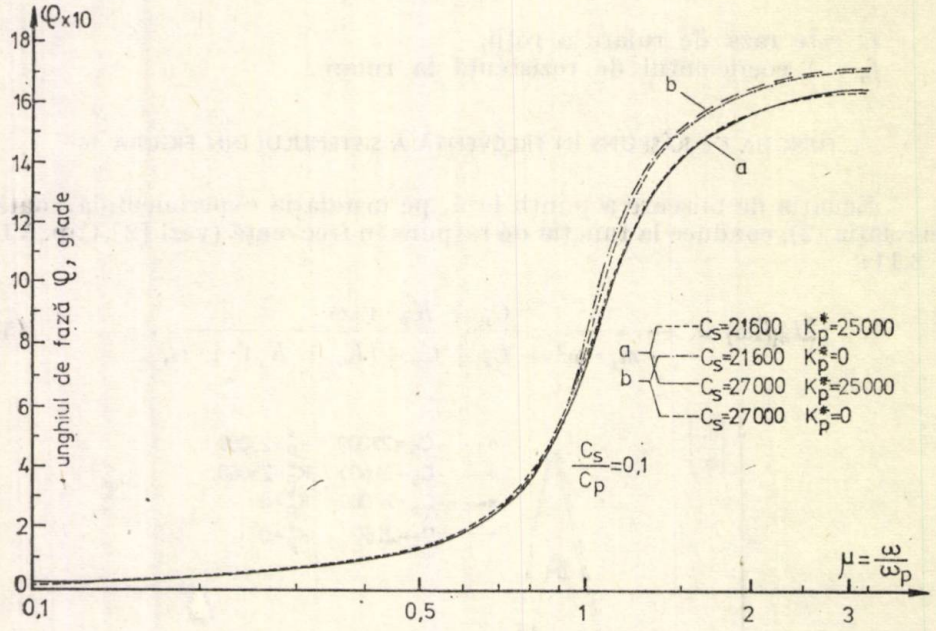


Fig. 18. — Unghiul de fază al mişcării punţii faţă, pe instalaţia de încercare (fig. 16).

Cunoscînd funcţia de transfer pentru o turaţie dată n, se poate cunoaşte Z_1, P_{din}, M_{din}.

Deci, cunoscînd funcţia de transfer a modelului mecanic punte faţă al autoturismului Dacia 1300, pe instalaţia de încercare, funcţie care depinde numai de caracteristicile elastice şi disipative ale suspensiei şi pneului, masa nesuspendată şi dînd diverse amplitudini drumului, putem obţine cicluri de solicitare dinamică cu diverşi coeficienţi de asimetrie (fig. 19).

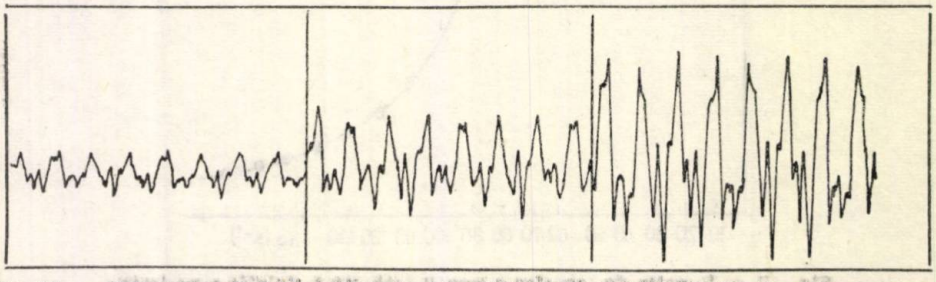


Fig. 19. — Cicluri de solicitare variabilă cu coeficienţi de asimetrie diferiţi, obţinute în axa homocinetică a autoturismului Dacia 1300 pe instalaţia experimentală.

Prin varierea încărcării statice pe roată, realizată prin apropierea sau îndepărtarea punții de tambur, se pot obține valori diferite pentru momentul mediu (fig. 20).

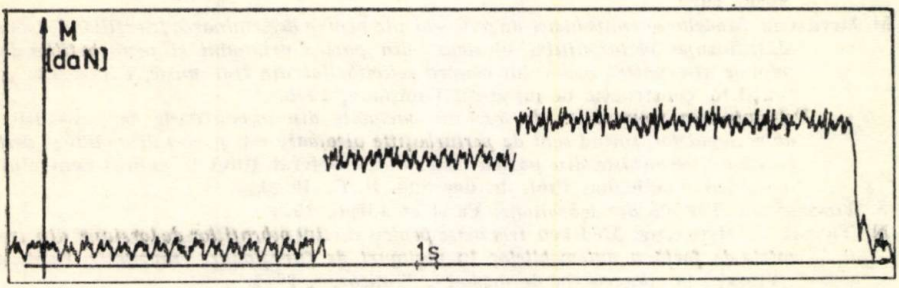


Fig. 20. — Moment mediu diferit cu aceeași valoare a momentului variabil obținut pe instalația experimentală.

5. CONCLUZII

Din cele arătate mai sus, rezultă că instalația experimentală poate să reproducă, prin varierea excentricității și a sarcinii pe roată, o încărcare care să reprezinte solicitarea aleatoare din exploatare, solicitare care prin prelucrare statistică se poate pune sub forma din figura 13.

Instalația, proiectată și realizată, a demonstrat că este posibil să se obțină o încărcare în laborator a transmisiei, după schema-bloc ce rezultă din prelucrarea statistică a ciclurilor de solicitare înregistrate în exploatare.

S-au pus astfel bazele unor încercări ale căror rezultate să poată fi transpuse în kilometri echivalenți „tip client", într-un termen scurt.

Primită la redacție la 28 februarie 1977

BIBLIOGRAFIE

1. B. Horst, *Auslegung Elektro-hydraulischer Fahrbahnunebenheits-Simulatoren*, ATZ *6* (1971).
2. Gh. Buzdugan și colab., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Edit. Academiei R. S. România, 1975.
3. C. B. Bekker, *Introduction to terrain vehicle system*, Edit. Universității din Michigan, 1969.
4. D. Cioclov, *Rezistență și fiabilitate la solicitări variabile*, Edit. Facla, 1975.
5. Fl. Dincă, C. Teodosiu, *Vibrații neliniare și aleatoare*, Edit. Academiei R. S. România, 1969.
6. Fl. Dincă și colab. *Determinarea confortului și aderenței roată-sol*, Contract C.M.S. — I.C.P.A.
7. Fl. Dincă, *Regimuri tranzitorii în transmisia automobilului*, St. cerc. mec. apl., *3* (1964).
8. E. Gassner, *Betriebsfestigkeit — Eine Bemessungsgrundlage für Konstruktionsteile mit statistische wechselnder Betriebsbeanspruchung*, Konstruktion, **6**, *3* (1954).
9. E. Gassner, *Experimentelle Lebensdauerermittlung mit zufallsartigen Beanspruchen von Konstruktionselementen*, Materialprüfung, *6* (1973).
10. T. Haas, *Prüfanordnungen und Maschinen der Dauerschwingprüftechnik*, „Messen und Prüfen", *4* (1966).

11. M. IFRIM, *Analiza dinamică a structurii şi inginerie seismică*, Edit. didactică şi pedagogică, 1973.
12. R. H. JAEKLER, *Simulation, Duplication and Synthesis of fatigue Load & Histories*, Automotive Engineering Congres Detroit, Michigan, January 12—16, 1970.
13. M. MITSCHKE, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
14. M. MITRACHE, *Modelarea transmisiei de autovehicule pentru determinarea funcţiilor de transfer al influenţei perturbaţiilor aleatoare din partea drumului şi perturbaţiilor deterministe din partea motorului asupra solicitărilor din transmisie*, Conferinţa „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.
15. — *Determinarea momentelor de torsiune variabile din mecanismele de transmisie ale autovehiculelor, ţinînd cont de perturbaţiile aleatoare din partea drumului şi perturbaţiilor deterministe din partea motorului*, Referat ţinut în cadrul Centrului de mecanică a solidelor, Prof. dr. doc. ing. R. C. Bogdan.
16. S. TIMOŞENKO, *Théorie des vibrations*, Paris et Liège, 1974.
17. N. TRUICĂ, M. MITRACHE, *Model cu trei mase pentru studiul vibraţiilor de torsiune din transmisia de forţă a automobilelor în regimuri de funcţionare tranzitorii*, Conferinţa „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

ASUPRA COMPORTĂRII ÎMBINĂRII BOLȚ-OCHI LA ÎNCĂRCĂRI CARE DEPĂȘESC LIMITA DE ELASTICITATE

de MIRCEA MUNTEANU
I.C.A. Brașov

Lucrarea se ocupă de studiul îmbinării bolț-ochi la solicitări în regim elastoplastic, mai precis de studiul „rezervelor de rezistență" pe care îmbinarea le prezintă la astfel de solicitări. În lucrare se urmărește evoluția mai multor mărimi caracteristice, pe măsura creșterii încărcării: cîmpul de tensiuni și deformații și în special locul și valoarea tensiunii maxime și deformației maxime, ovalizarea găurii (atît ovalizarea totală, cît și componenta ei plastică), durabilitatea piesei în cazul solicitărilor variabile etc. S-a urmărit, de asemenea, propagarea zonei plastice în ochi.
Pentru aceasta s-au folosit două metode teoretice: rezolvarea numerică a ecuației biarmonice a teoriei elasticității și metoda elementului finit, extinsă și în domeniul elastoplastic. Rezultatele teoretice obținute s-au comparat cu rezultate experimentale obținute de autor sau extrase din literatura de specialitate.

1. PUNEREA PROBLEMEI

În această lucrare se studiază îmbinarea bolț-ochi, prezentată în figura 1, sub acțiunea unei forțe acționînd după axa de simetrie a piesei. Încărcarea ochiului se face prin intermediul unui bolț. Se presupune că jocul între bolț și ochi este nul. Studiul urmărește îndeosebi comportarea ochiului după depășirea limitei de elasticitate, adică după ce în punctul cel mai solicitat din ochi s-a ajuns în stadiul plastic. Astfel de studii au devenit necesare odată cu dezvoltarea unor construcții metalice supuse la solicitări variabile caracterizate printr-un număr mic de cicluri — așa-numitele solicitări oligociclice. În aceste cazuri, tensiunile care apar în piesă pot depăși cu mult rezistența la oboseală și deci să conducă la apariția în piesă a unor deformații plastice apreciabile, care, din punct de vedere al rezistenței, sînt acceptabile. Rămîne de văzut dacă și din punct de vedere al siguranței în exploatare deformațiile plastice care apar (însoțite de deplasări remanente) sînt admisibile.

Un exemplu tipic de structuri supuse la solicitări oligociclice îl constituie construcțiile aeronautice (trenuri de aterizare — cicluri date de numărul de aterizări, fuzelaje presurizate — cicluri presurizare — depresurizare etc.). Piese de felul celor studiate în această lucrare sînt foarte răspîndite în construcțiile aviatice.

Din cele de mai sus rezultă că pentru o dimensionare corectă, aceasta în sensul unei greutăți minime, condiție de importanță capitală în aviație, se poate renunța uneori la durabilitatea infinită a pieselor și deci la calculul clasic de oboseală.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 36, NR. 6, 1977, P. 905—923

Aşa cum s-a arătat în numeroase lucrări, pentru durabilităţi finite ale pieselor (durabilităţi mai mici de $10^5 \ldots 10^6$ cicluri pentru piese din oţel), un rol important îl au deformaţiile plastice. Se poate afirma că amplitudinea deformaţiilor plastice controlează procesul degradării în

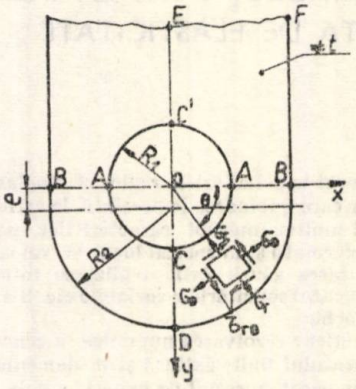


Fig. 1

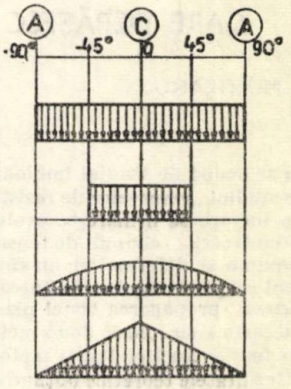


Fig. 2

domeniul durabilităţii limitate. Acest lucru este foarte bine evidenţiat de „legea lui Coffin", dedusă experimental pentru epruvete solicitate alternant simetric şi care este valabilă pentru cele mai multe materiale folosite în industrie (oţel, aluminiu, titan, ş.a.):

$$\Delta\varepsilon_p \cdot N^{\alpha} = C, \tag{1}$$

unde $\Delta\varepsilon_p$ este amplitudinea deformaţiei plastice, N durabilitatea, iar α un exponent dedus experimental ($\alpha \simeq 0{,}5$). Această relaţie are avantajul că este liniară în coordonate bilogaritmice, iar constanta C se poate deduce din valoarea deformaţiei specifice de rupere la solicitare statică, pentru care s-a considerat $N = 1/4$. Concordanţa relaţiei (1) cu experienţele este remarcabilă. Relaţii de tip Coffin pot fi deduse şi pentru alte tipuri de solicitări sau alte configuraţii de piese.

În cazul îmbinării bolţ-ochi încărcarea variabilă poate fi cel mult pulsatorie, adică coeficientul de asimetrie, R, variază între limitele 0 şi 1. În prezenta lucrare coeficientul R se defineşte ca raportul dintre forţa minimă din bolţ şi forţa maximă din bolţ, deci ca raport de forţe exterioare. În cele ce urmează se va considera, acoperitor, ciclul pulsator ($R=0$).

Din cele de mai sus rezultă marea importanţă pe care o capătă extinderea studiului cîmpurilor de tensiuni şi deformaţii peste limita de elasticitate.

În literatura de specialitate sînt studiate mai ales două cazuri extreme:

— Solicitarea ochiului în domeniul elastic, cu determinarea unui coeficient de concentrare al tensiunilor k_σ, ceea ce rezolvă doar jumătate de problemă, deoarece nu permite evaluarea forţei la care se rupe piesa,

sau, mai general, nu permite determinarea forțelor exterioare la care funcționarea piesei devine inadmisibilă.

— Comportarea ochiului în preajma ruperii și deducerea unui coeficient k (pe cale experimentală mai ales) folosit în relația

$$P_r = k \cdot \sigma_r \cdot A_{AB}, \tag{2}$$

σ_r fiind tensiunea de rupere la tracțiune a materialului, A_{AB} aria secțiunii AB, iar P_r forța de rupere a ochiului.

Ceea ce se întîmplă între aceste două limite este foarte puțin studiat, mai ales datorită dificultăților de calcul legate de neliniaritatea problemei. În prezenta lucrare se propun următoarele obiective :

a) Studiul evoluției tensiunii și a deformației maxime din ochi odată cu creșterea încărcării.

b) Studiul propagării zonei plastice în ochi.

Dimensiunile și forma zonei plastice constituie un indicator calitativ foarte elocvent în ceea ce privește aprecierea „rezervei de rezistență" a piesei.

c) Studiul ovalizării remanente a găurii prin determinarea variației lungimii diametrului CC' (fig. 1). Aceasta cu scopul de a stabili un criteriu pentru dimensionarea ochiului. Un astfel de criteriu ar putea fi condiția ca ovalizarea remanentă să se încadreze în cîmpul de toleranță pentru execuție, impus la proiectare. Unii autori [2], [7], [13] consideră rezonabil ca să se permită o deformație plastică în timpul funcționării ca valoarea admisibilă ; s-ar putea lua, de exemplu 0,2 %, valoare utilizată la determinarea limitei tehnice de curgere sau o valoare de același ordin de mărime cu deformația elastică. Este foarte bine ca să se cunoască efectul deformațiilor plastice din punctele cele mai solicitate ale piesei asupra deplasărilor remanente (ovalizarea găurii în cazul studiat), deplasarea fiind o mărime direct măsurabilă și mult mai sugestivă decît deformația.

d) Pe baza rezultatelor din literatura de specialitate se va face o evaluare a influenței deformațiilor plastice asupra durabilității ochiului (considerînd ochiul supus la solicitări variabile pulsatorii $R = 0$).

2. METODE TEORETICE

În lucrarea [12], ca și în lucrările [5] și [6], problema a fost abordată considerînd ochiul bară curbă ; soluția s-a determinat pentru valoare nulă a excentricității găurii ($e = 0$, fig. 1). În lucrarea [12], în domeniul plastic s-a adoptat schematizarea caracteristicii materialului a lui Prandtl ($E_p = 0$, fig. 13). Unele rezultate obținute în lucrarea [12] sînt date în diagramele de mai jos.

În prezenta lucrare s-au folosit două metode teoretice, care vor fi expuse pe scurt în continuare :

— rezolvarea aproximativă a ecuației biarmonice din teoria elasticității plane — condițiile pe contur fiind asigurate folosind metoda celor mai mici pătrate — în domeniul elastic ;

— metoda elementelor finite, metodă extinsă şi în domeniul elastoplastic.

Pentru ambele metode s-au scris mai multe programe FØRTRAN, toate programele folosite fiind originale.

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei biarmonice ($\Delta^2 F = 0$) s-a plecat de la soluţia generală în coordonate polare a lui J.H. Michell; originea sistemului de coordonate s-a luat în punctul O (fig. 1), centrul găurii:

$$F(r,\ \theta) = f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\theta + g_n(r) \sin n\theta] + h(r,\ \theta), \tag{3}$$

unde $f_0(r) = B_0 r^2 + C_0 \ln r$,

$$f_1(r) \cos\ \theta + g_1(r) \sin\ \theta = (2B_1 r - 2C_1/r^3) \cos\theta + (2B_1' r - 2C_1'/r^3) \sin\theta,$$

$$h(r,\ \theta) = D_1 r \left(\ln r \cdot \cos\theta - \frac{2}{1-\mu}\, \theta \sin\theta \right),$$

$$f_n(r) = r^n (A_n + B_n \cdot r^2) + r^{-n}(C_n + D_n \cdot r^2),$$

$$g_n(r) = r^n (A_n' + B_n' \cdot r^2) + r^{-n}(C_n' + D_n' \cdot r^2).$$

Funcţia $F(r, \theta)$ fiind funcţia de tensiuni (Airy), tensiunile se deduc cu relaţiile

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \tag{4}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right).$$

Expresiile complete ale tensiunilor şi deplasărilor, folosind funcţia de tensiuni (3), se găsesc în lucrarea [14].

Întrucît ochiul este simetric şi simetric încărcat, s-a luat pentru rezolvare numai partea dreaptă; din această cauză din expresia (3) dispar toţi termenii în sinus. Metoda folosită constă în limitarea seriei (3) la un număr finit de termeni, în lucrare s-au considerat 49 termeni, adică s-a mers pînă la $\cos 12\theta$.

Deoarece funcţia $F(r, \theta)$ este soluţie generală a ecuaţiei biarmonice, rămîne să fie satisfăcute condiţiile pe contur, de unde se determină constantele necunoscute. Aceasta s-a realizat prin minimizarea expresiei

$$E = \Sigma_{CAC'}[(\sigma_r - q)^2 + \tau_{r\theta}^2] + \Sigma_{DBF}(\sigma_n^2 + \tau_{nt}^2) + \Sigma_{EF}(ku_n^2 + \tau_{nt}^2), \tag{5}$$

unde semnul $\Sigma_{CAC'}$ semnifică o sumă efectuată asupra unui număr finit de puncte de pe conturul CAC', ș.a. Indicii r, θ se referă la componentele tensorului tensiune raportați la reperul polar, iar indicii n, t se referă la componentele tensorului tensiune raportat la normala și tangenta la contur. Constanta k s-a ales ca produsul $k u_n^2$ să fie de același ordin de mărime cu ceilalți termeni. Constanta este necesară și pentru a se asigura omogeneitatea unităților de măsură. S-a folosit $k = E^2/R_1^2$, q reprezintă forța distribuită dintre bolț și ochi. Trebuie menționat aici că problema studiată nu este de tip Hertz în cazul jocului nul între bolț și ochi, sau chiar pentru valori mici ale jocului. Soluția Hertz dă pentru sarcina distribuită q valoarea zero. Forma distribuției sarcinii dintre bolț și ochi a fost determinată prin încercări. S-au studiat încărcare uniform distribuită pe o deschidere de 90° ($\theta = \pm 45°$, fig. 2) și 180° ($\theta = \pm 90°$), încărcare parabolică și încărcare triunghiulară (ultimele pe o deschidere de 180° ($\theta = \pm 90°$, fig. 2). Criteriul alegerii l-a constituit apropierea rezultatelor teoretice ale ambelor metode teoretice folosite aici, de rezultatele experimentale obținute prin încercări fotoelastice în lucrările [5] și [6]. Cel mai bine a corespuns distribuția triunghiulară (fig. 2).

Expresia E este deci suma pătratelor valorilor de pe conturul ochiului a unor tensiuni și deplasări, calculate într-un număr finit de puncte. În lucrare s-au folosit 52 de puncte (numărul de puncte este limitat de capacitatea memoriei calculatorului). Se menționează că dacă se folosea metoda satisfacerii condițiilor pe contur în puncte, se puteau utiliza doar 24 de puncte (pentru cei 49 de termeni ai seriei (3) utilizați). Coeficienții necunoscuți din funcția de tensiune F se află prin derivarea expresiei (5) în raport cu fiecare necunoscută și egalarea derivatei cu zero, adică dacă se pune funcția F sub forma

$$F = \Sigma C_i \cdot F_i(r, \theta),$$

se obține sistemul liniar

$$\frac{\partial E}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, N, \tag{6}$$

unde C_i sînt coeficienții necunoscuți, în număr de N, iar N este numărul de termeni la care se limitează seria (3). Problema este astfel rezolvată.

Cealaltă metodă teoretică folosită este metoda elementelor finite, care, după cum se știe, conduce tot la un sistem liniar și anume

$$\{R\} = [K] \cdot \{\delta\}, \tag{7}$$

unde $\{R\}$ este vectorul forțelor exterioare,

$\{\delta\}$ este vectorul deplasărilor necunoscute,

$[K]$ este matricea de rigiditate a structurii.

Elementele folosite sînt triunghiulare, cuplarea lor făcîndu-se prin vîrfurile triunghiului în așa numitele noduri . Matricea $[K]$ are dimensiunile $2n \times 2n$, unde n este numărul nodurilor. S-a folosit o împărțire în

elemente triunghiulare, care comportă 600 elemente şi 338 noduri, adică s-a obţinut un sistem de 676 ecuaţii. S-a utilizat metoda Gauss-Seidel pentru rezolvarea sistemului, în paralel cu utilizarea unui coeficient de suprarelaxare 1,8. Procedeul iterativ de rezolvare a sistemului de ecuaţii este stopat cînd termenii care se adaugă deplasărilor scad sub o anumită toleranţă. Pentru o toleranţă de circa 1‰ pentru deplasarea punctului C, soluţia sistemului se obţine în circa 120—200 cicluri de iteraţii, ceea ce înseamnă maximum cinci minute timp de calculator (programele au fost rulate pe un calculator Felix CE—256). În acest timp intră şi calcularea şi listarea tensiunilor în raport cu sistemele de coordonate polare şi cartezian precum şi calcularea tensiunilor principale şi a unghiului făcut de axele principale.

Programul a fost extins şi pentru calculul în regim elastoplastic, putîndu-se folosi orice schematizare a diagramei materialului. În lucrare s-a folosit schematizarea din figura 13, formată din două linii drepte.

S-a adaptat teoria micilor deformaţii elastoplastice, adică ecuaţiile lui Nadai-Hencky-Iliuşin.

În cele ce urmează este expusă pe scurt metoda numerică, metodă inspirată din cea folosită de Zienkiewicz, Valliappan şi King [11]. Principiul constă în faptul că nu se modifică matricea de rigiditate a structurii, $[K]$, aşa cum se face în alte metode [11], în detrimentul timpului de calculator, ci se modifică vectorul termenilor liberi $\{R\}$ (vezi ec. 7). Se parcurg următoarele etape :

a) Se rezolvă sistemul (7), considerînd structura liniară. Cea mai mare intensitate a tensiunilor ($\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$), care apare în structură, se consideră ca valoare a limitei de curgere σ_c. S-a notat cu σ_1, σ_2 tensiunile principale.

b) Se aplică o creştere de sarcină exterioară, şi în primă aproximaţie se consideră că se măresc proporţional şi deplasările nodurilor (şi deci şi tensiunile din elemente, vectorul $\{\sigma\}$).

c) Se caută elementele finite în care intensitatea tensiunilor depăşeşte valoarea lui σ_c. Se foloseşte deci criteriul de plasticitate a lui Huber-Mises-Hencky. Se consideră valorile deformaţiilor ca fiind corecte şi se recalculează tensiunile,

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_m) + \sigma_m,$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_m) + \sigma_m, \tag{8}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_i}\gamma_{xy},$$

unde ε_i este intensitatea deformaţiilor, dedusă din rezultatele calculului, iar σ_i este determinat funcţie de diagrama materialului (fig. 13, în cazul studiat); ε_m şi σ_m sînt valorile medii ale deformaţiilor şi tensiunilor. Pentru a se asigura în interiorul elementului noile valori ale tensiunilor, $\{\sigma'\}$,

în nodurile elementului se așază forțele $\{\Delta R\}$, care introduc tensiunile $\{\Delta\sigma\} = \{\sigma'\} - \{\sigma\}$ (corespondența dintre $\{\Delta R\}$ și $\{\Delta\sigma\}$ este biunivocă).

d) După parcurgerea tuturor elementelor, echilibrul ansamblului fiind violat, se rezolvă din nou sistemul (7) pentru vectorul $\{R\}$ astfel modificat; noile soluții diferă foarte puțin de cele vechi, astfel că soluția se obține foarte rapid în cîteva cicluri de iterație prin metoda Gauss-Seidel.

e) Ca urmare, în anumite elemente se depășește din nou valoarea lui σ_c și deci se repetă etapele c) și d). Calculul este oprit cînd valorile componentelor vectorului $\{\Delta R\}$ devin suficient de mici și atunci se listează valorile deplasărilor și ale tensiunilor. Procedeul este extrem de convergent și rezultatul se obține în 2—6 repetări ale etapelor c) și d). Numărul de parcurgeri ale etapelor c) și d) pînă la atingerea preciziei dorite crește cu creșterea deformațiilor plastice; dacă acestea sînt foarte mari, metoda devine slab convergentă și programul este oprit (s-au admis maximum 20 cicluri). În acest moment sarcina atinsă este foarte aproape de sarcina limită.

f) După terminarea etapei e) se reia programul începînd cu etapa b).

Repartiția forței dintre bolț și ochi s-a considerat, ca și la metoda precedentă, triunghiulară. Programul folosit la rezolvarea problemei plane a teoriei elasticității prin metoda elementului finit face parte dintr-un complex mai mare de programe FØRTRAN, denumit SSELF-(Sistem de Subrutine pentru metoda Elementului Finit) în curs de definitivare în cadrul grupei de calcule aerodinamice și de rezistență a Intreprinderii de construcții aeronautice Brașov.

3. METODE EXPERIMENTALE

Verificarea experimentală a rezultatelor teoretice s-a făcut pe mai multe căi. În domeniul elastic s-au folosit încercările tensiometrice și fotoelastice din lucrarea [5], care conține un studiu experimental și teoretic foarte amănunțit al problemei liniare a îmbinării bolț-ochi. Pentru studiul experimental al ochiului în regim elastoplastic, autorul a făcut o serie de încercări pe modele din material cromoplastic în vederea studierii propagării zonei plastice. Se știe că materialul cromoplastic are proprietatea de a-și schimba culoarea în locurile unde se depășește valoarea tensiunii de curgere (se înnegrește la compresiune și se albește la tracțiune). S-au făcut de asemenea măsurători foarte exacte (pînă la 1 μ precizie) a diametrului CC' (fig. 1) în vederea determinării ovalizării găurii la depășirea limitei elastice. Aceste măsurători au fost efectuate pe modele de ochiuri din oțel cu raportul $\varkappa = R_2/R_1 = 2{,}5$ (fig. 1) și $R_1 = 15$ mm și cu valori ale excentricității $e = 0$ și $e = 7{,}5$ mm $(R_1/2)$.

Pentru studiul ruperii s-au încercat pînă la distrugere mai multe modele de ochiuri din dural și oțel, aceasta cu scopul de a determina locul unde se produce cu precădere ruperea.

4. PREZENTAREA REZULTATELOR TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE

În urma rezultatelor obţinute s-a găsit că punctul cel mai solicitat din piesă în domeniul elastic (şi deci primul în care se va atinge valoarea tensiunii de curgere) este punctul A pentru valori ale curburii $\varkappa = R_2/R_1$ mai mici de 4. În cazul $\varkappa > 4$ punctul cel mai solicitat este punctul C.

În prezenta lucrare s-au studiat ochiuri cu $\varkappa = 1{,}5\,;\ 2\,;\ 2{,}5\,;\ 3$ (deci $\varkappa < 4$).

4.1. *Solicitări în regim elastic.* Pentru caracterizarea concisă a solicitării s-au folosit următorii parametri:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{med}}, \tag{9}$$

$$k'_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{p_{med}}, \tag{9'}$$

unde σ_{max} este σ_θ. în punctul A (fig. 1),

σ_{med} este $\sigma_{\theta med}$ în secţiunea AB,

p_{med} este presiunea medie a bolţului pe ochi, calculată pe protecţia suprafeţei de contact pe direcţia x.

Se poate arăta uşor că

$$k'_\sigma = k_\sigma/(\varkappa - 1). \tag{10}$$

Mărimea k'_σ se poate calcula cu relaţia empirică dedusă pe baza diagramei din figura 3

$$k'_\sigma = 1 + 2 \ln \frac{\varkappa^2 + 4}{\varkappa^2 - 1}. \tag{11}$$

Pentru $\varkappa > 4$ definirea de mai sus a lui k_σ şi k'_σ nu are sens. În acest caz ($\varkappa > 4$), pentru estimarea concentrării tensiunilor se poate utiliza relaţia

$$\frac{\sigma_{iC}}{p_{med}} \simeq 1{,}3 \ldots 1{,}5$$

unde σ_{iC} este valoarea intensităţii tensiunilor în punctul C. Relaţia este valabilă pentru $\varkappa \in (2,\ \infty)$.

În diagrama din figura 3 sînt date rezultatele obţinute de către autor sau în alte lucrări, experimental sau teoretic. Se observă o foarte bună concordanţă între metodele folosite. Din diagrama din figura 3 (ca şi din relaţia (11)) se poate trage concluzia că pentru $\varkappa$ foarte mare, k'_σ se apropie de 1, fapt confirmat de rezultatele obţinute prin metoda elementului finit.

S-a studiat și cazul existenței unei dezaxări a găurii față de centrul conturului exterior. Pentru excentricitate s-a luat valoarea $R_1/2$, valoare recomandată în literatură. Din rezultatele prezentate în figura 3 se vede că nu se obține o scădere sensibilă a lui k_σ. Scăderea e de circa 10 %.

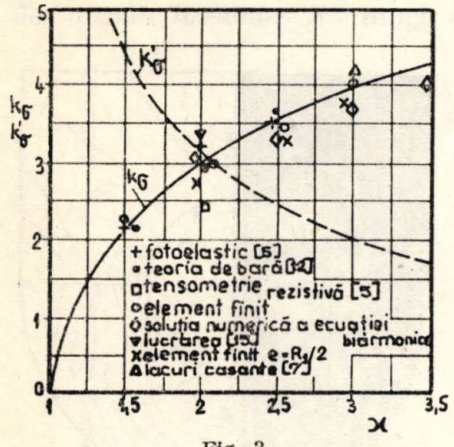


Fig. 3.

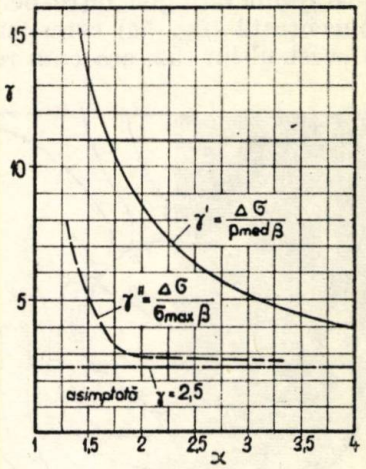


Fig. 4

Alți parametri utili în caracterizarea solicitării ochiurilor în regim elastic sînt:

$$\gamma' = \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}\right)_A \cdot \frac{R_1}{p_{med}} \text{ și} \tag{12}$$

$$\gamma'' = \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}\right)_A \cdot \frac{R_1}{\sigma_{max}}, \tag{12'}$$

între care există relația

$$\gamma'' = \gamma' / k'_\sigma. \tag{13}$$

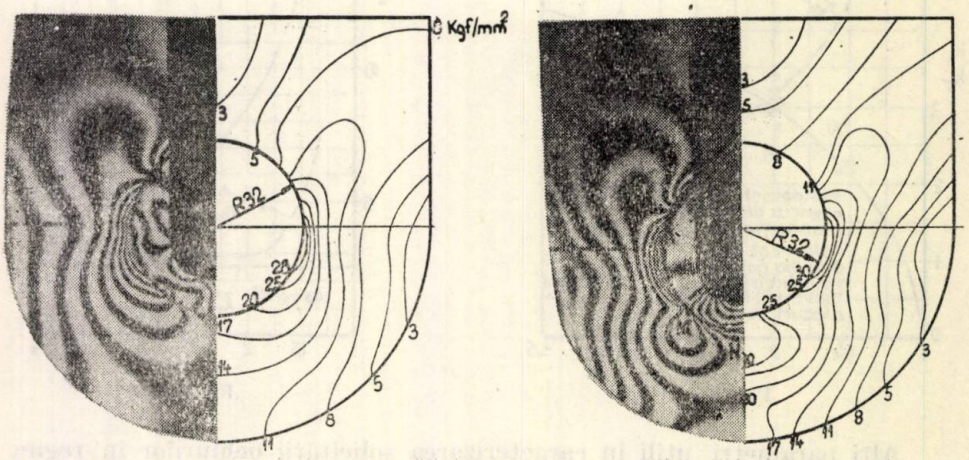
În calculul derivatelor parțiale din punctul A s-au folosit diferențe finite:

$$\left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}\right)_A \simeq \frac{\Delta \sigma}{\beta R_1}, \text{ unde } \beta = 0{,}1.$$

Parametrii γ' și γ'' sînt reprezentați grafic în figura 4. Concluzia care se trage din examinarea diagramelor din figura 4. este: pentru aceeași valoare a lui σ_{max} din punctul A, gradientul lui σ_θ în punctul A pe direcție radială practic nu depinde de $\varkappa$, pentru $\varkappa > 1{,}75$. Atît γ' cît și γ'' tind asimptotic către valoarea 2,5.

În figura 5. sînt date spre comparație izocromaticile obținute prin încercări fotoelastice în lucrarea [5] și izocromaticile (curbele σ_1 —

$-\sigma_2 = \text{const.}$) obținute pe calculator prin metoda elementului finit și prin rezolvarea numerică a ecuației biarmonice (diferențele dintre cele două metode pentru cazul considerat sînt neglijabile așa cum reiese și din figurile 6 și 7). S-au prezentat rezultatele obținute pentru $\varkappa = 2{,}5$ cu încărcarea ochiului repartizată triunghiular (fig. 5 *a* — corespunzător ajustajului fără joc între ochi și bolț) și încărcarea ochiului cu o forță concentrată (fig. 5*b*) corespunzătoare unui joc foarte mare. În realitate, în acest ultim caz, așa cum reiese și din figura 5 *b*, contactul dintre bolț



a. Repartiție triunghiulară (P=9600 Kgf, $\varkappa$=2,5)

b. Forță concentrată (P=9600 Kgf, $\varkappa$=2,5)

Fig. 5.

și ochi nu se face punctiform, ci pe o zonă MN. Cu această excepție, concordanța dintre încercările fotoelastice și rezultatele numerice este foarte bună.

În diagramele din figurile 6 și 7 sînt prezentate, de asemenea, rezultatele obținute prin rezolvarea numerică a ecuației biarmonice. Concordanța dintre rezultatele acestei metode cu metoda elementului finit este remarcabilă.

4.2. *Ochiul în regim elastoplastic.* În acest caz, noțiunea de coeficient de concentrare definit mai sus își pierde sensul deoarece în cazul depășirii limitei de elasticitate nu valoarea tensiunii maxime este importantă. În cazul materialelor ideal plastice (în cadrul schematizării Prandtl) σ_{max} este aproximativ constant și egal cu σ_c. Deci coeficientul de concentrare al tensiunilor ar avea valoarea

$$k\sigma_p = \frac{k_\sigma}{\lambda},$$

unde k_σ este valoarea coeficientului de concentrare în regim elastic, iar $\lambda = P/P_c$ încărcarea ochiului exprimată adimensional prin raportul forței

momentane din ochi și valoarea ei la care se produce primul punct plastic. În continuare, pentru încărcare se va prefera coeficientul $\lambda' = \lambda/k_\sigma$ deoarece acesta permite compararea ochiurilor cu aceeași arie a secțiunii AB. Deci $k_{\sigma_p} = 1/\lambda'$. Teoretic, ruperea se produce cînd $\lambda' = 1$, indiferent de valoarea lui $\varkappa$, lucru confirmat practic și de experimentele efectuate de autor și de rezultatele date în lucrările [1], [2], [5], [6], [7], [13].

S-a urmărit evoluția următoarelor mărimi:

a) $k_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{med}}$ pentru secțiunea AB, coeficientul de concentrare a deformațiilor (în domeniul elastic $k_\varepsilon = k_\sigma$);

b) $\varepsilon_{imax}/\varepsilon_c - 1$, pentru aprecierea deformației plastice; ε_{imax} este deformația maximă din piesă (în punctul A sau C), iar ε_c valoarea deformației corespunzătoare limitei de curgere;

c) $\delta = \dfrac{\Delta \cdot E}{R_1 \cdot \sigma_c}$ un coeficient adimensional pentru evaluarea ovalizării totale a ochiului (deplasarea relativă a punctelor C și C' (fig. 1) și

$\delta_r = \dfrac{\Delta_r \cdot E}{R_1 \cdot \sigma_c}$ pentru evaluarea ovalizării remanente. S-a notat cu Δ și Δ_r deplasarea relativă a punctelor C și C' (fig. 1) totală și, respectiv, remanentă, cu E modelul de elasticitate; celelalte notații fiind cunoscute.

Rezultatele obținute teoretic și rezultatele obținute experimental sînt date sub formă de diagrame (fig. 6—12).

În figurile 6 și 7 se prezintă variația lui σ_θ din secțiunea AB (fig. 1) (σ_r și $\sigma_{r\theta}$ sînt mult mai mici decît σ_θ și se pot neglija) și σ_i în secțiunea CD. σ_{med} care apare în figurile 6 și 7 este valoarea medie a lui σ_θ în momentul cînd $\sigma_{max} = \sigma_c(\lambda = 1)$. S-au reprezentat mai multe curbe corespunzător mai multor valori ale încărcării. Valorile încărcărilor λ sînt date în tabelul de mai jos. Numărătoarea corespunde cu cea din figurile 6—8.

Nr.	$\varkappa$			
	1,5	2	2,5	3
0	1	1	1	1
1	1,172	1,265	1,287	1,347
2	1,289	1,310	1,416	1,482
3	1,418	1,530	1,557	1,630
4	1,559	1,680	1,713	1,793
5	—	1,850	1,884	1,972
6	—	2,04	2,073	2,189

În figura 8 s-a trasat pe baza rezultatelor numerice propagarea zonei plastice în piesă pentru diferite valori ale lui $\varkappa$, rezultate comparate cu cele obținute pe modele din material cromoplastic și cu care s-a

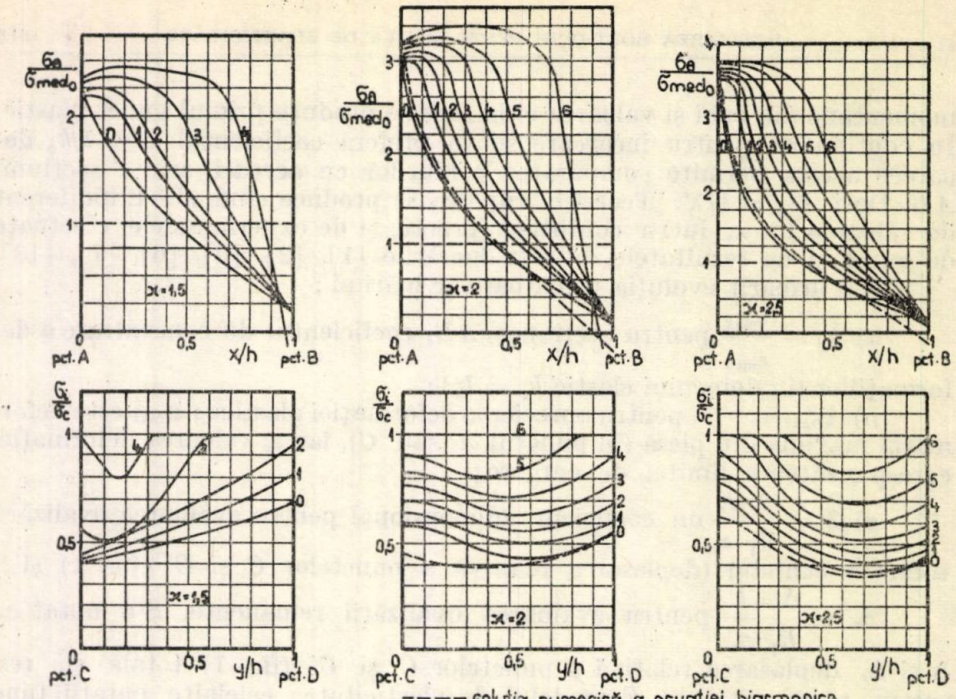

x=1,5
x=2
x=2,5
pct.A
pct.B
pct.C
pct.D
x/h
y/h
0,5
0 1 2 3 4 5 6
soluția numerică a ecuației biarmonice

Fig. 6.

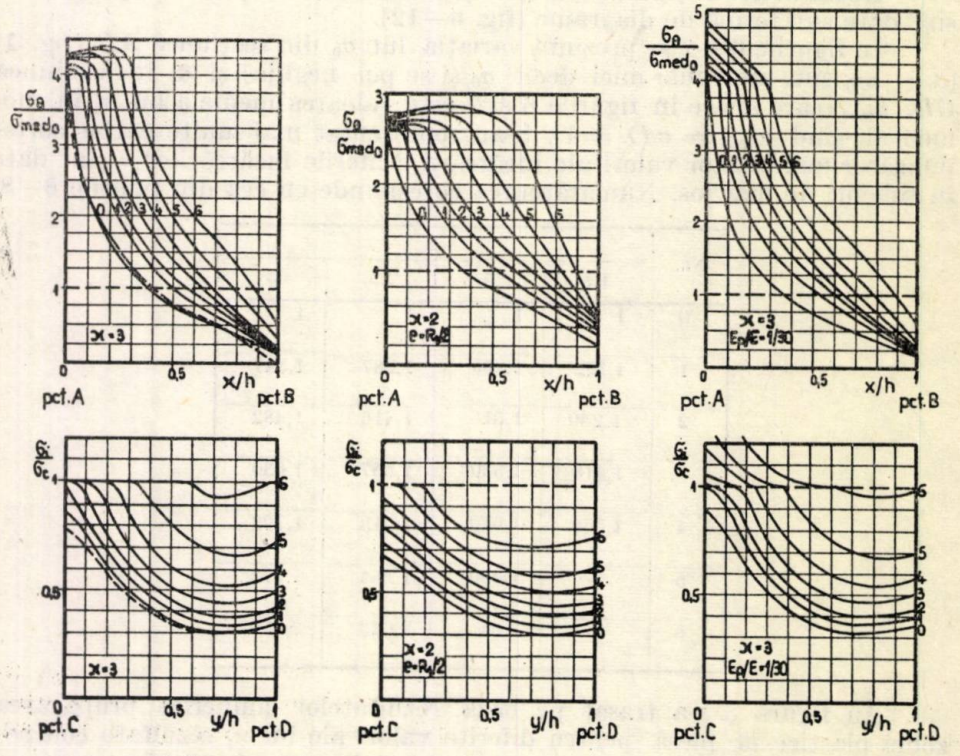

x=3
x=2
e=R/2
x=3
E/E=1/30
pct.A
pct.B
pct.C
pct.D
x/h
y/h
0,5
0 1 2 3 4 5 6
soluția numerică a ecuației biarmonice

Fig. 7

observat o bună concordanță. Din examinarea figurilor 6—8 se pot trage următoarele concluzii :

a) Primul punct plastic apare în punctul A (pentru $\varkappa < 4$) și în continuare zona plastică se propagă de-a lungul conturului găurii, mai ales sub punctul A, deoarece tensiunea normală radială σ_r (dată de presiunea de contact) crește pe măsura apropierii de axa de simetrie a ochiului.

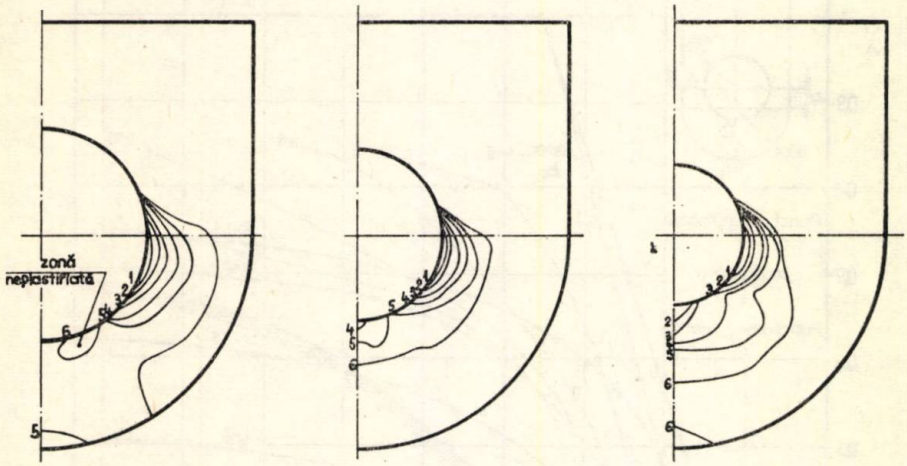


Fig. 8

b) Cu mărirea încărcării peste o anumită valoare, zona plastică se propagă rapid în toată masa ochiului. În același timp apar deplasări plastice mari (ovalizarea găurii). Explicația acestui fenomen (confirmat experimental de încercările pe modele din material cromoplastic) rezultă imediat din examinarea figurilor 6 și 7, unde se vede că σ_t are o variație relativ mică pe secțiunea CD. Ruperea poate apare în oricare din secțiunile dintre AB și CD, deși practic apare mai des în apropierea secțiunii AB, așa cum s-a observat din încercările efectuate de autor.

În urma rezultatelor din lucrarea [12] și a celor obținute în prezenta lucrare se poate afirma că $k_\varepsilon \simeq$ const. și egală cu k_σ, ceea ce înseamnă că, practic vorbind, curba deformației ε_θ din secțiunea AB rămîne asemenea cu ea însăși la creșterea încărcării și deci asemenea cu curba zero din diagramele 6 și 7. Această concluzie nu se supune relației propuse de Neuber ($k_\varepsilon \cdot k_{\sigma_p} =$ const.) pentru o anumită categorie de concentratori, relația adoptată de unii autori în condițiile solicitărilor variabile [4].

În figurile 9—12 este dată grafic corespondența dintre δ și δ_r pe de o parte, și λ', pe de alta. Se face menționea că funcția $\lambda'(\delta)$ pentru un anumit $\varkappa$ tinde asimptotic către dreapta $\lambda' = 1$, ceea ce înseamnă că, teoretic, ruperea are loc pentru δ (sau δ_r) tinzînd la ∞. Pentru ca diagrama din figura 9 să fie completă, s-au trasat și curbele $\varepsilon_{t\max}/\varepsilon_c - 1 =$ = const. și prin urmare se poate urmări direct influența deformației maxime asupra ovalizării găurii.

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA 1948

În figura 10 s-au reprezentat rezultatele experimentale obținute pe modele din oțel carbon cu $\varkappa = 2{,}5$ și $R_1 = 15$ mm. Se remarcă foarte buna concordanță cu rezultatele teoretice. Pentru o mai completă apreciere a rezultatelor se face observația că pentru modelele încercate $\delta = 1$ înseamnă $\Delta = 18\ \mu$.

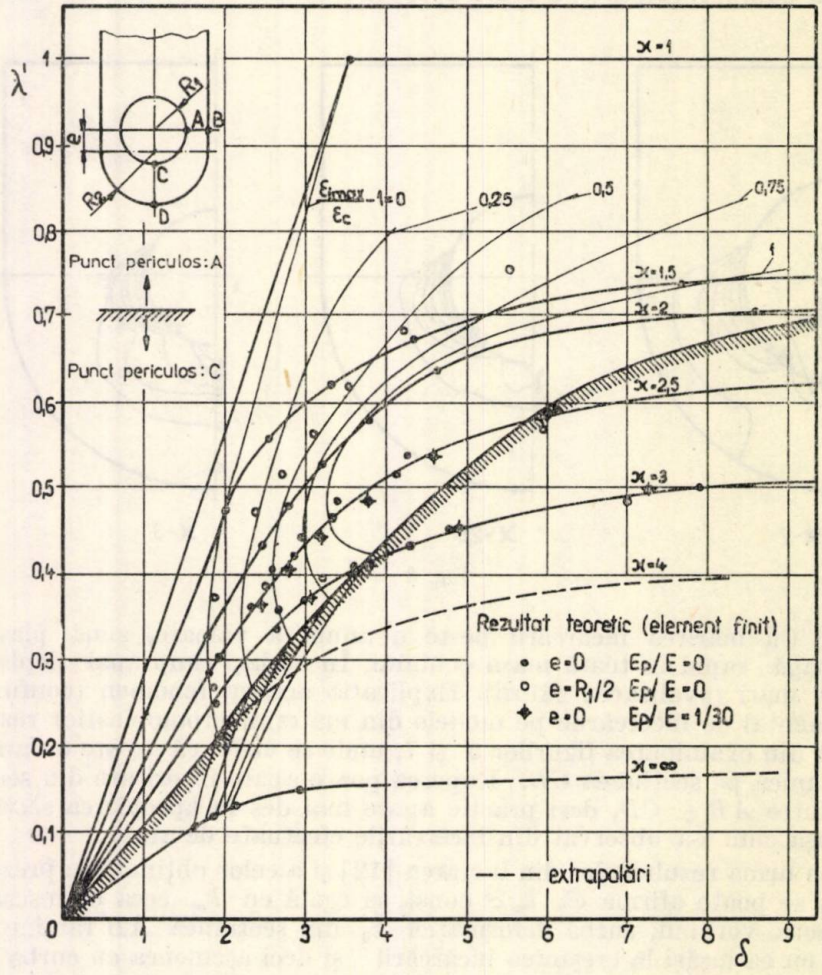


Fig. 9

Curbele $\varepsilon_{i\max}/\varepsilon_c - 1 = \text{const.}$ date în figura 9 au fost determinate pentru ochiuri cu excentricitatea găurii $e = 0$ executate din material cu modulul de plasticitate $E_p = 0$ (ideal plastice). În cazul existenței ecruisării valoarea lui λ ar trebui corectată cu relația

$$\lambda_1 = 1 + (\lambda - 1)\left[1 + \frac{C}{k_\sigma}(\varepsilon_{i\max}/\varepsilon_c - 1)\cdot E_p/E\right], \qquad (14)$$

unde $C = 1{,}8, \ldots$, este un coeficient ce depinde de $\varkappa$. Relația (14) este dedusă prin luarea în considerație a ariei hașurate din figura 13. Lățimea a a zonei plastice din secțiunea AB variază aproximativ liniar cu λ, lucru confirmat și de rezultatele obținute prin teoria de bară [12], și

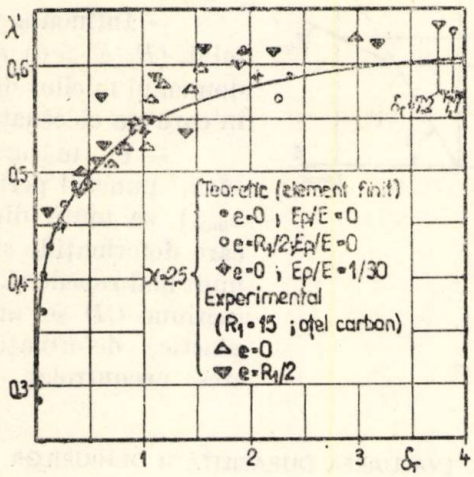


Fig. 10

prin metoda elementului finit, și astfel se ajunge la relația (14). Raportul E_p/E variază de la 1/15 la 1/50 în funcție de materiale (pentru dural

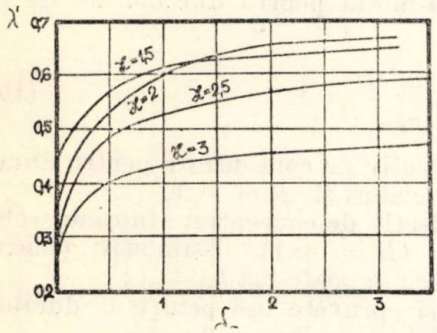


Fig. 11

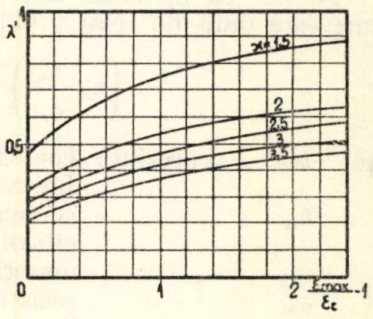


Fig. 12

raportul fiind spre limita superioară, pentru oțel spre limita inferioară). În calculele numerice s-a considerat $E_p/E = 1/30$.

Se poate vedea foarte ușor că pentru valori mici ale raportului $\varepsilon_{i\max}/\varepsilon_c$ (pentru valori mai mari de 5 problema nu mai prezintă interes) paranteza pătrată din relația 14 are valori apropiate de 1.

Din examinarea diagramei din figura 9 se pot trage următoarele concluzii:

— Dezaxarea găurii are influenţă favorabilă asupra comportării ochiului pînă la $\varkappa = 2$, după care diferenţele faţă de cazul $e = 0$ sînt neglijabile.

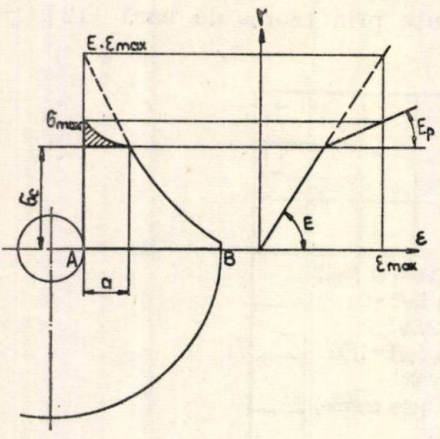


Fig. 13

— Influenţa ecruisării materialului ($E_p/E > 0$) este neglijabilă în domeniul micilor deformaţii, domeniu în care s-a efectuat studiul.

— Pe măsura creşterii încărcării, punctul periculos (punctul cu $\varepsilon_{i\max}$) se mută din A în C, după care deformaţiile şi deplasările cresc mult mai repede şi, îndată ce întreaga secţiune CD se apropie de stadiul plastic, deformaţiile şi deplasările cresc necontrolat.

5. EVALUAREA DURABILITĂŢII OCHIURILOR

Pentru a completa privirea de ansamblu asupra problemei studiate se va face o evaluare a durabilităţii ochiurilor pe baza rezultatelor din literatura de specialitate [3], [4], [9], [10].

Se consideră că solicitarea exterioară variază pulsatoriu, deci coeficientul de asimetrie are valoarea zero ($R = 0$).

Se ştie că în cazul $R \neq 1$ starea-limită pentru durabilitate de N cicluri este dată de relaţia [4]:

$$\left(k_N \frac{\sigma_a}{\sigma_N}\right)^{\nu_1} + \left(k_{st} \frac{\sigma_m}{\sigma_r}\right)^{\nu_2} = 1, \tag{15}$$

unde k_N reprezintă coeficientul efectiv de concentrare pentru durabilitate de N cicluri şi $R = -1$,

k_{st} — coeficientul efectiv de concentrare în cazul solicitării statice ($R = +1$). Estimativ pentru materiale tenace se poate lua $k_{st} = 1$;

σ_N — rezistenţa unei epruvete lise pentru o durabilitate de N cicluri şi $R = -1$;

σ_r — rezistenţa unei epruvete solicitate static;

σ_a, σ_m — amplitudinea şi, respectiv, tensiunea medie a ciclului. Pentru $R = 0$, $\sigma_a = \sigma_m$,

∂_1, ∂_2 — coeficienţi empirici.

Pentru a deduce valoarea lui K_N se poate folosi relaţia lui Heywood [4]:

$$k_N = k_{st} + \frac{(\lg N)^4}{b + (\lg N)^4} (k - k_{st}), \tag{16}$$

unde N este durabilitatea piesei,

K — coeficientul efectiv de concentrare pentru durabilitate infinită și $R = -1$ (ciclu alternant simetric);

$\tilde{K} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$, adică raportul rezistențelor pentru durabilitate infinită a unui epruvete lise și a unei epruvete cu concentrator, de aceeași secțiune netă.

Valoarea coeficientului K se poate deduce din binecunoscutele relații ale lui Neuber, Heywood etc. [3], [4], [9], [10].

Estimarea curbei lui Wöhler se poate face folosind una din relațiile empirice date în literatură, de exemplu,
Cioclov [4],

$$\lg\left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_r}\right) = -\frac{C}{\lg(N/N^*)}, \tag{17}$$

unde C și N^* sînt constante de ajustare, sau
Heywood [4]:

$$\sigma_N/\sigma_r = \frac{1 + 0{,}0032(\lg N)^4}{1 + 0{,}0080(\lg N)^4}. \tag{18}$$

Pe baza relațiilor de mai sus și pe baza rezultatelor obținute de autor s-a trasat diagrama din figura 14, care redă (în cazul unui ochi cu $\varkappa = 2$ și $e = 0$ executat dintr-un oțel cu $\sigma_c/\sigma_r = 0{,}75$) influența forței din ochi, a ovalizării remanente δ_r și a deformației totale maxime $\varepsilon_{max}/\varepsilon_c$ asupra durabilității. Desigur că diagrama din figura 14 nu poate servi ca bază pentru dimensionarea ochiurilor deoarece a fost dedusă pe baza unor relații empirice cu caracter general, cu toate că a fost concepută acoperitor, însă redă foarte elocvent influența deformațiilor și deplasărilor plastice asupra durabilității ochiurilor.

Chiar dacă într-o anumită porțiune din ochi se atinge stadiul plastic ($\lambda > 1$), ochiul este capabil să reziste încă la un număr mare de cicluri. Un exemplu este concludent: ochiul cu dimensiunile $R_1 = 10$, $R_2 = 20$ ($\varkappa = 2$), $t = 10$ este executat dintr-un oțel cu $\sigma_r = 80$ da N/mm² și $\sigma_c = 60$ da N/mm².

Primul punct plastic se atinge la forța ($\lambda = 1$): $P = 4\,000$ daN, pentru care durabilitatea este infinită. Dacă se mărește încărcarea de circa 1,5 ori, adică $P = 6\,000$ daN ($\lambda = 1{,}5$), ovalizarea remanentă a găurii este

$$\Delta_r = \frac{R_1 \cdot \sigma_c \cdot \delta_r}{E} = \frac{10 \cdot 60 \cdot 0{,}3}{21\,000} = 0{,}0086 \text{ mm},$$

durabilitatea $2 \cdot 10^4$ cicluri, iar deformația specifică maximă (în punctul A) $\varepsilon_{max}/\varepsilon_c \simeq 2$. Deformația plastică este $\varepsilon_{max}/\varepsilon_c - 1 \simeq 1$, adică 0,285 %.

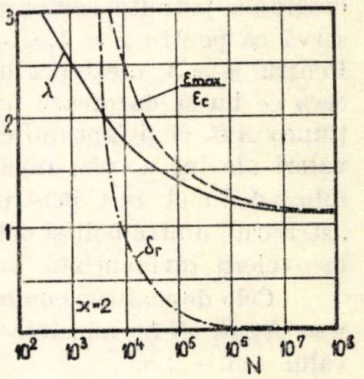


Fig. 14

Ovalizarea de 8,6 μ intră în cîmpul de toleranţă a găurii, iar durabilitatea limitată convine într-o serie de cazuri (în tehnica aeronautică mai ales). Durabilitatea creşte repede pe măsura scăderii sarcinii : astfel, de exemplu (conforma diagramei din fig. 14) pentru $\lambda = 1{,}4$, $N = 10^5$ şi pentru $\lambda = 1{,}2$, $N = 10^6$.

6. CONCLUZII

Din cele expuse în această lucrare se desprind concluziile :

a) În funcţie de locul unde sînt folosite, ochiurile pot fi încărcate şi peste sarcina corespunzătoare primului punct plastic ; trebuie avut în vedere ca ovalizarea remanentă să nu pericliteze siguranţa în funcţionare şi scăderea corespunzătoare a durabilităţii să corespundă condiţiilor concrete de încărcare.

b) Deşi în unele lucrări de specialitate se recomandă ca gaura să fie dezaxată faţă de raza exterioară, aceasta are influenţă favorabilă asupra comportării ochiurilor doar pentru valori $\varkappa \leqslant 2$. Pentru ochiuri cu $\varkappa \geqslant 2{,}5$ efectul dezaxării se poate neglija.

c) Valoarea modulului de plasticitate E_p are de asemenea o influenţă redusă asupra comportării ochiurilor, în domeniul micilor deformaţii plastice. Influenţa este mică chiar în cazul teoretic, cînd $E_p = E$.

d) Atîta timp cît zona plastică se dezvoltă în jurul punctului A, ovalizarea remanentă a găurii este foarte mică. Îndată ce şi în secţiunea CD apar puncte plastice, deplasările şi deformaţiile remanente cresc repede, mai ales că în secţiunea CD zona plastică se propagă rapid şi pentru o mică creştere a forţei din ochi, secţiunea CD este complet plastificată. Deci este bine (fig. 9) ca punctul cel mai solicitat (punctul cu $\varepsilon_{i\max}$) să fie punctul A. În momentul în care punctul cel mai solicitat se mută în C, deformaţiile şi deci şi deplasările cresc mult mai repede (aceasta reiese din figura 9 prin faptul că în acest caz liniile $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_c - 1 = \text{const.}$ sînt mult mai dese).

În diagrama din figura 11 s-a reprezentat dependenţa dintre încărcare şi ovalizarea remanentă prin parametrii λ' şi, respectiv, δ_r, deci diagrama permite compararea ochiurilor de aceeaşi secţiune AB. Se observă că pentru $\varkappa = 1{,}5, \ldots, 2{,}5$ ovalizările remanente au valori apropiate. Pentru $\varkappa = 3$, creşterea lui δ_r pentru aceeaşi încărcare se accentuează, ceea ce nu se datorează numai creşterii concentrării tensiunilor din secţiunea AB, ci şi faptului că secţiunea CD este mai solicitată decît pentru valori ale lui $\varkappa$ mai mici şi există tendinţa mutării punctului cel mai solicitat din A în C pentru forţe mai mici, cu alte cuvinte creşte ponderea „strivirii" dintre bolţ şi ochi (materializată de tensiunea σ_r) în detrimentul încovoierii (evidenţiată de tensiunea σ_θ).

Cele de mai sus conduc la concluzia că este recomandabil ca raportul $\varkappa = R_2/R_1$ să fie mai mic decît 3, valorile optime fiind cuprinse în intervalul 1,5 — 2,5.

Primită în redacţie la 2 iulie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. M. F. Astahov și colab., *Calculul rezistenței avionului*, București, Edit. tehnică, 1957.
2. E. F. Bruhn, *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, Ohio, Tri-State Offset Company, 1965.
3. R. Cazaud, *La fatique des métaux*, Paris, Dunod, 1969.
4. D. Cioclov, *Rezistență și fiabilitate la solicitări variabile*, Timișoara, Edit. Facla, 1975.
5. I. Coșereanu și colab., *Studiu experimental privind încercări fotoelastice asupra unor modele de leviere și feruri de joncțiune*, lucrare executată de Universitatea din Brașov pe bază de contract, 1973.
6. I. Coșereanu, I. Goia, M. C. Tofan, M. Munteanu, *Studiu teoretic și experimental al rezistenței unor modele de leviere și feruri de joncțiune cu aplicații la avioane și planoare*, Sesiunea științifică jubiliară a Universității Brașov, 1974.
7. H. Dietmann, *Kerbwirkung und Festigkeitsberechnung*, Teil 1 und 2, VDI—Z, 1970, Band 112, p. 617—620 și p. 698—702.
8. J. F. Fampel, *Engineering Design*, New York, John Wiley and Sons, 1964.
9. A. F. Madayag, *Metal Fatique: Theory and Design*, New York, John Wiley and Sons, 1969.
10. R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*, New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1967.
11. Ch. Massonnet și colab., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, București, Edit. tehnică, 1974.
12. M. Munteanu, B. Eichhorn, *Studiul solicitării în domeniul elasto-plastic a unor feruri folosite în construcții aviatice*, Sesiunea științifică a Academiei Militare, București, 1974.
13. D. J. Peery, *Aircraft Structures*, New York, McGraw-Hill, Book Company, 1950.
14. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. II, București, Edit. Academiei R.S. România, 1966.
15. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, London, McGraw-Hill, 1971.

NOTE

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A PRESIUNILOR DIN LAGĂRELE HIDRODINAMICE CILINDRICE PENTRU LUBRIFIANT BIFAZIC

de FLAVIUS POCIOIANU
Institutul politehnic „Traian Vuia", Timișoara

INTRODUCERE

Cercetările experimentale de vizualizare a filmului de lubrifiant în lagărele hidrodinamice cilindrice, efectuate în Laboratorul de mașini hidraulice din Institutul politehnic „Traian Vuia" Timișoara și unele date din literatura de specialitate [1], [2] indică prezența unor bule de aer liber curgerea uleiului. Bulele de aer se formează fie prin degajarea aerului dizolvat, fie prin antrenarea aerului de către suprafețele libere ale uleiului în contact cu atmosfera.

Concentrația volumică de aer φ, sub formă de bule, variază de la 0,5% pînă la 15% în funcție de condițiile curgerii [1]. În încercările experimentale efectuate de autor, cu lagăre hidrodinamice cilindrice de turație ridicată (pînă la 10.000 rot/min) s-a măsurat în medie o concentrație volumică de 4,5%.

Rezultă că avem în lagăre un lubrifiant bifazic, format din ulei și bule de aer. Prin urmare, la rezolvarea numerică a ecuației diferențiale a presiunilor trebuie să se țină cont de efectul bulelor de aer, prin introducerea compresibilității lubrifiantului bifazic.

MODELUL MATEMATIC ȘI METODA DE CALCUL

Masa specifică a lubrifiantului bifazic poate fi exprimată în modul următor :

$$\rho = (1 - \varphi)\rho_L + \varphi\rho_G, \tag{1}$$

unde ρ_L și ρ_G sînt masele specifice ale uleiului și aerului, iar φ este concentrația volumică de aer.

Folosind criteriile deduse de S.M. Plesset în teoria cavitației gazoase [3], pentru condițiile de funcționare a lagărelor hidrodinamice cilindrice, a rezultat că procesul de compresie, respectiv destindere, a bulelor de aer

din film este izoterm. Deci, vom avea următoarea relaţie :

$$\varphi = \varphi_a \frac{p_a}{p}, \tag{2}$$

unde φ este concentraţia volumică la presiunea p, iar φ_a este la presiunea p_a a mediului ambiant în care funcţionează lagărul.

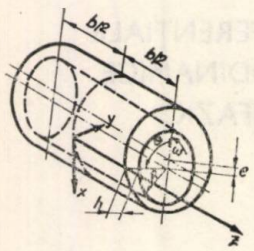


Fig. 1

Ecuaţia diferenţială a presiunilor din filmul lubrifiantului bifazic compresibil [4, p. 80; 5, p. 2 şi 6, p. 65] este adimensionalizată pe baza următoarelor relaţii (pentru notaţii vezi fig. 1) :

$$\bar{x} = x/R = \theta; \quad \bar{z} = 2z/b; \quad \bar{h} = h/c = 1 + \varepsilon \cos\theta, \tag{3}$$

$$C_p = p\psi^2/\mu\omega; \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_L = 1 + \varphi(\rho\rho/\rho_L - 1); \quad \lambda = 2R/b,$$

unde x şi z — coordonatele punctului în planul desfăşurat al filmului, R — raza fusului; b — lăţimea lagărului; h — grosimea filmului; c — jocul radial; ε — excentricitatea relativă; θ — coordonata unghiulară; C_p — coeficientul adimensional de presiune : p — presiunea; ψ — jocul radial relativ; μ — vîscozitatea; ω — viteza unghiulară; λ — lungimea relativă şi semnul barat indică o mărime adimensională.

Se obţine următoarea ecuaţie adimensională a presiunilor pentru un lubrifiant bifazic;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{\rho}\bar{h}^3 \frac{\partial C_p}{\partial\theta}\right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{\rho}\bar{h}^3 \frac{\partial C_p}{\partial\bar{z}}\right) = 6 \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{h})}{\partial\theta}. \tag{4}$$

Rezolvarea ecuaţiei a fost efectuată numeric pe baza metodei diferenţelor finite. Termenii ecuaţiei (4) au fost aproximaţi în modul următor [5 p. 172] :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{\rho}\bar{h}^3 \frac{\partial C_p}{\partial\theta}\right) \cong$$

$$\cong \frac{\bar{\rho}_{i,j+1/2} \cdot \bar{h}^3_{i,j+1/2} \dfrac{C_{pi,j+1} - C_{pi,j}}{\Delta\theta} - \bar{\rho}_{i,j-1/2} \cdot \bar{h}^3_{i,j-1/2} \dfrac{C_{pi,j} - C_{pi,j-1}}{\Delta\theta}}{\Delta\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{\rho}\bar{h}^3 \frac{\partial C_p}{\partial\bar{z}}\right) \cong \tag{5}$$

$$\cong \frac{\bar{\rho}_{i+1/2,j} \cdot \bar{h}^3_{i+1/2,j} \dfrac{C_{pi+1,j} - C_{pi,j}}{\Delta\bar{z}} - \bar{\rho}_{i-1/2,j} \cdot \bar{h}^3_{i-1/2,j} \dfrac{C_{pi,j} - C_{pi-1,j}}{\Delta\bar{z}}}{\Delta\bar{z}},$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{h})}{\partial\theta} \cong \frac{\bar{\rho}_{i,j+1/2} \cdot \bar{h}_{i,j+1/2} - \bar{\rho}_{i,j-1/2} \cdot \bar{h}_{i,j-1/2}}{\Delta\theta}.$$

Notaţiile din relaţiile (5) rezultă din figura 2.

Înlocuind termenii ecuaţiei (4) cu expresiile din relaţiile (5) obţinem

$$C_{pi,j} = a_0 + a_1 C_{pi+1,j} + a_2 C_{pi-1,j} + a_3 C_{pi;j+1} + a_4 C_{pi,j-1}. \tag{6}$$

Ecuațiile de forma (6) există în fiecare nod al rețelei. Rezolvarea sistemului de ecuații pentru întreg filmul a fost efectuată printr-un calcul iterativ, deoarece coeficienții $a_0 \dots a_4$ nu sînt constanți, fiind funcție de presiune prin intermediul masei specifice a amestecului.

Metoda de calcul a fost programată în limbaj FORTRAN pentru un calculator de tip FELIX C-256. Programul este similar cu cel folosit pentru calculul coeficienților adimensionali de presiune în lagărele hidrodinamice cilindrice în cazul unui lubrifiant incompresibil [7]. Diferența a constat în introducerea în calcul a compresibilității lubrifiantului și în asigurarea unei erori mai mici de calcul de 0,5%.

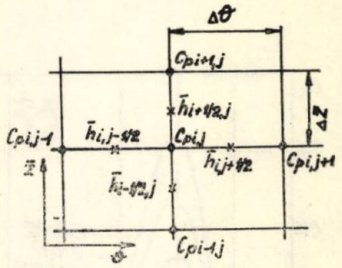


Fig. 2

De asemenea, menționăm că odată cu creșterea excentricității relative, respectiv a gradienților de presiune, este necesară creșterea densimii rețelei, micșorarea pasului $\Delta\theta$ și $\Delta\bar{z}$ dintre noduri, pentru a asigura o convergență mai rapidă a soluției.

Au fost calculați coeficienții adimensionali de presiune și apoi prin integrare portanța lagărului de lungime relativă $\lambda = 1$, pentru excentricități relative variind de la $\varepsilon = 0{,}025$, pînă la 0,15. Influența prezenței bulelor de aer asupra distribuțiilor de presiuni a fost studiată prin calcularea distribuțiilor de coeficienți de presiune pentru concentrația volumică $\varphi_a = 2{,}5$; 5 ; 10 și 15% și pentru parametrul $p_a\,\psi^2/\mu\omega = 0{,}05$ și 0,1.

Influența variației excentricității asupra distribuțiilor coeficienților adimensionali de presiune de la mijlocul lagărului, pentru $\varphi_a = 5\%$ și $p_a\,\psi^2/\mu\omega = 0{,}1$ este redată în diagrama din figura 3. Aceste distribuții teoretice se apropie mult mai mult de cele determinate experimental [8] (vezi fig. 4), decît distibuțiile calculate pentru lubrifiantul incompresibil [7].

Se observă că presiunea absolută minimă este întotdeauna pozitivă, mai mare ca vidul absolut, spre deosebire de rezultatele obținute pentru lubrifiantul incompresibil [7]. Aceste rezultate sînt importante în studiul fenomenului de cavitație în lagărele hidrodinamice cilindrice.

Analizînd diagrama din figura 4 observăm că mărirea concentrației volumice de aer φ_a, respectiv creșterea compresibilității lubrifiantului bifazic, determină o apropiere din ce în ce mai mare a alurii distribuției de cea corespunzătoare lagărelor lubrifiate cu gaze [6, p. 252 și 351].

În cadrul lubrifiantului bifazic, ca la cel gazos, condițiile limită de la marginea lagărului cuprind și definirea parametrului $p_a\psi^2/\mu\omega$. Acest parametru, împreună cu concentrația volumică de aer φ_a caracterizează starea lubrifiantului bifazic la marginile lagărului. Influența parametrului $p_a\,\psi^2/\mu\omega$ asupra distribuției coeficienților adimensionali de presiune din mijlocul lagărului este prezentată în figura 5.

Coeficientul de portanță a fost definit prin relația [4, p. 116]:

$$\zeta = \frac{p_m \psi^2}{\mu\omega}, \tag{7}$$

unde p_m este presiunea medie de încărcare a lagărului.

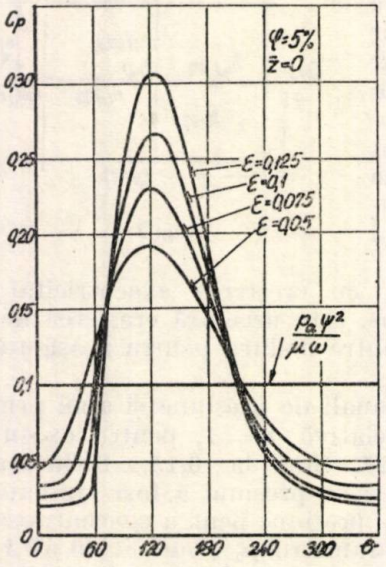


Fig. 3. — Influența excentricității relative de funcționare.

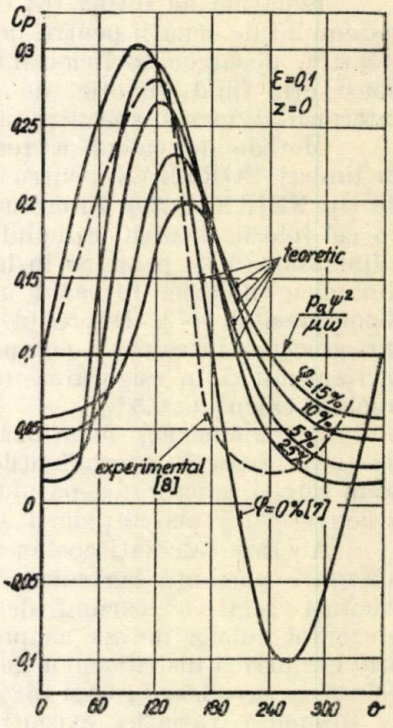


Fig. 4. — Influența concentrației volumice de aer liber.

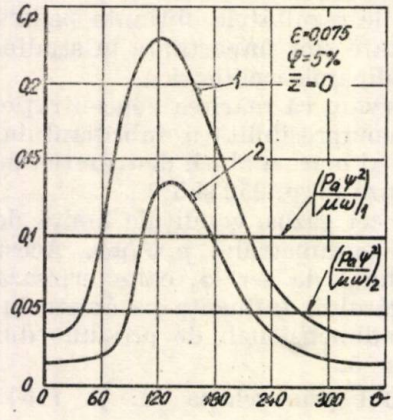


Fig. 5. — Influența parametrului $p_a\,\psi^2/\mu\omega$.

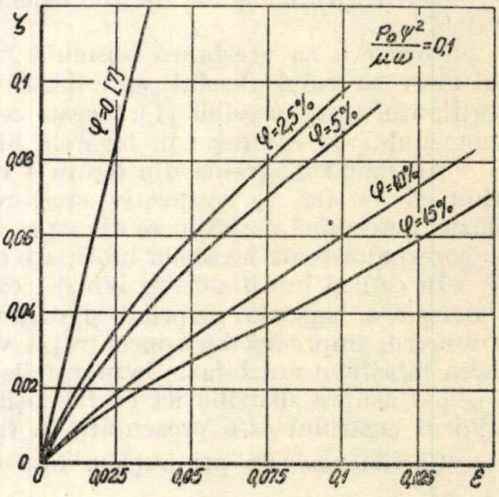


Fig. 6. — Dependența coeficientului de portanță de excentricitatea relativă și de concentrația volumică de aer.

Coeficientul de portanță ζ a fost calculat prin integrarea numerică a coeficienților adimensionali de presiune, cu ajutorul metodei trapezelor.

Scăderea portanței, odată cu creșterea concentrației volumice de aer sub formă de bule, este arătată în diagrama din figura 6.

CONCLUZII

S-a conceput modelul matematic lubrifiantului bifazic, ulei cu bule de aer, prin exprimarea masei specifice a amestecului în funcție de concentrația volumică de aer. Ecuația diferențială a presiunilor pentru acest lubrifiant a fost rezolvată numeric, obținîndu-se distribuțiile coeficienților de presiune și portanța lagărului.

Distribuțiile de coeficienți de presiune, determinate experimental, concordă mult mai bine cu rezultatele teoretice în cazul lubrifiantului compresibil bifazic, față de cele pentru lubrifiantul incompresibil.

Rezultatele numerice obținute, inclusiv programul de calcul, pot fi folosite atît în proiectarea lagărelor hidrodinamice cilindrice cu viteze periferice mari, cît și în studiul fenomenului de cavitație în lubrifiere.

Primită la redacție la 29 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Basta și colab., *Obiomnlie gidravliceskie privodi* (Acționări hidraulice), Moscova, 1969, Izd. Mașinostroenie, p. 38.
2. A. T. J. Hayward, *Aeration in Hydraulic Systems. Its Assesment and Control*, Proceedings. of the Conference on Oil Hydraulic Power Transmission and Control — 1961, Londra, Institution of Mec. Eng., 1962,, p. 216—224.
3. S. M. Plesset, *Bubble Dynamics. Cavitation in Real Liquids*, Elsevier, Amsterdam, 1964.
4. N. Tipei, *Hidro-aerodinamica lubrificației*, Edit. Academiei R.P.R., București, 1957.
5. O. Pinkus și B. Sternlicht, *Theory of Hydrodinamic Lubrication*, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1961.
6. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze*, Edit. Academiei R.P.R., București, 1963.
7. F. Pocioianu, *Rezolvarea ecuației diferențiale a presiunilor din lagărele hidrodinamice cilindrice prin metoda diferențelor finite*, Bul. Inst. Politeh. Timișoara, Seria Mecanică, **10(23)**, *2*, 204—210 (1974).
8. F. Pocioianu, I. Anton, *Experimental research of cavitation phenomena in journal bearings*, Bul. Inst. Politeh. Timișoara, Seria Mecanică, **20 (35)**, *1*, 45—46(1976).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848